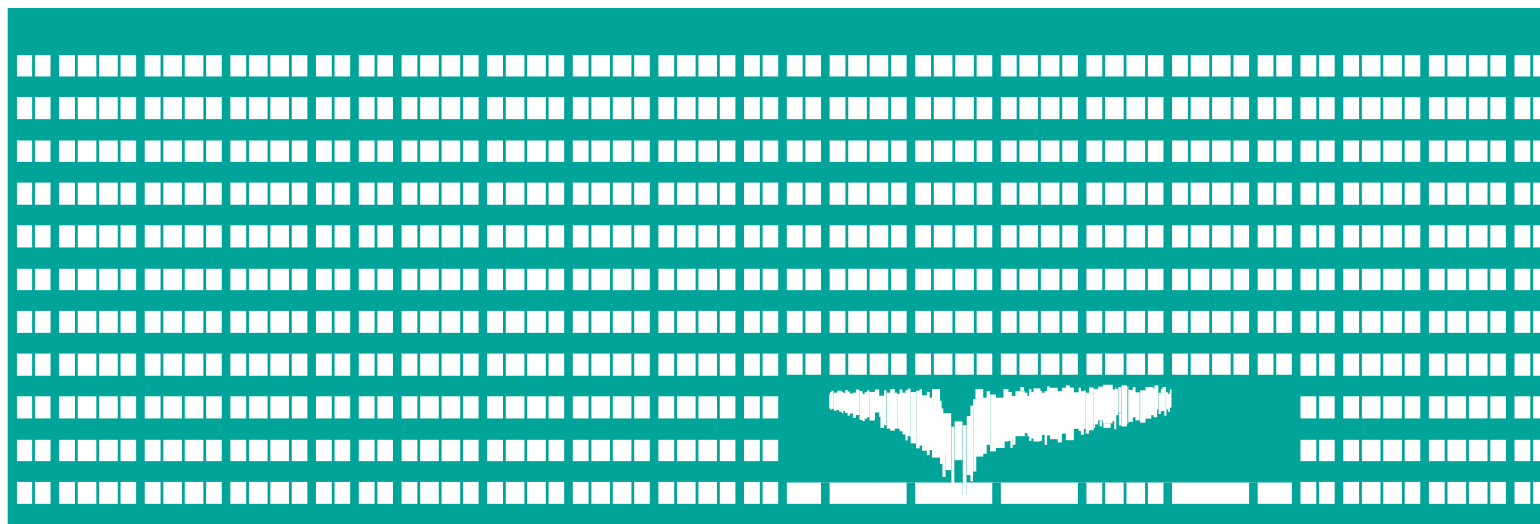


VŠB TECHNICKÁ
UNIVERZITA
OSTRAVA

VSB TECHNICAL
UNIVERSITY
OF OSTRAVA



www.vsb.cz

Metody Monte Carlo

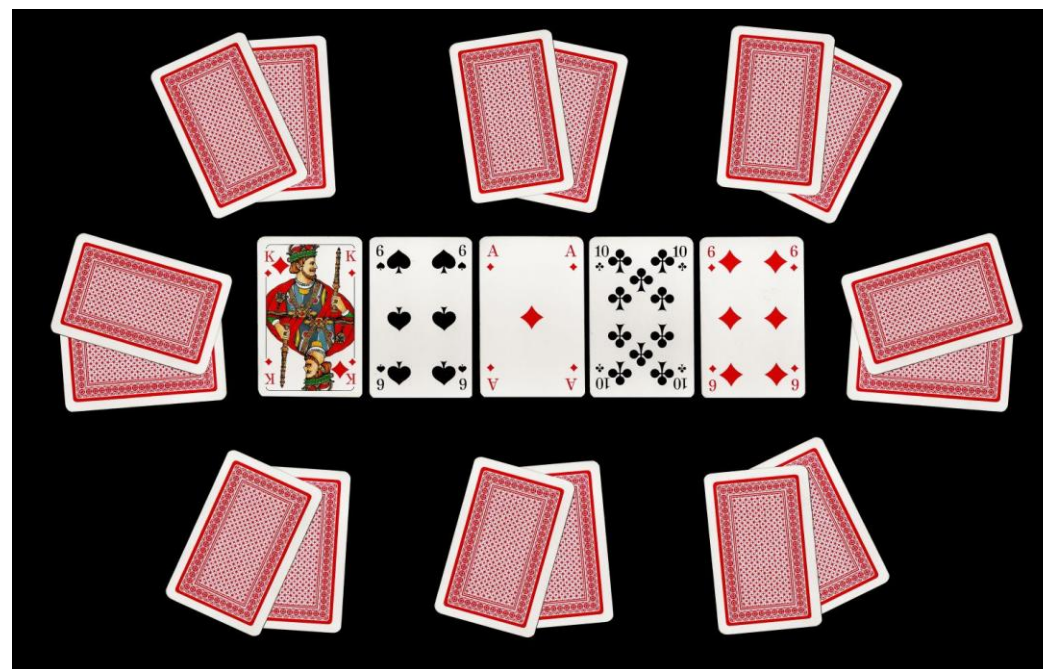
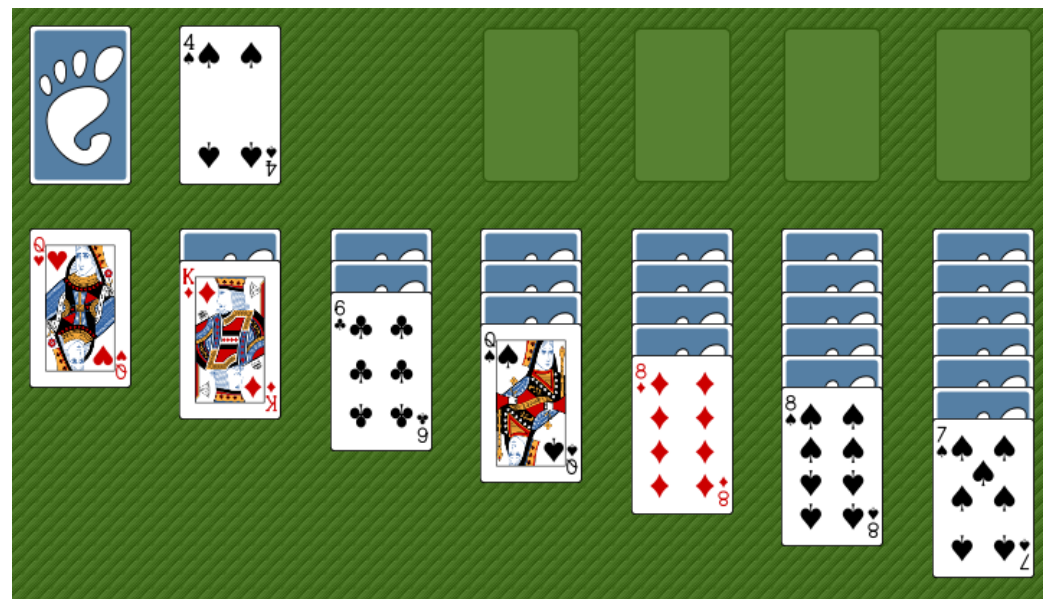
Lukáš Kaperá

Monte Carlo metody - Historie

- Domácí simulace pro odhad pravděpodobnosti náhodné veličiny – rozuměj výhry v kasinu,
 - Typicky v karetních hrách,

Proč zrovna karetní hry?

- Férová ruleta a kostky = čistě náhodné hry,
 - Snadné určení pravděpodobnosti výhry,
- Karetní hry jsou z části dovedností,
 - Rozdání karet je náhodné,
 - herní postup hráče nikoli.



Monte Carlo metody - Současnost

- Soubor numerických metod pro výpočet (odhad) vybraných **určitých integrálů**, které se špatně řeší jiným způsobem
 - **MC metody jsou založeny na statistice,**

Dva úhly pohledu

- **Integrální,**
- **Simulace (pravděpodobnost),**
- Ve skutečnosti jde o stejnou úlohu,
 - Pouze jinak pojatou/pojmenovanou.

Obsah přednášky

- Určitý integrál,
- Obsah rovinné plochy,
- Výpočet ceny opce,
- Praktické ukázky v Pythonu.

