

Bayesova věta

Jan Kracík

Katedra aplikované matematiky
FEI, VŠB – TUO

Úvod

Bayesova věta

- představuje mechanismus získávání informací z dat,
- opírá se o teorii pravděpodobnosti,
- formulována Thomasem Bayesem (1701–1761),
- k rozvoji přispěl Pierre-Simon Laplace (1749-1827).

- 1 Míra
- 2 Pravděpodobnost
- 3 Bayesova věta

Míra

Příklady míry v běžném smyslu:

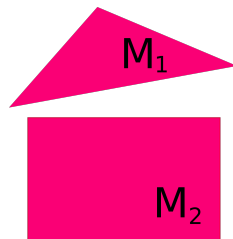
- **obsah** plochy,
- **objem** tělesa,
- **hmotnost** tělesa,
- **počet** prvků,
- **cena** zboží,
- ...

Příklady míry: obsah plochy

Označme obsah plochy M jako $S(M)$.

Pro libovolnou plochu M platí:

- $S(M) \geq 0$,
- $S(\emptyset) = 0$,
- jestliže $M = M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$,
pak $S(M) = S(M_1) + S(M_2)$.

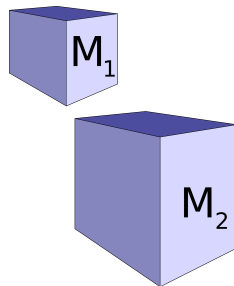


Příklady míry: objem tělesa

Označme objem tělesa M jako $V(M)$.

Pro libovolné těleso M platí:

- $V(M) \geq 0$,
- $V(\emptyset) = 0$,
- jestliže $M = M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$,
pak $V(M) = V(M_1) + V(M_2)$.

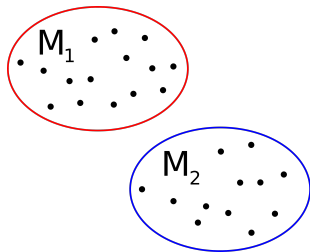


Příklady míry: počet prvků

Označme počet prvků množiny M jako $N(M)$.

Pro libovolnou množinu M platí:

- $N(M) \geq 0$,
- $N(\emptyset) = 0$,
- jestliže $M = M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$,
pak $N(M) = N(M_1) + N(M_2)$.

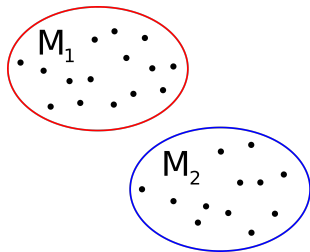


Příklady míry: cena zboží

Označme množinu jednotlivých položek v nákupním košíku jako M a jejich celkovou cenu jako $C(M)$.

Pro libovolnou množinu M platí:

- $C(M) \geq 0$,
- $C(\emptyset) = 0$,
- jestliže $M = M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$,
pak $C(M) = C(M_1) + C(M_2)$.



Společné vlastnosti

Jaké společné vlastnosti mají uvedené příklady měř?

Společné vlastnosti

Jaké společné vlastnosti mají uvedené příklady měř?

Je-li μ obsah plochy / objem tělesa / počet prvků / cena,
pak pro libovolnou množinu M platí:

- $\mu(M) \geq 0$,
- $\mu(\emptyset) = 0$,
- jestliže $M = M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, pak

$$\mu(M) = \mu(M_1) + \mu(M_2).$$

Definice míry (konečně aditivní)

Nechť Ω je libovolná množina a $\mathcal{F}$ je množina podmnožin množiny Ω taková, že

- 1) $\Omega \in \mathcal{F}$,
- 2) pro každou množinu $M \in \mathcal{F}$ platí $\Omega \setminus M \in \mathcal{F}$,
- 3) pro každé $M_1, M_2 \in \mathcal{F}$ platí $M_1 \cup M_2 \in \mathcal{F}$ a $M_1 \cap M_2 \in \mathcal{F}$.

