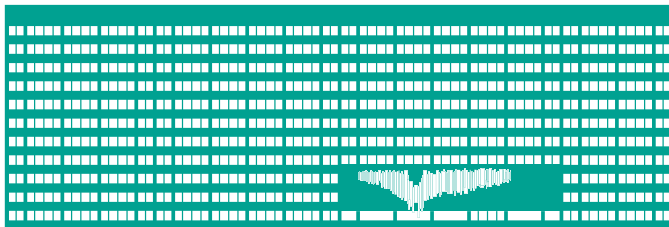


VŠB TECHNICKÁ
UNIVERZITA
OSTRAVA

VSB TECHNICAL
UNIVERSITY
OF OSTRAVA



www.vsb.cz

Hlavy a matematika

Matematický popis hlavy

Petr Kovář

VŠB – Technical University of Ostrava
petr.kovar@vsb.cz

ŠKOMAM, 21. 1. 2026, Ostrava





- 1 Hlavalamy
 - Počítání rozmíchání hlavolamů
 - Zcube
 - Floppy cube
 - Mirror floppy ghost cube
 - Figner cube
- 2 Odvození vlastních algoritmů pro Rubikovu kostku
 - Dvě klíčová pozorování
 - Otočení rohového dílku
 - Otočení hranového dílku
 - Další případy
- 3 (Domino a tetramino)

Část 1. Hlavyolamy



Rubik Ernő, 1974

V první části přednášky



- Značení a zápis tahů

V první části přednášky



- Značení a zápis tahů
- Počty rozmíchání





Různé hlavlomý lze řešit podobně.

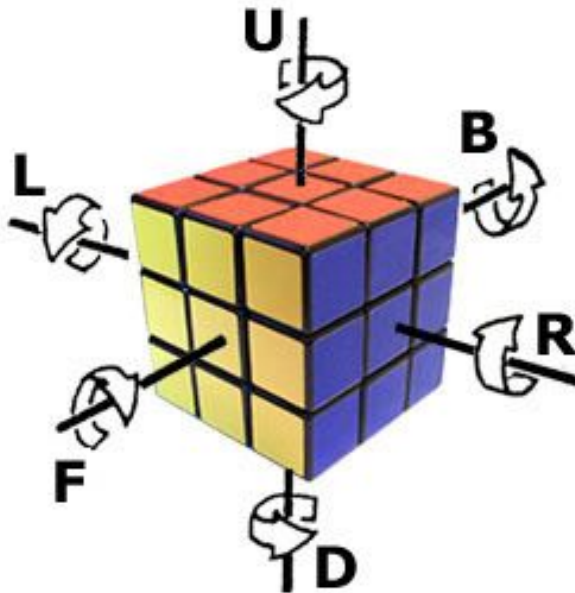
Zápis pohybů Rubikovy kostky (permutace)

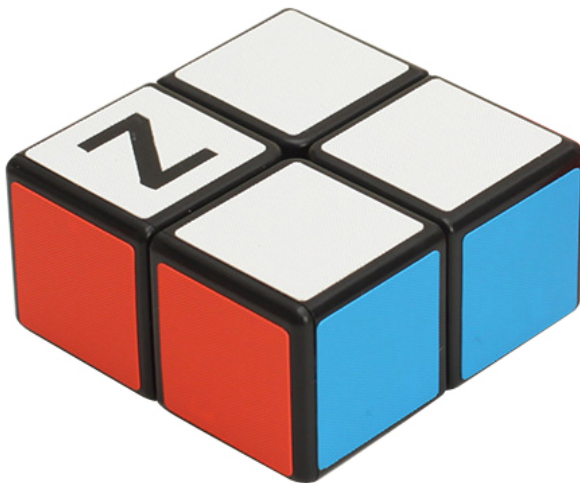
Začneme zlehka



Začneme zlehka







Zcube



Zcube má

- rozměr $1 \times 2 \times 2$,



Zcube má

- rozměr $1 \times 2 \times 2$,
- jen 6 různých rozmíchání,



Zcube má

- rozměr $1 \times 2 \times 2$,
- jen 6 různých rozmíchání,
- „nejsložitější“ rozmíchání vyžaduje pro složení jen 3 tahy,



Zcube má

- rozměr $1 \times 2 \times 2$,
- jen 6 různých rozmíchání,
- „nejsložitější“ rozmíchání vyžaduje pro složení jen 3 tahy,
- extrémně jednoduchý algoritmus na složení – „d'áblův algoritmus“.



Zcube má

- rozměr $1 \times 2 \times 2$,
- jen 6 různých rozmíchání,
- „nejsložitější“ rozmíchání vyžaduje pro složení jen 3 tahy,
- extrémně jednoduchý algoritmus na složení – „d'áblův algoritmus“.

Je to šikovný hlavolam pro ukázkou vlastností a obecného popisu.

Popis tahů Zcube



	1	2	
3	5	6	9
4	7	8	10
	11	12	
	13	14	
	15	16	

Očísľujeme nálepky.

Popis tahů Zcube

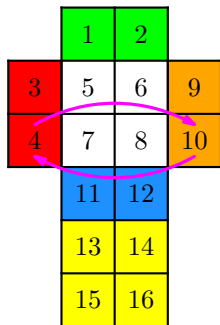


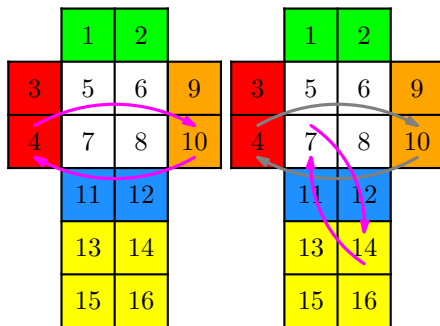
	1	2	
3	5	6	9
4	7	8	10
	11	12	
	13	14	
	15	16	

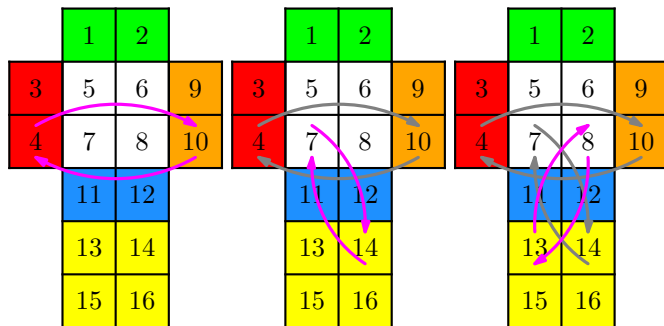
Očísľujeme nálepký.