Integrální úhel pohledu

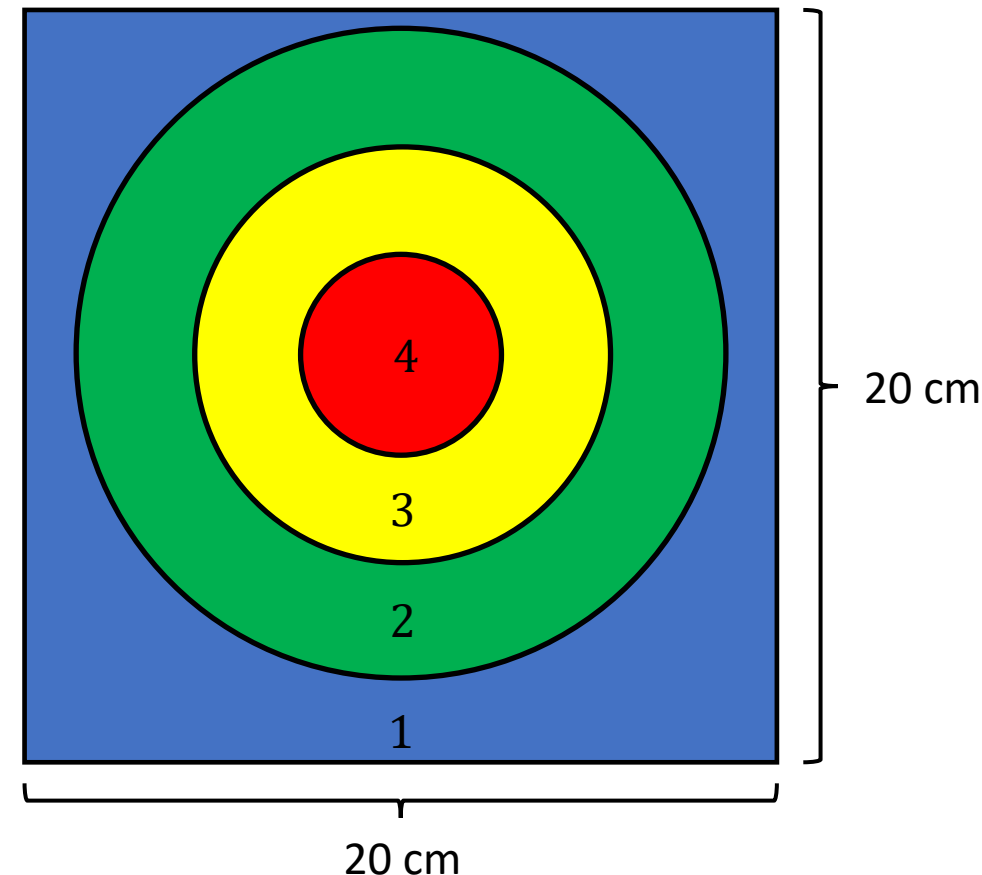
- Náš cíl je určit obsah* jednotlivých barevných částí,

Pravděpodobnostní úhel pohledu

- Jaká je pravděpodobnost, že bez míření trefím šipkou modrou, zelenou, žlutou a červenou oblast?

Klasický přístup

- Čtverec má stranu o délce 20 cm,
- Naměříme zbylé rozměry,
- Určíme obsah* jednotlivých ploch S_1, S_2, S_3 a S_4 ,
- Pravděpodobnost určíme poměrově, $P_i = S_i / S$,
 - $S = 20 \cdot 20 = 400 \text{ cm}^2, i = 1, 2, 3, 4.$



*Určit obsah pro obecnou křivku znamená integrovat, odtud „integrální úhel pohledu“.