Funkci $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle \cup \{+\infty\}$, pro kterou platí

- 1) $\mu(\emptyset) = 0$,
- 2) pro každé $M_1, M_2 \in \mathcal{F}$, kde $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, platí
$$\mu(M_1 \cup M_2) = \mu(M_1) + \mu(M_2),$$

nazveme **mírou** na algebře množin $\mathcal{F}$.

Pravděpodobnost je míra.

Pravděpodobnost je míra.

Ale na jakých množinách?

Náhodné jevy jako množiny

Množina elementárních jevů Ω - množina všech možných výsledků náhodného pokusu. Výsledkem je vždy právě jeden elementární jev $\omega \in \Omega$.

Náhodné jevy jako množiny

Množina elementárních jevů Ω - množina všech možných výsledků náhodného pokusu. Výsledkem je vždy právě jeden elementární jev $\omega \in \Omega$.

Náhodný jev $A \subset \Omega$.

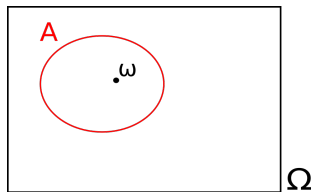
Náhodný jev A **nastal** právě tehdy, když $\omega \in A$.

Náhodné jevy jako množiny

Množina elementárních jevů Ω - množina všech možných výsledků náhodného pokusu. Výsledkem je vždy právě jeden elementární jev $\omega \in \Omega$.

Náhodný jev $A \subset \Omega$.

Náhodný jev A **nastal** právě tehdy, když $\omega \in A$.



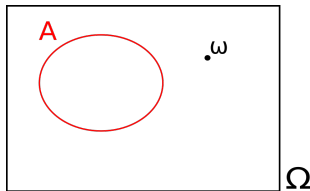
A nastal.

Náhodné jevy jako množiny

Množina elementárních jevů Ω - množina všech možných výsledků náhodného pokusu. Výsledkem je vždy právě jeden elementární jev $\omega \in \Omega$.

Náhodný jev $A \subset \Omega$.

Náhodný jev A **nastal** právě tehdy, když $\omega \in A$.

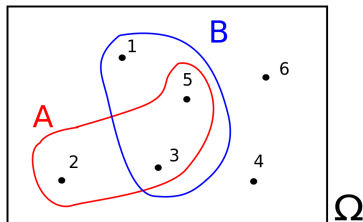


A nenastal.

Náhodný pokus - příklad

Náhodný pokus: hod šestistěnnou kostkou

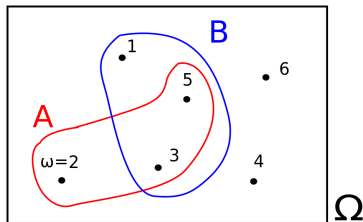
- Množina elementárních jevů $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Náhodný jev **A** ... „Padlo prvočíslo.“
- Náhodný jev **B** ... „Padlo liché číslo.“



Náhodný pokus - příklad

Náhodný pokus: hod šestistěnnou kostkou

- Množina elementárních jevů $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Náhodný jev **A** ... „Padlo prvočíslo.“
- Náhodný jev **B** ... „Padlo liché číslo.“



Výsledek: Padlo číslo 2 (tj. $\omega = 2$). Jev **A** nastal, jev **B** nenastal.

Operace s náhodnými jevy

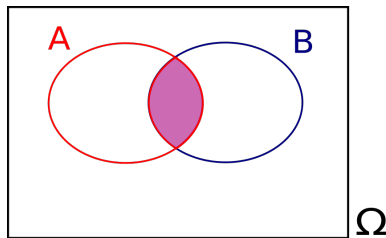
Uvažujme náhodné jevy $A, B \subset \Omega$.

- **Průnik jevů:** $A \cap B \dots$ nastane A **a zároveň** nastane B .
- **Sjednocení jevů:** $A \cup B \dots$ nastane A **nebo** nastane B .
- **Doplňěk jevu:** $\bar{A} = \Omega \setminus A \dots$ **nenastane** A .

Operace s náhodnými jevy

Uvažujme náhodné jevy $A, B \subset \Omega$.