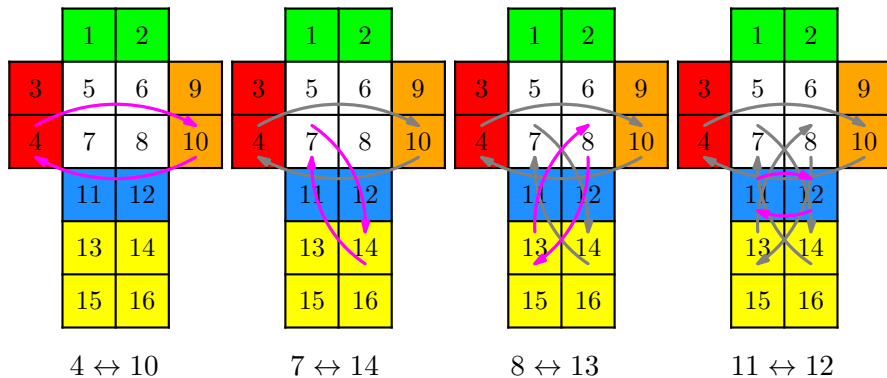
Každý pohyb odpovídá permutaci nálepek.

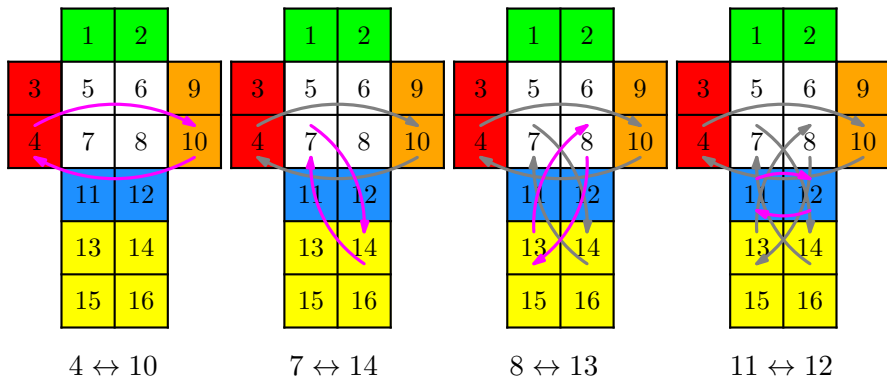
Permutace nakreslíme a zapíšeme.

Otočení přední stěny F 

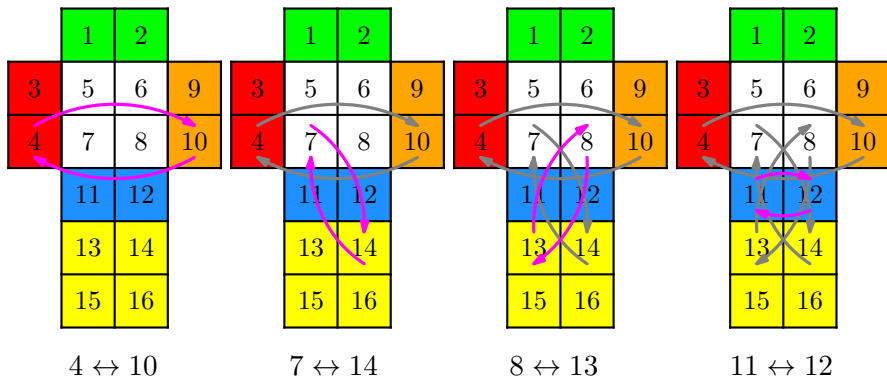
Otočení přední stěny F 

Otočení přední stěny F 

Otočení přední stěny F 

Otočení přední stěny F 

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 & 8 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 10 & 14 & 13 & 4 & 12 & 11 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Otočení přední stěny F 

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 & 8 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 10 & 14 & 13 & 4 & 12 & 11 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$F = (4\ 10)(7\ 14)(8\ 13)(11\ 12)$$

Čtyři základní pohyby



Otočení přední stěny

$$F = (4\ 10)(7\ 14)(8\ 13)(11\ 12),$$

Čtyři základní pohyby



Otočení přední stěny

$$F = (4\ 10)(7\ 14)(8\ 13)(11\ 12),$$

Otočení zadní stěny

$$B = (1\ 2)(3\ 9)(5\ 16)(6\ 15),$$

Čtyři základní pohyby



Otočení přední stěny

$$F = (4\ 10)(7\ 14)(8\ 13)(11\ 12),$$

Otočení zadní stěny

$$B = (1\ 2)(3\ 9)(5\ 16)(6\ 15),$$

Otočení pravé a levé stěny

$$R = (2\ 12)(6\ 14)(8\ 16)(9\ 10),$$

$$L = (1\ 11)(3\ 4)(5\ 13)(7\ 15).$$

Skládání tahů $R \circ F$ 

Dva tahy: otočení přední stěny a potom pravé stěny.



Skládání tahů $R \circ F$

Dva tahy: otočení přední stěny a potom pravé stěny.

Zápis pomocí zobrazení $R \circ F =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 & 9 & 10 & 12 & 14 & 16 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 12 & 14 & 16 & 10 & 9 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 10 & 14 & 13 & 4 & 12 & 11 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 16 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 12 & 9 & 14 & 6 & 13 & 10 & 4 & 2 & 11 & 16 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Skládání tahů $R \circ F$ 

Dva tahy: otočení přední stěny a potom pravé stěny.

Zápis pomocí zobrazení $R \circ F =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 & 9 & 10 & 12 & 14 & 16 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 12 & 14 & 16 & 10 & 9 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 & 7 & 8 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 10 & 14 & 13 & 4 & 12 & 11 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 16 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 12 & 9 & 14 & 6 & 13 & 10 & 4 & 2 & 11 & 16 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Zápis pomocí cyklů

$$\begin{aligned} R \circ F &= (2 \ 12)(6 \ 14)(8 \ 16)(9 \ 10) \circ (4 \ 10)(7 \ 14)(8 \ 13)(11 \ 12) \\ &= (2 \ 12 \ 11)(4 \ 9 \ 10)(6 \ 14 \ 7)(8 \ 13 \ 16). \end{aligned}$$



Zcube

- 4 otočení stěn,
- jen 6 různých rozmíchání (ukážeme za chvíli),
- 24 pokud počítáme převrácení hlavolamu jako další rozmíchání,
- maximálně 3 tahy (pro jediné rozmíchání).