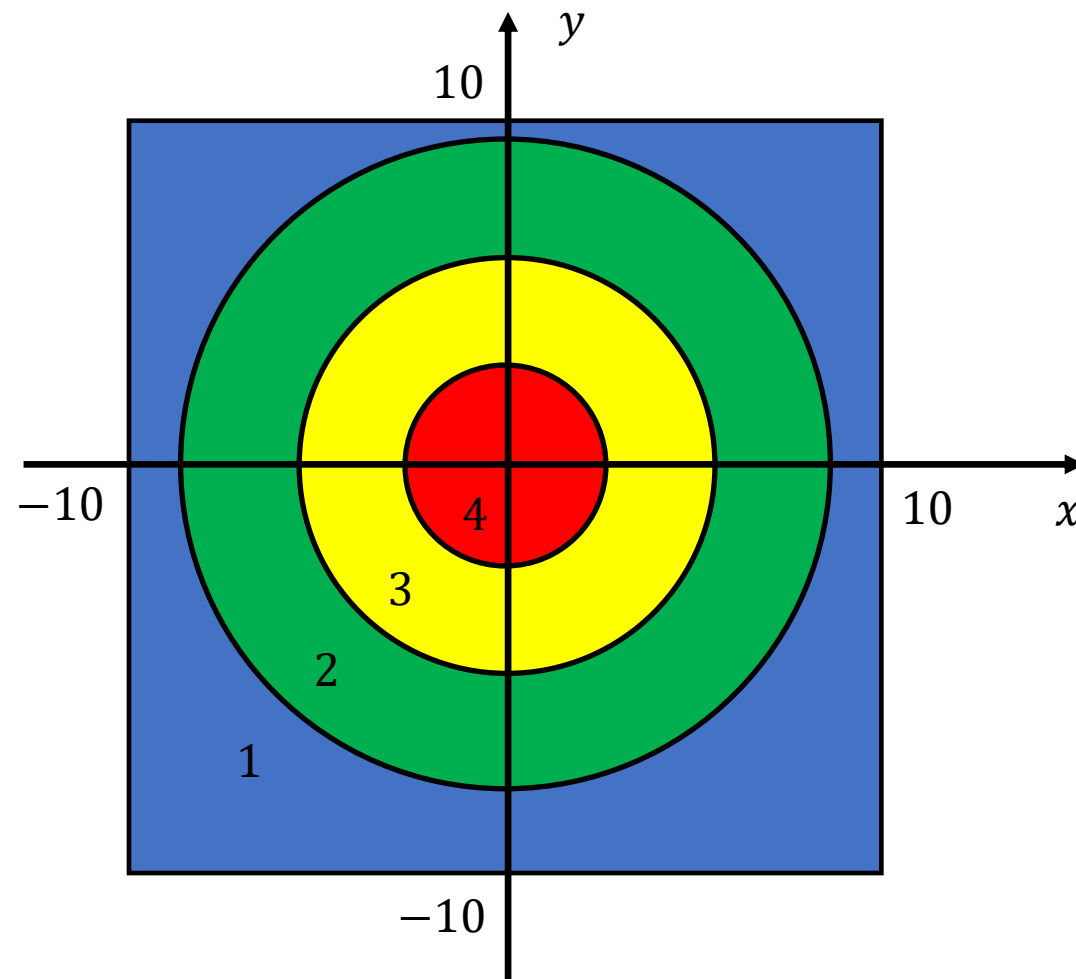
Monte Carlo přístup

- Vytiskneme obrázek v libovolné velikosti,
- Náhodně do něj házíme šípky, nemíříme,
- Celkem hodíme N šipek do terče, z toho N_i šipek v každé barevné oblasti, $i = 1, 2, 3, 4$.

Praktický postup – simulace na počítači

1. Náhodný* vektor dvou spojitých veličin,

- První složka popisuje souřadnici $x \in [-10, 10]$,
- Druhá složka popisuje souřadnici $y \in [-10, 10]$,
- Délka vektoru N odpovídá počtu pokusů,
- Dvojici $(x_j, y_j), j = 1, \dots, N$, nazýváme **vzorek**,
 - Máme tedy celkem N vzorků.



*Každé číslo z intervalu $[-10, 10]$ má stejnou šanci být vybráno $\Rightarrow$ tzv. uniformní rozdělení pravděpodobnosti na intervalu $[-10, 10]$.