- **Průnik jevů:** $A \cap B \dots$ nastane A **a zároveň** nastane B .
- **Sjednocení jevů:** $A \cup B \dots$ nastane A **nebo** nastane B .
- **Doplňěk jevu:** $\bar{A} = \Omega \setminus A \dots$ **nenastane** A .

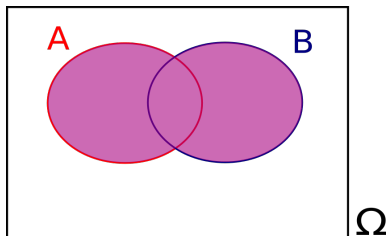


$$A \cap B$$

Operace s náhodnými jevy

Uvažujme náhodné jevy $A, B \subset \Omega$.

- **Průnik jevů:** $A \cap B \dots$ nastane A **a zároveň** nastane B .
- **Sjednocení jevů:** $A \cup B \dots$ nastane A **nebo** nastane B .
- **Doplňěk jevu:** $\bar{A} = \Omega \setminus A \dots$ **nenastane** A .

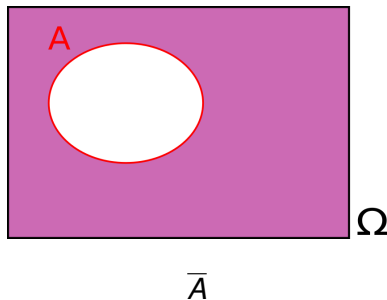


$$A \cup B$$

Operace s náhodnými jevy

Uvažujme náhodné jevy $A, B \subset \Omega$.

- **Průnik jevů:** $A \cap B \dots$ nastane A **a zároveň** nastane B .
- **Sjednocení jevů:** $A \cup B \dots$ nastane A **nebo** nastane B .
- **Doplňěk jevu:** $\bar{A} = \Omega \setminus A \dots$ **nenastane** A .



Pravděpodobnost - definice

Nechť

- Ω je libovolná množina (*množ. elementárních jevů*),
- $\mathcal{F}$ je algebra podmnožin Ω (*náhodné jevy*).

Pravděpodobnost - definice

Nechť

- Ω je libovolná množina (*množ. elementárních jevů*),
- $\mathcal{F}$ je algebra podmnožin Ω (*náhodné jevy*).

Pravděpodobnost

Pravděpodobnost je libovolná míra P definovaná na množině $\mathcal{F}$, pro kterou platí $P(\Omega) = 1$.

Pravděpodobnost - definice

Nechť

- Ω je libovolná množina (*množ. elementárních jevů*),
- $\mathcal{F}$ je algebra podmnožin Ω (*náhodné jevy*).

Pravděpodobnost

Pravděpodobnost je libovolná míra P definovaná na množině $\mathcal{F}$, pro kterou platí $P(\Omega) = 1$.

- Trojici $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nazýváme pravděpodobnostním prostorem.
- Definice udává vlastnosti pravděpodobnosti, ale nedává předpis, jak ji kompletně určit!

Pravděpodobnost - vlastnosti

Uvažujme libovolný pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Pak pro každé náhodné jevy $A, B \in \mathcal{F}$ platí

- $P(A) \in \langle 0, 1 \rangle$,
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Jsou-li $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ navzájem disjunktní, pak

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots P(A_n).$$

Příklad - autobus a vlak

Nastala sněhová kalamita a v takovém případě ze zkušenosti víme, že

- s pravděpodobností 0,4 nejede vlak,
- s pravděpodobností 0,7 nejede autobus,
- a s pravděpodobností 0,2 jede autobus i vlak.

Jaká je pravděpodobnost, že pojede autobus nebo vlak?