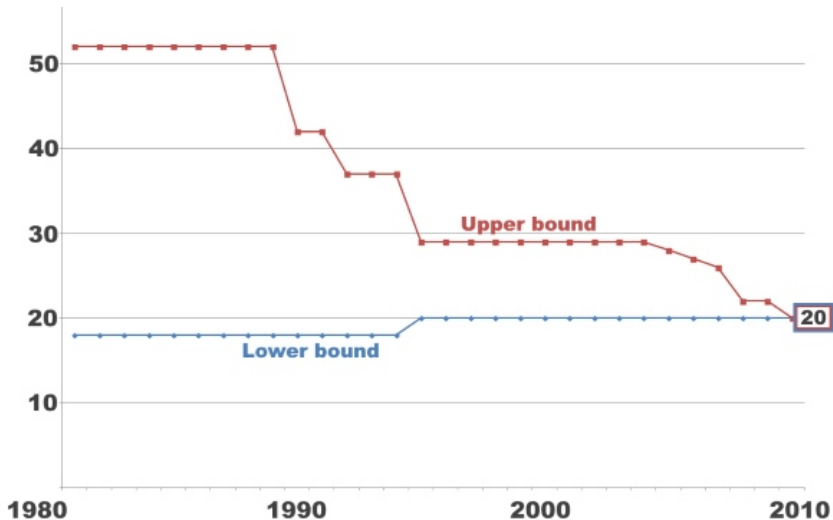
Zcube

- 4 otočení stěn,
- jen 6 různých rozmíchání (ukážeme za chvíli),
- 24 pokud počítáme převrácení hlavalamu jako další rozmíchání,
- maximálně 3 tahy (pro jediné rozmíchání).

Rubikova kostka

- 6 různých otočení,
- 43 252 003 274 489 856 000 různých rozmíchání,
($43 \cdot 10^{18}$, 43 triliónů)
- maximálně 20 tahů má stačit (pro 490 miliónů rozmíchání).

Historie „Božského čísla“



Jak spočítáme, kolik existuje rozmíchání?



Písmeno Z může být pouze

- na horní stěně vlevo vzadu,

Jak spočítáme, kolik existuje rozmíchání?



Písmeno Z může být pouze

- na horní stěně vlevo vzadu,
- na dolní stěně vlevo vpředu,

Jak spočítáme, kolik existuje rozmíchání?



Písmeno Z může být pouze

- na horní stěně vlevo vzadu,
- na dolní stěně vlevo vpředu,
- na dolní stěně vpravo vzadu,

Jak spočítáme, kolik existuje rozmíchání?



Písmeno Z může být pouze

- na horní stěně vlevo vzadu,
- na dolní stěně vlevo vpředu,
- na dolní stěně vpravo vzadu,
- na horní stěně vpravo vpředu.

Jak spočítáme, kolik existuje rozmíchání?



Písmeno Z může být pouze

- na horní stěně vlevo vzadu,
- na dolní stěně vlevo vpředu,
- na dolní stěně vpravo vzadu,
- na horní stěně vpravo vpředu.

Jednotlivé (čtyři) kostky jsou na určené pozici jednoznačně otočeny!

Jak spočítáme, kolik existuje rozmíchání?



Písmeno Z může být pouze

- na horní stěně vlevo vzadu,
- na dolní stěně vlevo vpředu,
- na dolní stěně vpravo vzadu,
- na horní stěně vpravo vpředu.

Jednotlivé (čtyři) kostky jsou na určené pozici jednoznačně otočeny!

Každou kostku můžeme otáčením stěn umístit na **libovolné místo**.
Každá kostka je na takovém místě **jednoznačně otočena**.

Jak spočítáme, kolik existuje rozmíchání?



Písmeno Z může být pouze

- na horní stěně vlevo vzadu,
- na dolní stěně vlevo vpředu,
- na dolní stěně vpravo vzadu,
- na horní stěně vpravo vpředu.

Jednotlivé (čtyři) kostky jsou na určené pozici jednoznačně otočeny!

Každou kostku můžeme otáčením stěn umístit na **libovolné místo**.
Každá kostka je na takovém místě **jednoznačně otočena**.

Permutace 4 kostek dává $P(4) = 4! = 24$ možných „rozmíchání“.

Grafické znázornění 6 rozmíchání



Některá „rozmíchání“ jsou identická (jen otočený hlavolam)

- výchozí stav
- L+R
- F+B
- L+R, pak F+B

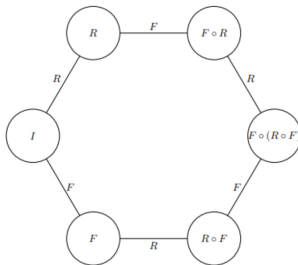
Grafické znázornění 6 rozmíchání



Některá „rozmíchání“ jsou identická (jen otočený hlavolam)

- výchozí stav
- L+R
- F+B
- L+R, pak F+B

Celkem máme $\frac{24}{4} = 6$ různých rozmíchání.



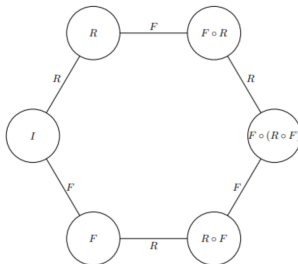
Grafické znázornění 6 rozmíchání



Některá „rozmíchání“ jsou identická (jen otočený hlavolam)

- výchozí stav
- L+R
- F+B
- L+R, pak F+B

Celkem máme $\frac{24}{4} = 6$ různých rozmíchání.



Ďáblovým algoritmem lze kostku dříve nebo později složit.

Grafické znázornění 24 stavů

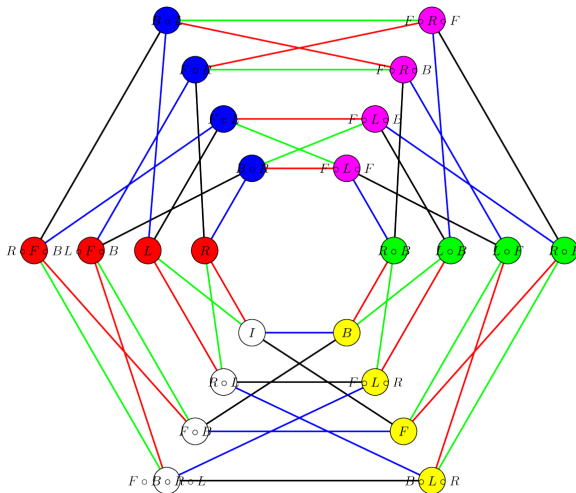


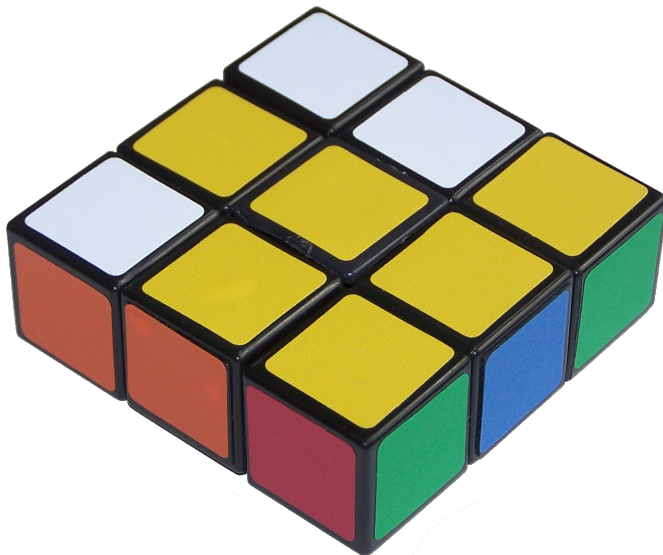
Kombinací otočení všech čtyř stěn až 24 stavů, některé ekvivalentní.