2. Známe celkový obsah $S = \sum S_i = 400 \text{ cm}^2$

- Označme $P_i = S_i/S$, pak
- $\sum P_i = \frac{S_1}{S} + \frac{S_2}{S} + \frac{S_3}{S} + \frac{S_4}{S} = \frac{S_1+S_2+S_3+S_4}{S} = 1$,
- $\forall i: P_i \geq 0$, obsah nemůže být záporný,
- Funkce P představuje tzv. **diskrétní distribuci**,
 - $P(i)$ má definiční obor $D_P = \{1, 2, 3, 4\}$,

3. Ohodnocení vzorků pro jednu sérii N vzorků

- Zavedeme čtyři součty F_1, F_2, F_3 a F_4 indexově příslušné barevným oblastem. Všechny součty inicializujeme počáteční hodnotou 0.
- Každý vzorek $(x_j, y_j), j = 1, \dots, N$ představuje bod v obrázku – podle toho, do které oblasti padne, přičteme jedničku do odpovídající sumy F_i .
- Po zpracování N vzorků získáme

$$P_i = \frac{F_i}{N} \Rightarrow S_i = P_i S = 400 P_i (\text{cm}^2).$$

4. Statistické zpracování dat pro

- Celý pokus (měření) opakujeme M krát,
- Nechť $S_{ij}, i = 1,2,3,4, j = 1, \dots, M$, značí obsah plochy S_i v rámci j -tého měření. Určíme
 - **Výběrový průměr** (z M naměřených hodnot)

$$\bar{S}_i := \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M S_{ij} \text{ ,}$$

- **Výběrový rozptyl**

$$s^2(S_i) := \frac{M}{M-1} \left(\overline{S_i^2} - (\bar{S}_i)^2 \right).$$

Monte Carlo určení obsahu ploch $S_{1,2,3,4}$

- Pro **střední hodnotu** obsahů $\langle S_i \rangle$ a příslunou **směrodatnou odchylku** obsahů $\sigma(S_i)$ platí

$$\langle S_i \rangle \pm \sigma(S_i) \cong \bar{S}_i \pm \sqrt{\frac{\overline{S_i^2} - \bar{S}_i^2}{M}}.$$

Populační charakteristiky		Výběrové charakteristiky	
$\langle S_i \rangle$	Střední hodnota	$\bar{S}_i$	Výběrový průměr
$\sigma^2(S_i)$	Rozptyl	$s^2(S_i)$	Výběrový rozptyl
$\sigma(S_i)$	Směrodatná odchylka	$s(S_i)$	Výběrová odchylka

5. Výsledky numerického experimentu pro $M = 10$ (tj. 10 sérií měření)

N	$S_1 [cm^2]$	$S_2 [cm^2]$	$S_3 [cm^2]$	$S_4 [cm^2]$
—	145,531	141,372	84,8230	28,2743
10^1	$168,000 \pm 59,171$	$136,000 \pm 55,884$	$64,000 \pm 47,233$	$32,000 \pm 33,093$
10^2	$133,600 \pm 18,243$	$149,600 \pm 18,232$	$85,600 \pm 15,232$	$31,200 \pm 9,503$
10^3	$144,800 \pm 6,438$	$141,200 \pm 6,830$	$85,040 \pm 5,189$	$29,960 \pm 2,925$
10^4	$145,680 \pm 1,870$	$140,936 \pm 1,914$	$85,060 \pm 1,594$	$28,324 \pm 0,986$
10^5	$145,530 \pm 0,785$	$141,513 \pm 0,5685$	$84,594 \pm 0,344$	$28,362 \pm 0,365$
10^6	$145,551 \pm 0,234$	$141,323 \pm 0,140$	$84,869 \pm 0,168$	$28,278 \pm 0,081$
10^7	$145,526 \pm 0,077$	$141,388 \pm 0,067$	$84,807 \pm 0,046$	$28,280 \pm 0,037$