Příklad - autobus a vlak (řešení)

Náhodné jevy: A ...jede autobus, V ...jede vlak

Zadáno:

- $P(\overline{V}) = 0,4$
- $P(\overline{A}) = 0,7$
- $P(A \cap V) = 0,2$

Příklad - autobus a vlak (řešení)

Náhodné jevy: $A \dots$ jede autobus, $V \dots$ jede vlak

Zadáno:

- $P(\overline{V}) = 0,4$
- $P(\overline{A}) = 0,7$
- $P(A \cap V) = 0,2$

Pojede autobus nebo vlak $\dots A \cup V$

$$P(A \cup V) = P(A) + P(V) - P(A \cap V)$$

Příklad - autobus a vlak (řešení)

Náhodné jevy: $A \dots$ jede autobus, $V \dots$ jede vlak

Zadáno:

- $P(\overline{V}) = 0,4$
- $P(\overline{A}) = 0,7$
- $P(A \cap V) = 0,2$

Pojede autobus nebo vlak $\dots A \cup V$

$$\begin{aligned} P(A \cup V) &= P(A) + P(V) - P(A \cap V) \\ &= (1 - P(\overline{A})) + (1 - P(\overline{V})) - P(A \cap V) \end{aligned}$$

Příklad - autobus a vlak (řešení)

Náhodné jevy: $A \dots$ jede autobus, $V \dots$ jede vlak

Zadáno:

- $P(\overline{V}) = 0,4$
- $P(\overline{A}) = 0,7$
- $P(A \cap V) = 0,2$

Pojede autobus nebo vlak $\dots A \cup V$

$$\begin{aligned}P(A \cup V) &= P(A) + P(V) - P(A \cap V) \\&= (1 - P(\overline{A})) + (1 - P(\overline{V})) - P(A \cap V) \\&= (1 - 0,7) + (1 - 0,4) - 0,2 \\&= 0,7.\end{aligned}$$

Podmíněná pravděpodobnost

Uvažujme náhodné jevy A, B , kde $P(B) > 0$.

Podmíněná pravděpodobnost jevu A za podmínky B

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

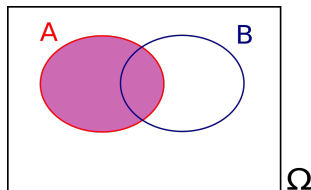
Podmíněná pravděpodobnost

Uvažujme náhodné jevy A, B , kde $P(B) > 0$.

Podmíněná pravděpodobnost jevu A za podmínky B

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$P(A)$ vyjadřuje pr. výskytu jevu A (bez další informace).



Podmíněná pravděpodobnost

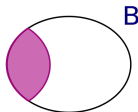
Uvažujme náhodné jevy A, B , kde $P(B) > 0$.

Podmíněná pravděpodobnost jevu A za podmínky B

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$P(A)$ vyjadřuje pr. výskytu jevu A (bez další informace).

$P(A|B)$ vyjadřuje pr. jevu A , **víme-li navíc**, že nastal jev B .



Podmíněná pravděpodobnost - vlastnosti

Nechť $B \in \mathcal{F}$ je náhodný jev takový, že $P(B) > 0$. Pak platí:

- Pro každý jev $A \in \mathcal{F}$: $P(A|B) \geq 0$,
- Jestliže $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ a $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, pak

$$P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B),$$

- $P(\Omega|B) = 1$.

Podmíněná pravděpodobnost - vlastnosti

Nechť $B \in \mathcal{F}$ je náhodný jev takový, že $P(B) > 0$. Pak platí:

- Pro každý jev $A \in \mathcal{F}$: $P(A|B) \geq 0$,
- Jestliže $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ a $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, pak

$$P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B),$$

- $P(\Omega|B) = 1$.

Jinak řečeno: Pro zvolený náhodný jev B je $P(\cdot|B)$ pravděpodobnost.

Podmíněná pravděpodobnost - vlastnosti

Pro libovolné náhodné jevy $A, B \in \mathcal{F}$, kde $P(B) > 0$, platí

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B).$$

Jestliže navíc $P(A) > 0$, pak

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A).$$

Příklad - autobus a vlak (pokračování)

Nastala sněhová kalamita a v takovém případě ze zkušenosti víme, že

- s pravděpodobností 0,4 nejede vlak,
- s pravděpodobností 0,7 nejede autobus,
- a s pravděpodobností 0,2 jede autobus i vlak.