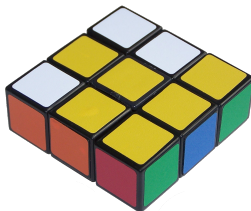
Grafické znázornění 24 stavů



Kombinací otočení všech čtyř stěn až 24 stavů, některé ekvivalentní.

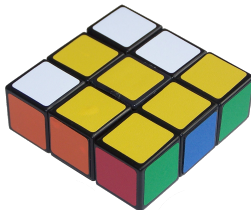


Rubikova kostka $1 \times 3 \times 3$ 



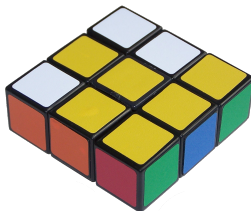
Floppy cube má

- rozměr $1 \times 3 \times 3$,



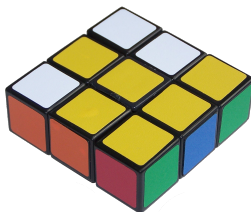
Floppy cube má

- rozměr $1 \times 3 \times 3$,
- středový dílek fixujeme, otáčet lze 4 stěny,



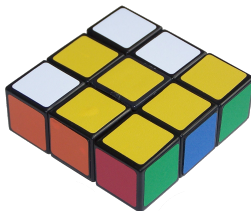
Floppy cube má

- rozměr $1 \times 3 \times 3$,
- středový dílek fixujeme, otáčet lze 4 stěny,
(například F, R, L, B, R, F, B, L)
- rohové dílky nelze na místě otočit (jako Z cube, 24 možností)
na výchozí a protilehlé pozici „stejně“ otočené, na zbylých dvou
„opačně“ otočené.



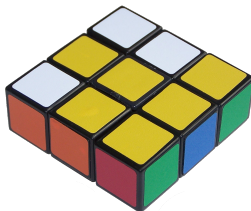
Floppy cube má

- rozměr $1 \times 3 \times 3$,
- středový dílek fixujeme, otáčet lze 4 stěny,
(například F, R, L, B, R, F, B, L)
- rohové dílky nelze na místě otočit (jako Z cube, 24 možností)
na výchozí a protilehlé pozici „stejně“ otočené, na zbylých dvou
„opačně“ otočené.
- hranové dílky lze pouze otočit, navíc v páru ($2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 / 2 = 8$).



Floppy cube má

- rozměr $1 \times 3 \times 3$,
- středový dílek fixujeme, otáčet lze 4 stěny, (například F, R, L, B, R, F, B, L)
- rohové dílky nelze na místě otočit (jako Z cube, 24 možností) na výchozí a protilehlé pozici „stejně“ otočené, na zbylých dvou „opačně“ otočené.
- hranové dílky lze pouze otočit, navíc v páru ($2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 / 2 = 8$). Nezávisle lze otočit 0, 2 nebo 4 hranové dílky, tzv. „sudé permutace“. Legálními tahy nelze otočit pouze lichý počet hranových dílků.



Floppy cube má

- rozměr $1 \times 3 \times 3$,
- středový dílek fixujeme, otáčet lze 4 stěny, (například F, R, L, B, R, F, B, L)
- rohové dílky nelze na místě otočit (jako Z cube, 24 možností) na výchozí a protilehlé pozici „stejně“ otočené, na zbylých dvou „opačně“ otočené.
- hranové dílky lze pouze otočit, navíc v páru ($2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 / 2 = 8$). Nezávisle lze otočit 0, 2 nebo 4 hranové dílky, tzv. „sudé permutace“. Legálními tahy nelze otočit pouze lichý počet hranových dílků.

Celkem $24 \cdot 8 = 192$ různých rozmíchání.

Popis čtyř tahů Floppy cube



	1	2	3	
4	7	8	9	16
5	10	11	12	17
6	13	14	15	18
	19	20	21	
	22	23	24	
	25	26	27	
	28	29	30	

Popis čtyř tahů Floppy cube



	1	2	3	
4	7	8	9	16
5	10	11	12	17
6	13	14	15	18
	19	20	21	
	22	23	24	
	25	26	27	
	28	29	30	

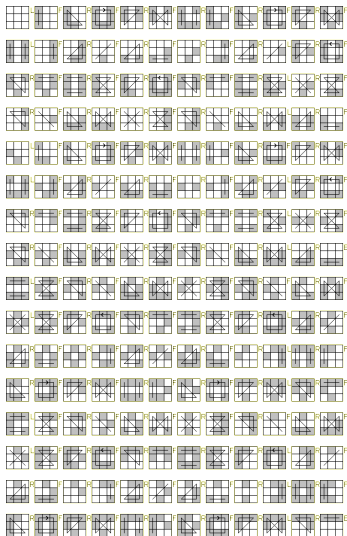
$$F = (6\ 18)(13\ 24)(14\ 23)(15\ 22)(19\ 21),$$

$$B = (1\ 3)(4\ 16)(7\ 30)(8\ 29)(9\ 28),$$

$$L = (1\ 19)(4\ 6)(7\ 22)(10\ 25)(13\ 28),$$

$$R = (3\ 21)(9\ 24)(12\ 27)(15\ 30)(16\ 18).$$

Znázornění všech 192 rozmíchání



Řáblův algoritmus má 192 tahů.

Mirror floppy ghost cube $1 \times 3 \times 3$



Mirror floppy ghost cube má

■ rozměr $1 \times 3 \times 3$,





Mirror floppy ghost cube má

- rozměr $1 \times 3 \times 3$,
- středový dílek fixujeme, otáčen lze 5 stěn,
- rohové dílky lze stěhovat i na místě otočit, $5! = 120$ možností,



Mirror floppy ghost cube má

- rozměr $1 \times 3 \times 3$,
- středový dílek fixujeme, otáčen lze 5 stěn,
- rohové dílky lze stěhovat i na místě otočit, $5! = 120$ možností,
- rohové dílky lze na místě otočit, pouze v páru, $2^5/2 = 16$ možností,



Mirror floppy ghost cube má

- rozměr $1 \times 3 \times 3$,
- středový dílek fixujeme, otáčen lze 5 stěn,
- rohové dílky lze stěhovat i na místě otočit, $5! = 120$ možností,
- rohové dílky lze na místě otočit, pouze v páru, $2^5/2 = 16$ možností,
- hranové dílky lze pouze otočit, nezávisle pouze v páru ($2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2/2 = 16$).