➖ Přesnější výsledek znamená vyšší výpočetní náročnost

➕ Uvedený výpočet lze velice dobře paralelizovat

Numerická integrace MC

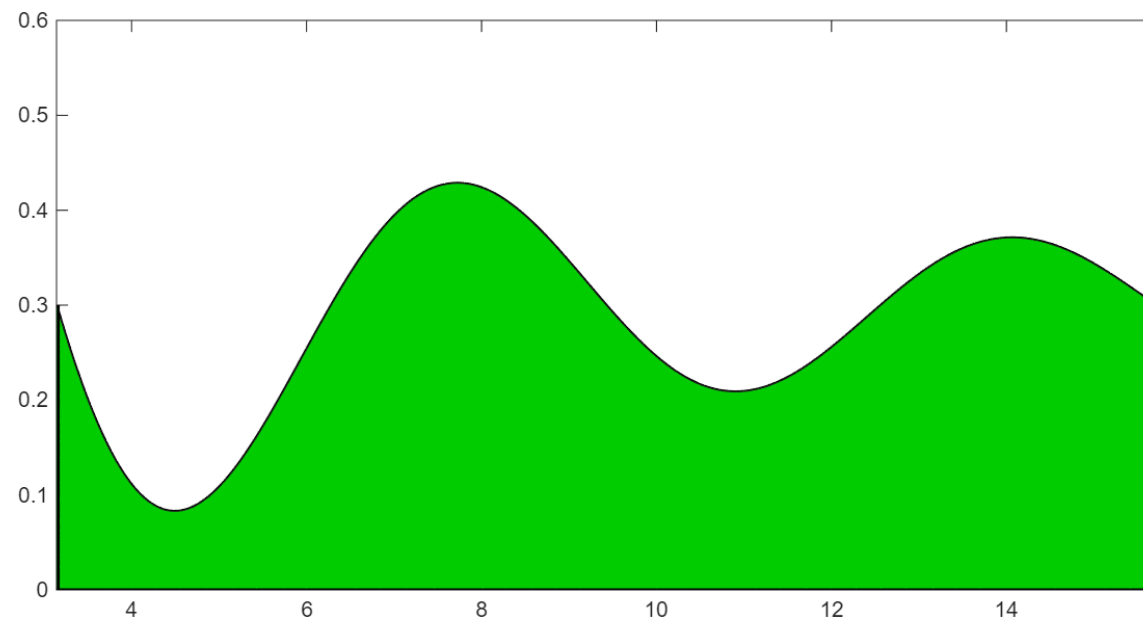
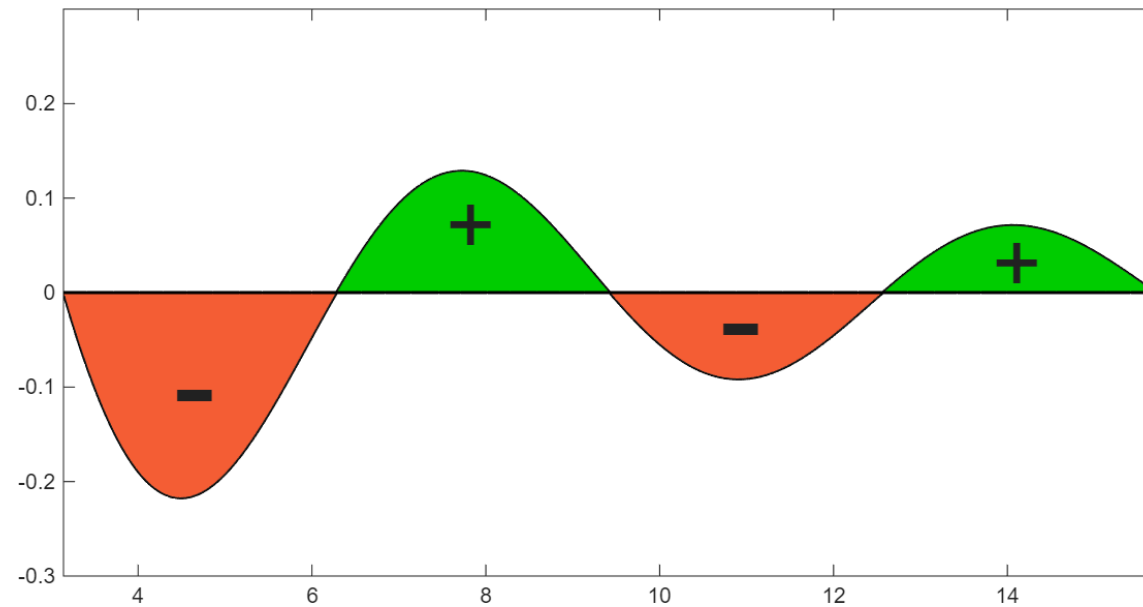
- Chceme spočítat určitý integrál*