Jaká je pravděpodobnost, že pojede autobus?

Jaká je pravděpodobnost, že pojede autobus, víme-li, že vlak nejede?

Příklad - autobus a vlak (pokračování)

Zadáno: $P(\bar{V}) = 0,4$, $P(\bar{A}) = 0,7$, $P(A \cap V) = 0,2$

Pravděpodobnost, že pojede autobus:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,7 = 0,3.$$

Pravděpodobnost, že pojede autobus, víme-li, že vlak nejede:

$$\begin{aligned} P(A|\bar{V}) &= \frac{P(A \cap \bar{V})}{P(\bar{V})} = \frac{P(A) - P(A \cap V)}{P(\bar{V})} = \\ &= \frac{0,3 - 0,2}{0,4} = 0,25. \end{aligned}$$

Bayesova věta

Pro náhodné jevy A, B , kde $P(A) > 0$ a $P(B) > 0$ platí

Bayesova věta

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})}.$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \\ &= \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})} = \\ &= \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})} \end{aligned}$$

Bayesova věta - využití

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})}$$

- $B, \bar{B} \dots$ předmět zájmu
- $P(B), P(\bar{B}) \dots$ apriorní pravděpodobnosti (počáteční úsudek)

Bayesova věta - využití

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})}$$

- $B, \bar{B} \dots$ předmět zájmu
- $P(B), P(\bar{B}) \dots$ apriorní pravděpodobnosti (počáteční úsudek)
- $A \dots$ pozorování (nastal jev A , dodatečná informace)
- $P(A|B), P(A|\bar{B}) \dots$ model pozorování (jak závisí výskyt A na jevech B a $\bar{B}$)

Bayesova věta - využití

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B) + P(A|\bar{B})P(\bar{B})}$$

- $B, \bar{B}$... předmět zájmu
- $P(B), P(\bar{B})$... apriorní pravděpodobnosti (počáteční úsudek)
- A ... pozorování (nastal jev A , dodatečná informace)
- $P(A|B), P(A|\bar{B})$... model pozorování (jak závisí výskyt A na jevech B a $\bar{B}$)
- $P(B|A)$... posteriorní pravděpodobnost (počáteční úsudek doplněný o dodatečnou informaci)

Příklad - plošný test na COVID-19

Na podzim roku 2020 probíhalo plošné testování na COVID-19 pomocí antigenních testů.

Jaká je pravděpodobnost, že osoba, které vyšel pozitivní test, byla skutečně nakažená?

Příklad - plošný test na COVID-19

Náhodné jevy:

V ... osoba je nakažená

T ... antigenní test je pozitivní

Příklad - plošný test na COVID-19

Náhodné jevy:

V ... osoba je nakažená

T ... antigenní test je pozitivní

$P(V) = 0,007$... 1. 10. 2020 bylo v ČR cca 70000 nakažených

$P(T|V) = 0,94$... senzitivita testu

$P(\bar{T}|\bar{V}) = 0,97$... specificita testu

Příklad - plošný test na COVID-19

Náhodné jevy:

V ... osoba je nakažená

T ... antigenní test je pozitivní

$P(V) = 0,007$... 1. 10. 2020 bylo v ČR cca 70000 nakažených

$P(T|V) = 0,94$... senzitivita testu

$P(\bar{T}|\bar{V}) = 0,97$... specifická testu

$$P(V|T) = \frac{P(T|V)P(V)}{P(T|V)P(V) + P(T|\bar{V})P(\bar{V})} =$$

Příklad - plošný test na COVID-19

Náhodné jevy:

V ... osoba je nakažená

T ... antigenní test je pozitivní

$P(V) = 0,007$... 1. 10. 2020 bylo v ČR cca 70000 nakažených

$P(T|V) = 0,94$... senzitivita testu

$P(\bar{T}|\bar{V}) = 0,97$... specifická testu

$$\begin{aligned} P(V|T) &= \frac{P(T|V)P(V)}{P(T|V)P(V) + P(T|\bar{V})P(\bar{V})} = \\ &= \frac{0,94 \cdot 0,007}{0,94 \cdot 0,007 + (1 - 0,97) \cdot 0,997} \end{aligned}$$