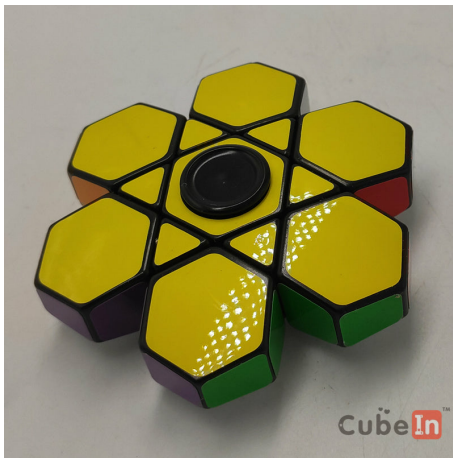


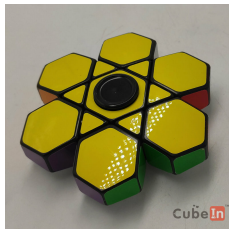
Mirror floppy ghost cube má

- rozměr $1 \times 3 \times 3$,
- středový dílek fixujeme, otáčen lze 5 stěn,
- rohové dílky lze stěhovat i na místě otočit, $5! = 120$ možností,
- rohové dílky lze na místě otočit, pouze v páru, $2^5/2 = 16$ možností,
- hranové dílky lze pouze otočit, nezávisle pouze v páru ($2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2/2 = 16$).

Celkem $120 \cdot 16 \cdot 16 = 30\,720$ různých rozmíchání.

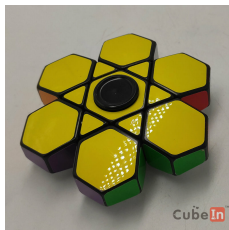
Finger cube





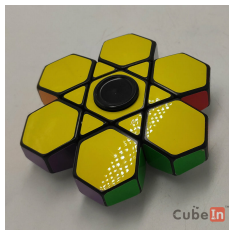
Finger cube má

- tvar květu s 6 lístky a 6 trojúhelníky.



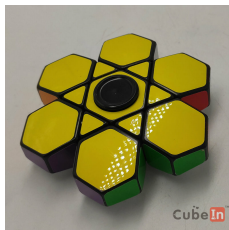
Finger cube má

- tvar květu s 6 lístky a 6 trojúhelníky.
- středový dílek fixujeme, otáčen lze 6 stěn (2 listy a 1 trojúhelník),
- listové dílky lze stěhovat **nelze na místě otočit**, $6! = 720$ možností,



Finger cube má

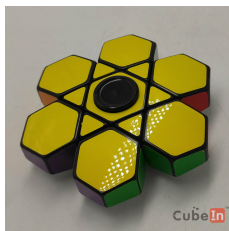
- tvar květu s 6 lístky a 6 trojúhelníky.
- středový dílek fixujeme, otáčen lze 6 stěn (2 listy a 1 trojúhelník),
- listové dílky lze stěhovat **nelze na místě otočit**, $6! = 720$ možností,
- trojúhelníkové dílky **lze na místě otočit**.
Nezávisle pouze v páru, $2^6/2 = 32$ možností.



Finger cube má

- tvar květu s 6 lístky a 6 trojúhelníky.
- středový dílek fixujeme, otáčen lze 6 stěn (2 listy a 1 trojúhelník),
- listové dílky lze stěhovat **nelze na místě otočit**, $6! = 720$ možností,
- trojúhelníkové dílky **lze na místě otočit**.
Nezávisle pouze v páru, $2^6/2 = 32$ možností.

Celkem $720 \cdot 32 = 23\,040$ různých rozmíchání.



Finger cube má

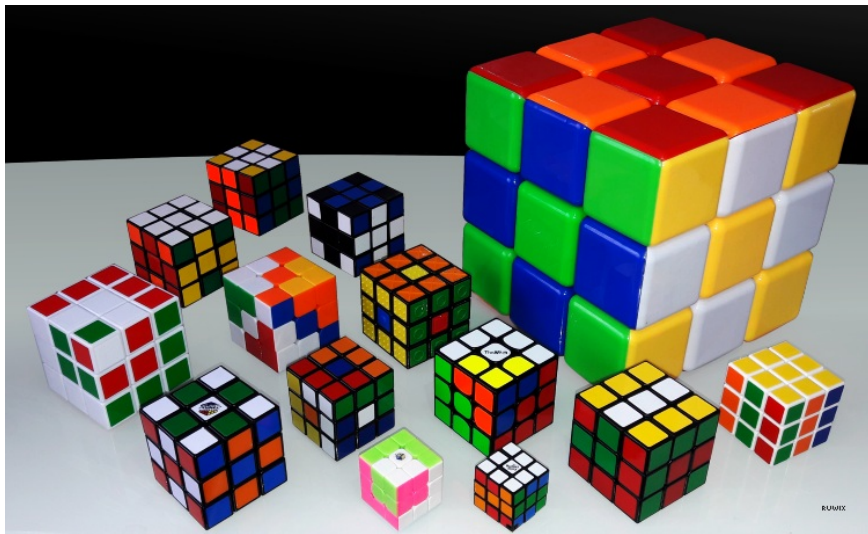
- tvar květu s 6 lístky a 6 trojúhelníky.
- středový dílek fixujeme, otáčen lze 6 stěn (2 listy a 1 trojúhelník),
- listové dílky lze stěhovat **nelze na místě otočit**, $6! = 720$ možností,
- trojúhelníkové dílky **lze na místě otočit**.
Nezávisle pouze v páru, $2^6/2 = 32$ možností.

Celkem $720 \cdot 32 = 23\,040$ různých rozmíchání.

Méně než mirror floppy ghost cube $23\,040 < 30\,720$ rozmíchání.

Skládání Rubikovy kostky

Část 2.
Odvození vlastních algoritmů
(pro Rubikovu kostku a podobné)



Mějme jakoukoliv Rubikovu kostku, tužku a papír.

Předpokládáme

Předpokládáme

- některé z 43 252 003 274 489 856 000 přípustných rozmíchání,



Předpokládáme

- některé z 43 252 003 274 489 856 000 přípustných rozmíchání,



- 6 otočení F, B, R, L, U, D a 6 proti směru F', B', R', L', U', D' ,

Předpokládáme

- některé z 43 252 003 274 489 856 000 přípustných rozmíchání,



- 6 otočení F, B, R, L, U, D a 6 proti směru F', B', R', L', U', D' ,
- umíme **sestavit první vrstvu**.



Náš postup nebude nejrychlejší možný



Náš postup nebude nejrychlejší možný



Nejdůležitější část přednášky



Jak vymyslet vlastní algoritmy?