$$S = \int_{\pi}^{5\pi} f(x) dx = \int_{\pi}^{5\pi} \frac{\sin x}{x} dx,$$

- Tj. orientovaný obsah vybarvené plochy,
- **Problém:** Integrand nabývá záporných hodnot,
- **Řešení:** Posun integrandu o konstantu tak, aby

$$\forall x \in [\pi, 5\pi] : \frac{\sin x}{x} + c \geq 0,$$

*Nelze vyjádřit analyticky (vyšší transcendentní funkce).



- Zvolme například $c = 0.3$, pak

$$S = \int_{\pi}^{5\pi} f(x) dx = \int_{\pi}^{5\pi} \frac{\sin x}{x} dx,$$

$$S_{\text{new}} = S + \int_{\pi}^{5\pi} c dx = S + \int_{\pi}^{5\pi} 0.3 dx = S + [0.3x]_{\pi}^{5\pi} = S + 0.3(5\pi - \pi) = S + 1.2\pi,$$

$$\int_{\pi}^{5\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\pi}^{5\pi} 0.3 dx = \int_{\pi}^{5\pi} \left(\frac{\sin x}{x} + 0.3 \right) dx = S_{\text{new}}$$

$\Rightarrow$

$$S = S_{\text{new}} - 1.2\pi = \int_{\pi}^{5\pi} \left(\frac{\sin x}{x} + 0.3 \right) dx - 1.2\pi.$$

