

Jak rychle rostou faktoriály a proč je dobré to vědět?

Petr Vodstrčil

petr.vodstrcil@vsb.cz

VŠB TECHNICKÁ
UNIVERZITA
OSTRAVA

FAKULTA
ELEKTROTECHNIKY
A INFORMATIKY

KATEDRA
APLIKOVANÉ
MATEMATIKY

Ostrava, 22.1. 2026

(ŠKOMAM 2026)

Co je faktoriál?

Připomeňme, že pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

S faktoriály se na střední škole můžeme setkat například v kombinatorice.

$$1! = 1$$

$$2! = 2$$

$$3! = 6$$

$$4! = 24$$

$$5! = 120$$

$$6! = 720$$

$$7! = 5\,040$$

$$8! = 40\,320$$

$$9! = 362\,880$$

$$10! = 3\,628\,800$$

$$11! = 39\,916\,800$$

$$12! = 479\,001\,600$$

$$13! = 6\,227\,020\,800$$

$$14! = 87\,178\,291\,200$$

.....

Vidíme, že $n!$ roste velmi rychle a je užitečné vědět, jak moc.

Jsme schopni například jednoduše zjistit, kolik cifer má 1 000 000!?

Základní odhady faktoriálu

Platí

$$\begin{aligned}n! &= 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n, \\n! &= n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1.\end{aligned}$$

Vynásobením dostaneme

$$(n!)^2 = (1 \cdot n) \cdot (2 \cdot (n-1)) \cdot \dots \cdot ((n-1) \cdot 2) \cdot (n \cdot 1).$$

Každá závorka má tvar $k(n-k+1)$, kde $k \in \{1, \dots, n\}$. Navíc není těžké si uvědomit, že

$$n \leq k(n-k+1) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2.$$

Proto platí

$$n^n \leq (n!)^2 \leq \left[\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\right]^n \implies n^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Přesnost odhadů $n^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

Zkusme do právě odvozených odhadů dosadit například $n = 100$.

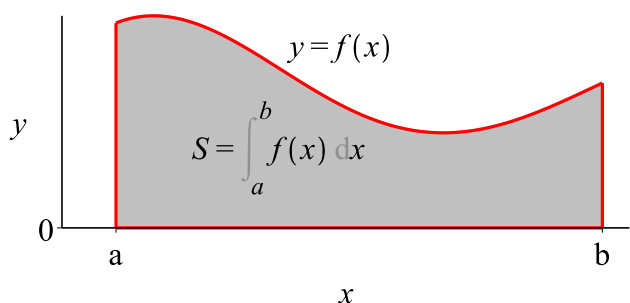
Pak

$$\begin{aligned}n^{\frac{n}{2}} &= 100^{50} = 1,000 \cdot 10^{100}, \\n! &= 100! \doteq 9,333 \cdot 10^{157}, \\ \left(\frac{n+1}{2}\right)^n &= \left(\frac{101}{2}\right)^{100} \doteq 2,134 \cdot 10^{170}.\end{aligned}$$

Vidíme, že tyto odhady jsou poměrně dost nepřesné.

K odvození přesnějších odhadů faktoriálu lze (jak uvidíme za chvíli) využít metod numerické integrace.

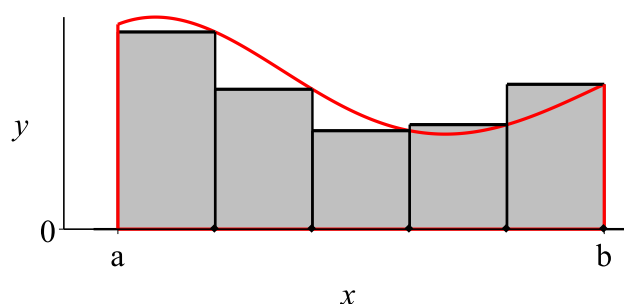
Integrál z nezáporné spojité funkce f $\left(\int_a^b f(x) dx\right)$



Integrál z nezáporné spojité funkce f si lze představovat jako obsah plochy pod grafem funkce f .