Dvě klíčová pozorování



První jednoduché(!) pozorování:

Dvě klíčová pozorování



První jednoduché(!) pozorování:

- když provedeme jakoukoliv posloupnost tahů $T_1, T_2, \dots, T_n$,

Dvě klíčová pozorování



První jednoduché(!) pozorování:

- když provedeme jakoukoliv posloupnost tahů $T_1, T_2, \dots, T_n$,
- a potom provedeme **opačnou** posloupnost **opačných** tahů $T'_n, T'_{n-1}, \dots, T'_1$



Dvě klíčová pozorování

První jednoduché(!) pozorování:

- když provedeme jakoukoliv posloupnost tahů $T_1, T_2, \dots, T_n$,
- a potom provedeme **opačnou** posloupnost **opačných** tahů $T'_n, T'_{n-1}, \dots, T'_1$
- dostaneme **výchozí stav**.



Dvě klíčová pozorování

První jednoduché(!) pozorování:

- když provedeme jakoukoliv posloupnost tahů $T_1, T_2, \dots, T_n$,
- a potom provedeme **opačnou** posloupnost **opačných** tahů $T'_n, T'_{n-1}, \dots, T'_1$
- dostaneme **výchozí stav**.

Například: R, F, L, B a potom B', L', F', R' .



Dvě klíčová pozorování

První jednoduché(!) pozorování:

- když provedeme jakoukoliv posloupnost tahů $T_1, T_2, \dots, T_n$,
- a potom provedeme **opačnou** posloupnost **opačných** tahů $T'_n, T'_{n-1}, \dots, T'_1$
- dostaneme **výchozí stav**.

Například: R, F, L, B a potom B', L', F', R' .

Druhé zásadní(!) pozorování:



Dvě klíčová pozorování

První jednoduché(!) pozorování:

- když provedeme jakoukoliv posloupnost tahů $T_1, T_2, \dots, T_n$,
- a potom provedeme **opačnou** posloupnost **opačných** tahů $T'_n, T'_{n-1}, \dots, T'_1$
- dostaneme **výchozí stav**.

Například: R, F, L, B a potom B', L', F', R' .

Druhé zásadní(!) pozorování:

- 1 pokud posloupnost tahů udělá **řízenou** změnu v první vrstvě,



Dvě klíčová pozorování

První jednoduché(!) pozorování:

- když provedeme jakoukoliv posloupnost tahů $T_1, T_2, \dots, T_n$,
- a potom provedeme **opačnou** posloupnost **opačných** tahů $T'_n, T'_{n-1}, \dots, T'_1$
- dostaneme **výchozí stav**.

Například: R, F, L, B a potom B', L', F', R' .

Druhé zásadní(!) pozorování:

- 1 pokud posloupnost tahů udělá **řízenou** změnu v první vrstvě,
- 2 potom **první vrstvu** o kousek pootočíme,



Dvě klíčová pozorování

První jednoduché(!) pozorování:

- když provedeme jakoukoliv posloupnost tahů $T_1, T_2, \dots, T_n$,
- a potom provedeme **opačnou** posloupnost **opačných** tahů $T'_n, T'_{n-1}, \dots, T'_1$
- dostaneme **výchozí stav**.

Například: R, F, L, B a potom B', L', F', R' .

Druhé zásadní(!) pozorování:

- 1 pokud posloupnost tahů udělá **řízenou** změnu v první vrstvě,
- 2 potom **první vrstvu** o kousek pootočíme,
- 3 posloupnost tahů pozpátku udělá opačnou změnu (s jiným dílkem).



Dvě klíčová pozorování

První jednoduché(!) pozorování:

- když provedeme jakoukoliv posloupnost tahů $T_1, T_2, \dots, T_n$,
- a potom provedeme **opačnou** posloupnost **opačných** tahů $T'_n, T'_{n-1}, \dots, T'_1$
- dostaneme **výchozí stav**.

Například: R, F, L, B a potom B', L', F', R' .

Druhé zásadní(!) pozorování:

- 1 pokud posloupnost tahů udělá **řízenou** změnu v první vrstvě,
- 2 potom **první vrstvu** o kousek pootočíme,
- 3 posloupnost tahů pozpátku udělá opačnou změnu (s jiným dílkem).
- 4 Zbývající část kostky se nejprve rozhází (1) a pak složí (3) zpět!



Dvě klíčová pozorování

První jednoduché(!) pozorování:

- když provedeme jakoukoliv posloupnost tahů $T_1, T_2, \dots, T_n$,
- a potom provedeme **opačnou** posloupnost **opačných** tahů $T'_n, T'_{n-1}, \dots, T'_1$
- dostaneme **výchozí stav**.

Například: R, F, L, B a potom B', L', F', R' .

Druhé zásadní(!) pozorování:

- 1 pokud posloupnost tahů udělá **řízenou** změnu v první vrstvě,
- 2 potom **první vrstvu** o kousek pootočíme,
- 3 posloupnost tahů pozpátku udělá opačnou změnu (s jiným dílkem).
- 4 **Zbývající část kostky se nejprve rozhází (1) a pak složí (3) zpět!**

Pár příkladů.

Otočení rohového dílku

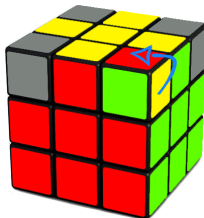


Otočení rohového dílku



Pozor: nelze otočit **jen jeden** rohový dílek, vždy alespoň dva (opačně).

Otočení rohového dílku



Pozor: nelze otočit **jen jeden** rohový dílek, vždy alespoň dva (opačně).

Například (URF) proti směru a (ULF) po směru.

- Otočíme pouze **jediný** dílek v horní vrstvě; libovolný postup, například $R'D'RD R'D'R$.

Otočení rohového dílku



Pozor: nelze otočit **jen jeden** rohový dílek, vždy alespoň dva (opačně).

Například (URF) proti směru a (ULF) po směru.

- Otočíme pouze **jediný** dílek v horní vrstvě; libovolný postup, například $R'D'RD R'D'R$.

Postup si zapíšeme. Rozházání zbývajících vrstev **nevadí**!

Otočení rohového dílku



Pozor: nelze otočit **jen jeden** rohový dílek, vždy alespoň dva (opačně).

Například (URF) proti směru a (ULF) po směru.

- Otočíme pouze **jediný** dílek v horní vrstvě; libovolný postup, například $R'D'RD R'D'R$.
Postup si zapíšeme. Rozházení zbývajících vrstev **nevadí**!
- Pootočíme horní vrstvu v požadovaném směru U , U' nebo $2U$.

Otočení rohového dílku



Pozor: nelze otočit **jen jeden** rohový dílek, vždy alespoň dva (opačně).

Například (URF) proti směru a (ULF) po směru.

- Otočíme pouze **jediný** dílek v horní vrstvě; libovolný postup, například $R'D'RDR'D'R$.
Postup si zapíšeme. Rozházení zbývajících vrstev **nevadí!**
- Pootočíme horní vrstvu v požadovaném směru U , U' nebo $2U$.
- Postup z prvního kroku provedeme pozpátku $R'DRD'R'DR$.