Příklad - plošný test na COVID-19

Náhodné jevy:

V ... osoba je nakažená

T ... antigenní test je pozitivní

$P(V) = 0,007$... 1. 10. 2020 bylo v ČR cca 70000 nakažených

$P(T|V) = 0,94$... senzitivita testu

$P(\bar{T}|\bar{V}) = 0,97$... specifická testu

$$\begin{aligned} P(V|T) &= \frac{P(T|V)P(V)}{P(T|V)P(V) + P(T|\bar{V})P(\bar{V})} = \\ &= \frac{0,94 \cdot 0,007}{0,94 \cdot 0,007 + (1 - 0,97) \cdot 0,997} \doteq 0,18. \end{aligned}$$

Příklad - cílený test na COVID-19

Jaká se změní aposteriorní pravděpodobnost, pokud antigenní test použijeme při cíleném testování u osob s podezřením na COVID? 1. 10. 2020 bylo pozitivních cca 11% z osob s podezřením na COVID.

Příklad - cílený test na COVID-19

Jaká se změní aposteriorní pravděpodobnost, pokud antigenní test použijeme při cíleném testování u osob s podezřením na COVID? 1. 10. 2020 bylo pozitivních cca 11% z osob s podezřením na COVID.

$$P(V) = 0,11$$

$$P(T|V) = 0,94$$

$$P(\bar{T}|\bar{V}) = 0,97$$

Příklad - cílený test na COVID-19

Jaká se změní aposteriorní pravděpodobnost, pokud antigenní test použijeme při cíleném testování u osob s podezřením na COVID? 1. 10. 2020 bylo pozitivních cca 11% z osob s podezřením na COVID.

$$P(V) = 0,11$$

$$P(T|V) = 0,94$$

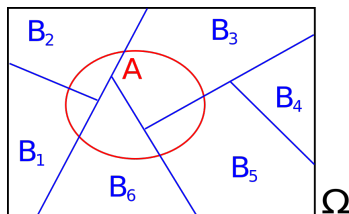
$$P(\bar{T}|\bar{V}) = 0,97$$

$$\begin{aligned} P(V|T) &= \frac{P(T|V)P(V)}{P(T|V)P(V) + P(T|\bar{V})P(\bar{V})} = \\ &= \frac{0,94 \cdot 0,11}{0,94 \cdot 0,11 + (1 - 0,97) \cdot 0,89} \doteq 0,79. \end{aligned}$$

Bayesova věta - zobecnění pro více jevů

Uvažujme náhodné jevy $A, B_1, \dots, B_n$, kde $P(A) > 0$, $P(B_1) > 0, \dots, P(B_n) > 0$ a jevy $B_1, \dots, B_n$ jsou navzájem disjunktní. Pro každý jev B_i pak platí

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_n)P(B_n)}.$$



Odhad velikosti populace (capture-recapture)

N - neznámý (náhodný) počet jedinců v populaci

z - počet označených jedinců (při 1. odchytu)

c - počet odchycených jedinců (při 2. odchytu)

X - počet (náhodný) označených jedinců mezi c odchycenými

Náhodné jevy:

$N = 0, N = 1, \dots, N = n_{max}$ (jevy $B_0, B_1, \dots, B_{n_{max}}$)

$X = x$ (jev A), x je zjištěný počet označených

Apriorní pravděpodobnosti:

$$P(N = 0) = P(N = 1) = \dots = P(N = n_{max}) = \frac{1}{n_{max} + 1}$$

Odhad velikosti populace (capture-recapture)

Model pozorování:

$$P(X = x | N = n) = \frac{\binom{z}{x} \binom{n-z}{c-x}}{\binom{n}{c}}$$

Aposteriorní pravděpodobnosti:

$$P(N = n | X = x) = \frac{P(X = x | N = n)P(N = n)}{\sum_{m=0}^{n_{\max}} P(X = x | N = m)P(N = m)}.$$