Velmi často se stává, že integrál neumíme (nebo nechceme) spočítat analyticky.

Potom musíme přistoupit k numerickému výpočtu integrálu.

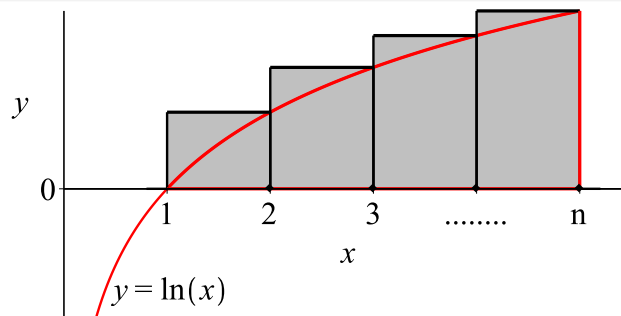
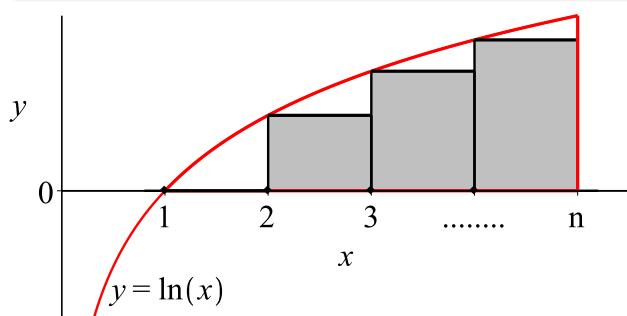


Lepší odhady faktoriálu

Nejprve si všimněme, že platí

$$\ln(n!) = \ln(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n) = \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n.$$

Zvolme si přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, a pokusme se numericky spočítat integrál z logaritmu, konkrétně $\int_1^n \ln x dx$.



Ihned vidíme, že

$$\ln 1 + \dots + \ln(n-1) \leq \int_1^n \ln x dx \leq \ln 2 + \dots + \ln n.$$

$$\ln 1 + \dots + \ln(n-1) \leq \int_1^n \ln x \, dx \leq \ln 2 + \dots + \ln n$$

Je jasné, že

$$\ln 1 + \dots + \ln(n-1) = \ln((n-1)!),$$

$$\ln 2 + \dots + \ln n = \ln(n!).$$

Dále lze (pomocí integrační metody per-partes) ukázat, že

$$\int_1^n \ln x \, dx = n \ln n - n + 1 = \ln \left[\left(\frac{n}{e} \right)^n e \right].$$

Proto platí (odstraníme logaritmy)

$$(n-1)! \leq \left(\frac{n}{e} \right)^n e \leq n!.$$

Odtud již velmi snadno dostaneme následující odhady faktoriálu.

$$\left(\frac{n}{e} \right)^n e \leq n! \leq \left(\frac{n}{e} \right)^n en.$$

Přesnost odhadů $\left(\frac{n}{e} \right)^n e \leq n! \leq \left(\frac{n}{e} \right)^n en$

Zkusme opět do odhadů dosadit $n = 100$. Dostaneme

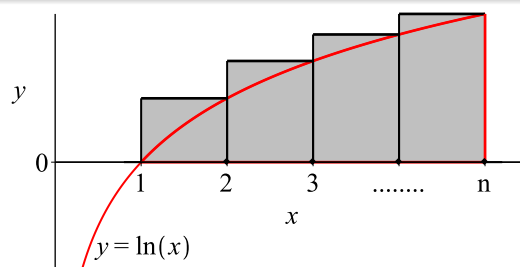
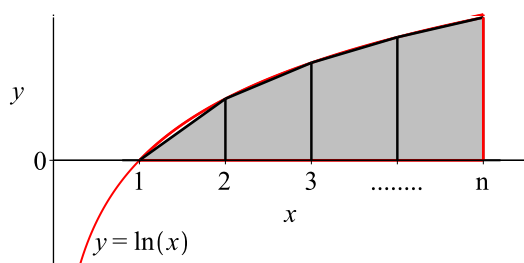
$$\left(\frac{n}{e} \right)^n e \doteq 1,011 \cdot 10^{157},$$