Otočení rohového dílku

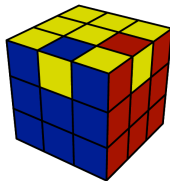


Pozor: nelze otočit **jen jeden** rohový dílek, vždy alespoň dva (opačně).

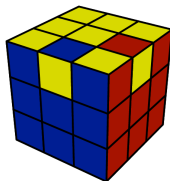
Například (URF) proti směru a (ULF) po směru.

- Otočíme pouze **jediný** dílek v horní vrstvě; libovolný postup, například $R'D'RDR'D'R$.
Postup si zapíšeme. Rozházení zbývajících vrstev **nevadí**!
- Pootočíme horní vrstvu v požadovaném směru U , U' nebo $2U$.
- Postup z prvního kroku provedeme pozpátku $R'DRD'R'DR$.
Rozházení zbývajících vrstev **se opraví**! Zbývá otočit U .

Otočení hranového dílku



Otočení hranového dílku

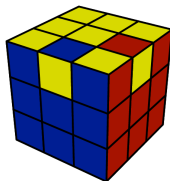


Pozor: opět nelze otočit **jen jeden** hranový dílek.
Vždy **alespoň dva**!

Chceme například otočit (UF) a (UR).

- otočíme (UF); například $RL'F^2R'LDRL'F'R'L$,

Otočení hranového dílku



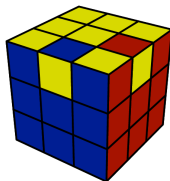
Pozor: opět nelze otočit **jen jeden** hranový dílek.
Vždy **alespoň dva**!

Chceme například otočit (UF) a (UR).

- otočíme (UF); například $RL'F^2R'LDRL'F'R'L$,
- otočíme horní vrstvu ve směru U (otočí se ještě UR)),



Otočení hranového dílku

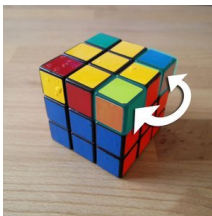


Pozor: opět nelze otočit **jen jeden** hranový dílek.
Vždy **alespoň dva**!

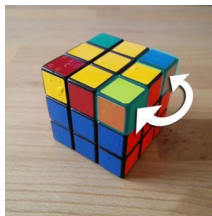
Chceme například otočit (UF) a (UR).

- otočíme (UF); například $RL'F^2R'LDRL'F'R'L$,
- otočíme horní vrstvu ve směru U (otočí se ještě UR),
- postup z prvního kroku pozpátku $L'RF LR'D'L'RF^2LR'U'$.

Prohození dvou rohových dílků



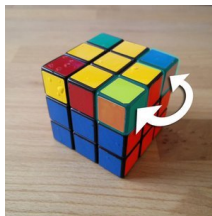
Prohození dvou rohových dílků



Chceme například prohodit (URF) a (URB). Otočení to komplikuje...

- Nějakým postupem prohodíme (URF) a (URB).

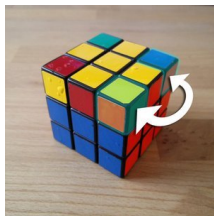
Prohození dvou rohových dílků



Chceme například prohodit (URF) a (URB). Otočení to komplikuje...

- Nějakým postupem prohodíme (URF) a (URB).
- Otočíme horní vrstvu U .

Prohození dvou rohových dílků



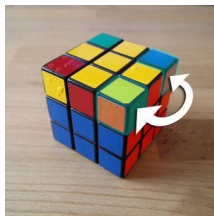
Chceme například prohodit (URF) a (URB). Otočení to komplikuje...

- Nějakým postupem prohodíme (URF) a (URB).
- Otočíme horní vrstvu U .
- Postup z prvního kroku provedeme pozpátku: $(ULF) \leftrightarrow (URF)$.

Celkově prohodí **tři dílky**: (ULF), (URF) a (URB).

- Prohodíme (URF) a (URB); například $B'D'BD'R'DRD^2RD'R'$.

Prohození dvou rohových dílků



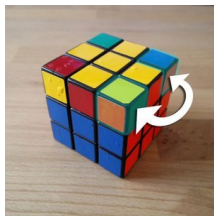
Chceme například prohodit (URF) a (URB). Otočení to komplikuje...

- Nějakým postupem prohodíme (URF) a (URB).
- Otočíme horní vrstvu U .
- Postup z prvního kroku provedeme pozpátku: $(ULF) \leftrightarrow (URF)$.

Celkově prohodí **tři dílky**: (ULF), (URF) a (URB).

- Prohodíme (URF) a (URB); například $B'D'BD'R'DRD^2RD'R'$.
- Otočíme horní vrstvu ve směru U .

Prohození dvou rohových dílků



Chceme například prohodit (URF) a (URB). Otočení to komplikuje...

- Nějakým postupem prohodíme (URF) a (URB).
- Otočíme horní vrstvu U .
- Postup z prvního kroku provedeme pozpátku: $(ULF) \leftrightarrow (URF)$.

Celkově prohodí **tři dílky**: (ULF), (URF) a (URB).

- Prohodíme (URF) a (URB); například $B'D'BD'R'DRD^2RD'R'$.
- Otočíme horní vrstvu ve směru U .
- Postup z prvního kroku pozpátku $RDR'D^2R'D'RDB'DB + U'$.

Podobně další případy



Analogicky:

- prohození hranových dílků,

Podobně další případy



Analogicky:

- prohození hranových dílků,
- otočení středových (nové!) dílků,

Podobně další případy



Analogicky:

- prohození hranových dílků,
- otočení středových (nové!) dílků,
- i další symetrické hlavolamy ...

Podobně další případy



Analogicky:

- prohození hranových dílků,
- otočení středových (nové!) dílků,
- i další symetrické hlavolamy ... (pokud (ne)mění tvar).



Podobně další případy

Analogicky:

- prohození hranových dílků,
- otočení středových (nové!) dílků,
- i další symetrické hlavolamy ... (pokud (ne)mění tvar).

Shrnutí:

- (máme některé z přípustných rozmíchání),



Podobně další případy

Analogicky:

- prohození hranových dílků,
- otočení středových (nové!) dílků,
- i další symetrické hlavolamy ... (pokud (ne)mění tvar).

Shrnutí:

- (máme některé z přípustných rozmíchání),
- umíme popsat přípustné tahy (a můžeme je zapsat),



Podobně další případy

Analogicky:

- prohození hranových dílků,
- otočení středových (nové!) dílků,
- i další symetrické hlavolamy ... (pokud (ne)mění tvar).

Shrnutí:

- (máme některé z přípustných rozmíchání),
- umíme popsat přípustné tahy (a můžeme je zapsat),
- umíme **sestavit první vrstvu** nebo **jistou část hlavolamu**.



Podobně další případy

Analogicky:

- prohození hranových dílků,
- otočení středových (nové!) dílků,
- i další symetrické hlavolamy ... (pokud (ne)mění tvar).