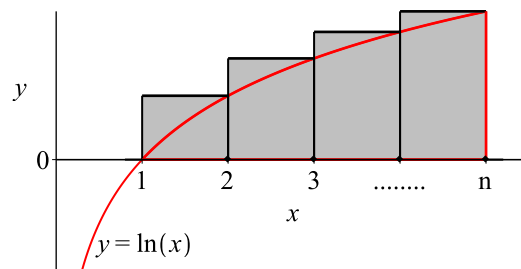
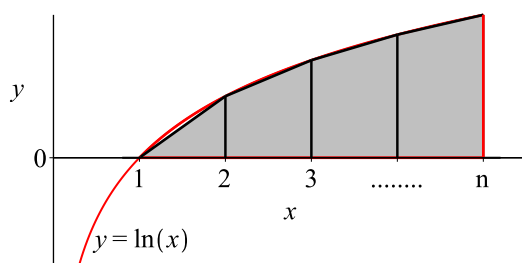
$$n! \doteq 9,333 \cdot 10^{157},$$

$$\left(\frac{n}{e} \right)^n en \doteq 1,011 \cdot 10^{159}.$$

Vidíme tedy, že tentokrát jsou odhady faktoriálu mnohem přesnější.

Navíc lze tyto odhady ještě dále vylepšovat.





Levý obrázek nám říká, že

$$\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 2 + \ln 3}{2} + \dots + \frac{\ln(n-1) + \ln n}{2} \leq \int_1^n \ln x \, dx,$$

$$\ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln(n-1) + \frac{1}{2} \ln n \leq n \ln n - n + 1,$$

$$\ln \left(\frac{n!}{\sqrt{n}} \right) \leq \ln \left[\left(\frac{n}{e} \right)^n e \right],$$

$$\left(\frac{n}{e} \right)^n e \leq n! \leq \left(\frac{n}{e} \right)^n e \sqrt{n}.$$

Ještě dokonalejší formulky pro faktoriál

Stirlingův vzorec:

Pro $n \in \mathbb{N}$ platí přibližná rovnost

$$n! \doteq \left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Navíc, relativní chyba, které se během výpočtu faktoriálu dopustíme, se (pro velká n) blíží k nule.

Abychom ilustrovali přesnost Stirlingova vzorce, dosad' me si do něj opět $n = 100$. Přímým výpočtem dostaneme

$$n! \doteq 9,333 \cdot 10^{157},$$

$$\left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n} \doteq 9,325 \cdot 10^{157}.$$

Vylepšený Stirlingův odhad:

$$\left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n} \leq n! \leq \left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n} e^{\frac{1}{12n}}$$

$$n! \doteq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Díky výše uvedenému vztahu máme lepší představu o růstu faktoriálu.

A teď poměrně jednoduše dokážeme odpovědět na otázku, kolik cifer má 1 000 000!.

Uvědomme si, že počet cifer potřebný k zapsání přirozeného čísla (v desítkové soustavě) souvisí s dekadickým logaritmem tohoto čísla.

Díky předchozímu dostaneme

$$\log_{10}(n!) \doteq n \log_{10} \left(\frac{n}{e}\right) + \frac{1}{2} \log_{10}(2\pi n).$$

Jednoduchým výpočtem, který bychom hravě zvládli i na obyčejné kalkulačce, zjistíme, že $\log_{10}(1\,000\,000!) \doteq 5\,565\,708,92$.

Číslo 1 000 000! má tedy 5 565 709 cifer.

Úloha k zamyšlení

Rozhodněte, jak se (pro velká $n \in \mathbb{N}$) chovají posloupnosti (a_n) a (b_n) , je-li

$$a_n = \frac{2^n n!}{n^n} \quad \text{a} \quad b_n = \frac{3^n n!}{n^n}.$$

Řešení:

Využijeme toho, že $n!$ se (pro velká $n \in \mathbb{N}$) chová jako $\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

Proto (pro obecné $q \in \mathbb{R}^+$) platí

$$\frac{q^n n!}{n^n} \doteq \frac{q^n \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}{n^n} = \left(\frac{q}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

To znamená, že pro $q \geq e$ posloupnost „utíká“ do nekonečna, zatímco pro $q < e$ posloupnost konverguje k nule.

Náhodná procházka – formulace problému

Pohybujeme se po číselné ose, přičemž startujeme z počátku (bod 0).

V každém kroku se s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ posuneme o 1 doprava a s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ o 1 doleva (můžeme si hodit mincí).

Jaká je pravděpodobnost, že se po k krocích ($k \in \mathbb{N}$) ocitneme opět v počátku? Tuto pravděpodobnost si označme $P(k)$.

Řešení:

Je jasné, že pro k liché je $P(k) = 0$.

Pro k sudé (tzn. $k = 2n$, $n \in \mathbb{N}$) si není těžké rozmyslet, že

$$P(2n) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}},$$

neboť 2^{2n} je počet všech možných „procházek“ o $2n$ krocích a těch, kterých začínají a končí ve stejném bodě, je právě $\binom{2n}{n}$.

Náhodná procházka $P(2n) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$

Otázky:

- Jak se (řádově) chová pravděpodobnost pro velký (sudý) počet kroků?
- Jak se pravděpodobnost změní, pokud počet kroků vzroste $100\times$?

Protože

$$P(2n) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2},$$

je jasné, že potřebujeme znát chování faktoriálů pro velká $n \in \mathbb{N}$.

Použijeme-li nyní Stirlingův vzorec

$$n! \doteq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n},$$

dostaneme

$$P(2n) \doteq \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2\pi \cdot 2n}}{2^{2n} \left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\right)^2} = \frac{2^{2n} \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\sqrt{\pi n}}{2^{2n} \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Nyní vidíme, že pokud počet kroků náhodné procházky vzroste například $100\times$, klesne pravděpodobnost, že náhodná procházka začíná a končí ve stejném bodě, přibližně $10\times$.

Přesné hodnoty pravděpodobnosti:

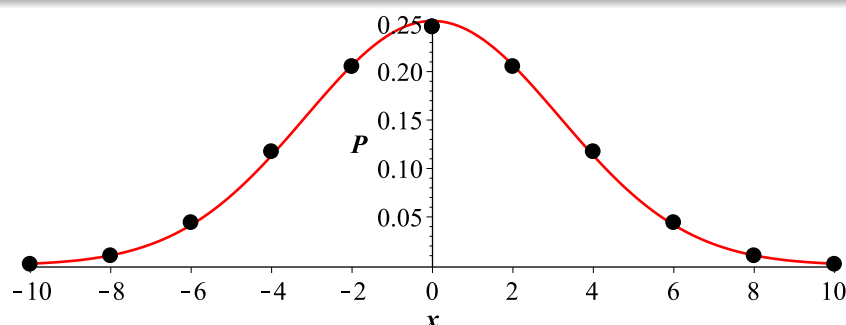
$$\begin{aligned} P(10) &= 0,24609375, \\ P(1\,000) &= 0,02522501\dots, \\ P(100\,000) &= 0,00252312\dots \end{aligned}$$

Hodnoty pravděpodobnosti získané přibližným vzorcem:

$$\begin{aligned} P(10) &\doteq 0,25231325, \\ P(1\,000) &\doteq 0,02523133, \\ P(100\,000) &\doteq 0,00252313. \end{aligned}$$

Mohli bychom zkoumat i pravděpodobnost, že po $2n$ krocích skončíme v nějakém předepsaném bodě (který nemusí být nutně počátek).

Na následujícím obrázku jsou znázorněny pravděpodobnosti pro $n = 5$, tj. pro 10 kroků.



Rovnice červené křivky (Gaussova křivka) je

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{-\frac{x^2}{4n}}.$$

S právě zkoumanou náhodnou procházkou úzce souvisí tzv. [Galtonova deska](#).

Děkuji za pozornost !!!