Shrnutí:

- (máme některé z přípustných rozmíchání),
- umíme popsat přípustné tahy (a můžeme je zapsat),
- umíme **sestavit první vrstvu** nebo **jistou část hlavolamu**.

Pak můžeme objevit složitější algoritmy.



Podobně další případy

Analogicky:

- prohození hranových dílků,
- otočení středových (nové!) dílků,
- i další symetrické hlavolamy ... (pokud (ne)mění tvar).

Shrnutí:

- (máme některé z přípustných rozmíchání),
- umíme popsat přípustné tahy (a můžeme je zapsat),
- umíme **sestavit první vrstvu** nebo **jistou část hlavolamu**.

Pak můžeme objevit složitější algoritmy.

Skoro jistě ne nejrychlejší, asi ne elegantní,



Podobně další případy

Analogicky:

- prohození hranových dílků,
- otočení středových (nové!) dílků,
- i další symetrické hlavolamy ... (pokud (ne)mění tvar).

Shrnutí:

- (máme některé z přípustných rozmíchání),
- umíme popsat přípustné tahy (a můžeme je zapsat),
- umíme **sestavit první vrstvu** nebo **jistou část hlavolamu**.

Pak můžeme objevit složitější algoritmy.

Skoro jistě ne nejrychlejší, asi ne elegantní, ale **naše**.

Podobně další případy



Zkuste sami.

Část 2.

Úlohy s dominem, tetraminem, pentominem.

Domino na šachovnici



Na šachovnici s 64 políčky je možno poskládat 32 dominových kostek tak, že pokrývají celou šachovnici. Dílek domina zakryje dvě políčka šachovnice.

Domino na šachovnici



Na šachovnici s 64 políčky je možno poskládat 32 dominových kostek tak, že pokrývají celou šachovnici. Dílek domina zakryje dvě políčka šachovnice.

Nyní z šachovnice odstraníme dvě políčka – dva protilehlé rohy. Opět bychom chtěli pokrýt zbylou část šachovnice dominovými kostkami.

Domino na šachovnici



Na šachovnici s 64 políčky je možno poskládat 32 dominových kostek tak, že pokrývají celou šachovnici. Dílek domina zakryje dvě políčka šachovnice.

Nyní z šachovnice odstraníme dvě políčka – dva protilehlé rohy. Opět bychom chtěli pokrýt zbylou část šachovnice dominovými kostkami.

Otázky:

Domino na šachovnici



Na šachovnici s 64 políčky je možno poskládat 32 dominových kostek tak, že pokrývají celou šachovnici. Dílek domina zakryje dvě políčka šachovnice.

Nyní z šachovnice odstraníme dvě políčka – dva protilehlé rohy. Opět bychom chtěli pokrýt zbylou část šachovnice dominovými kostkami.

Otázky:

- Je možno pokrýt zbylou část šachovnice dominovými kostkami?

Domino na šachovnici



Na šachovnici s 64 políčky je možno poskládat 32 dominových kostek tak, že pokrývají celou šachovnici. Dílek domina zakryje dvě políčka šachovnice.

Nyní z šachovnice odstraníme dvě políčka – dva protilehlé rohy. Opět bychom chtěli pokrýt zbylou část šachovnice dominovými kostkami.

Otázky:

- Je možno pokrýt zbylou část šachovnice dominovými kostkami?
- Pokud ano, jak dominové kostky poskládat?
Pokud ne, dokažte své tvrzení.

Domino na šachovnici



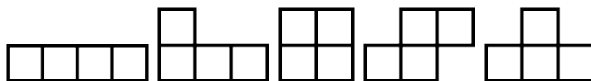
Na šachovnici s 64 políčky je možno poskládat 32 dominových kostek tak, že pokrývají celou šachovnici. Dílek domina zakryje dvě políčka šachovnice.

Nyní z šachovnice odstraníme dvě políčka – dva protilehlé rohy. Opět bychom chtěli pokrýt zbylou část šachovnice dominovými kostkami.

Otázky:

- Je možno pokrýt zbylou část šachovnice dominovými kostkami?
- Pokud ano, jak dominové kostky poskládat?
Pokud ne, dokažte své tvrzení.
- Odstraníme dvě libovolná políčka stejné/různé barvy.
Je možno pokrýt zbylou část šachovnice dominovými kostkami?

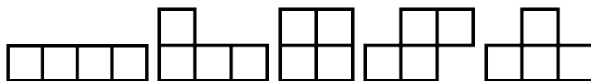
Existuje 5 dílků tetramina (tetris)



5 dílků tetramina.

Máme neomezenou zásobu dílků všech tvarů složených ze čtyř políček šachovnice

Existuje 5 dílků tetramina (tetris)

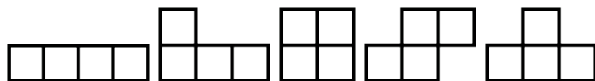


5 dílků tetramina.

Máme neomezenou zásobu dílků všech tvarů složených ze čtyř políček šachovnice

Otázky:

Existuje 5 dílků tetramina (tetris)



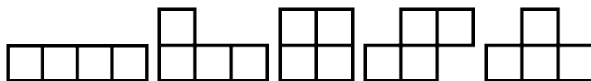
5 dílků teramina.

Máme neomezenou zásobu dílků všech tvarů složených ze čtyř políček šachovnice

Otázky:

- Můžeme pokrýt šachovnici 4×5 políček pěti dílky teramina?

Existuje 5 dílků tetramina (tetris)

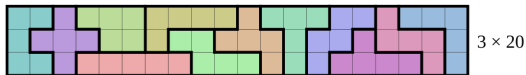
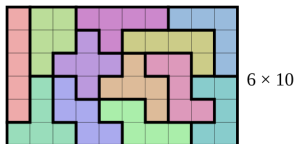


5 dílků teramina.

Máme neomezenou zásobu dílků všech tvarů složených ze čtyř políček šachovnice

Otázky:

- Můžeme pokrýt šachovnici 4×5 políček pěti dílky teramina?
- Pro která n je možno pokrýt šachovnici $n \times n$ dílky ve tvaru "I"?
- Pro která n je možno pokrýt šachovnici $n \times n$ dílky ve tvaru "T"?
- Pro která n je možno pokrýt šachovnici $n \times n$ dílky ve tvaru "L"?
- Pro která n je možno pokrýt šachovnici $n \times n$ dílky ve tvaru "S"?



S 12 dílky pentomina existují desítky/stovky úloh k řešení.



Děkuji za pozornost.

Děkuji za pozornost

Petr Kovář

VŠB – Technical University of Ostrava

petr.kovar@vsb.cz

ŠKOMAM, 21. 1. 2026, Ostrava

VŠB TECHNICKÁ
UNIVERZITA
OSTRAVA