- Určitý integrál

$$S_{\text{new}} = \int_{\pi}^{5\pi} \left(\frac{\sin x}{x} + 0.3 \right) dx$$

Vypočteme metodou Monte Carlo,

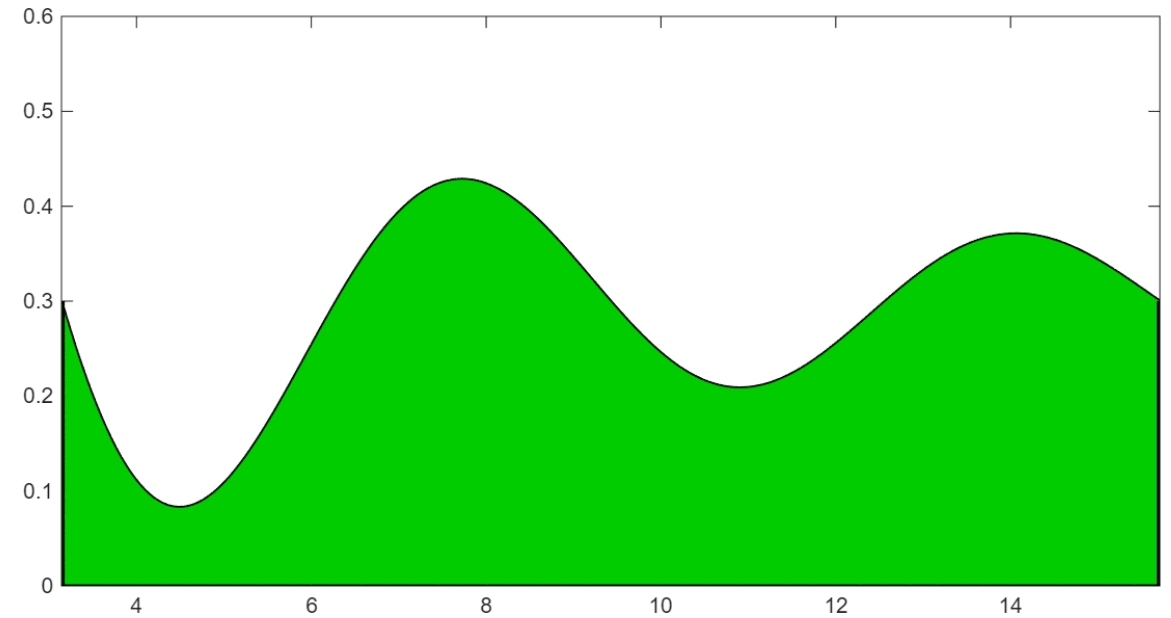
- Zvolme

$$S_{\text{tot}} = 4\pi \cdot 0.6 = 2.4\pi,$$

- Pak pro N vzorků získáme

$$\frac{S_{\text{new}}}{S_{\text{tot}}} = \frac{F_{\text{green}}}{N} \Rightarrow S_{\text{new}} = S_{\text{tot}} \frac{F_{\text{green}}}{N} \Rightarrow S = S_{\text{new}} - 1.2\pi = S_{\text{tot}} \frac{F_{\text{green}}}{N} - 1.2\pi,$$

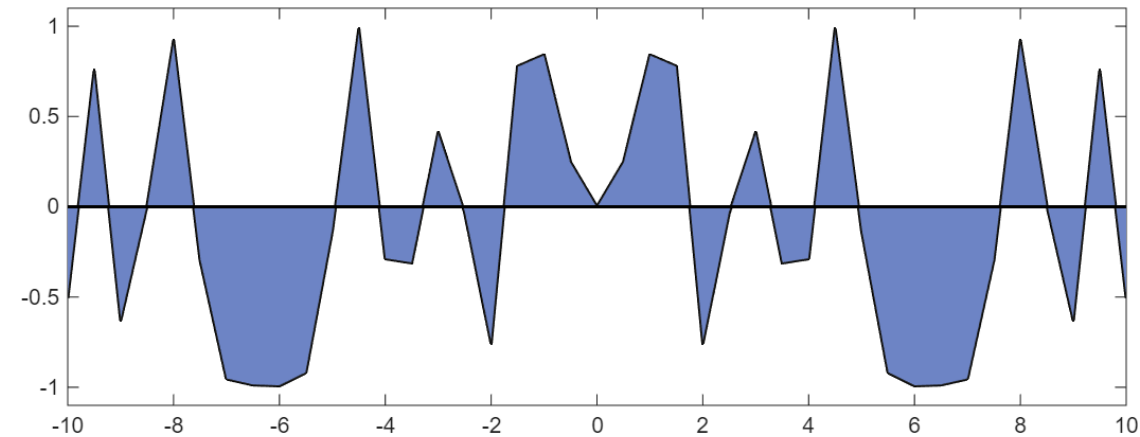
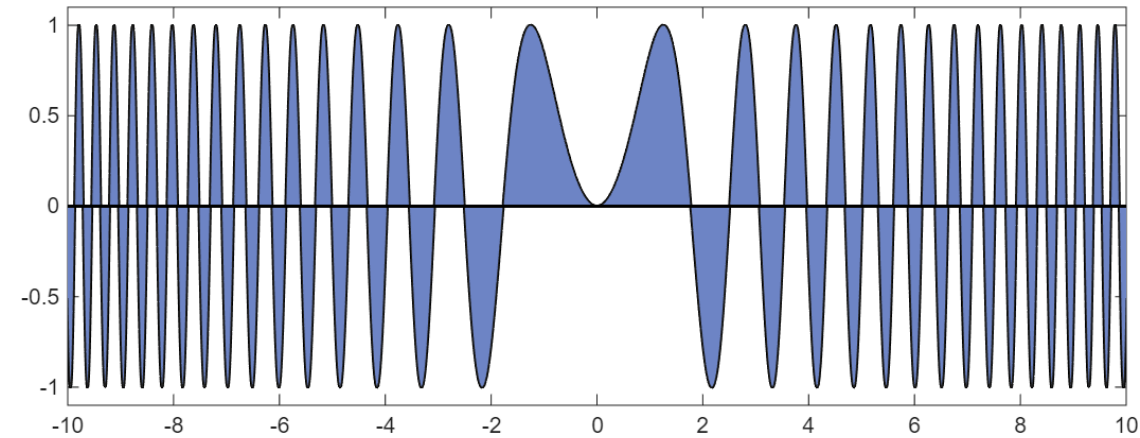
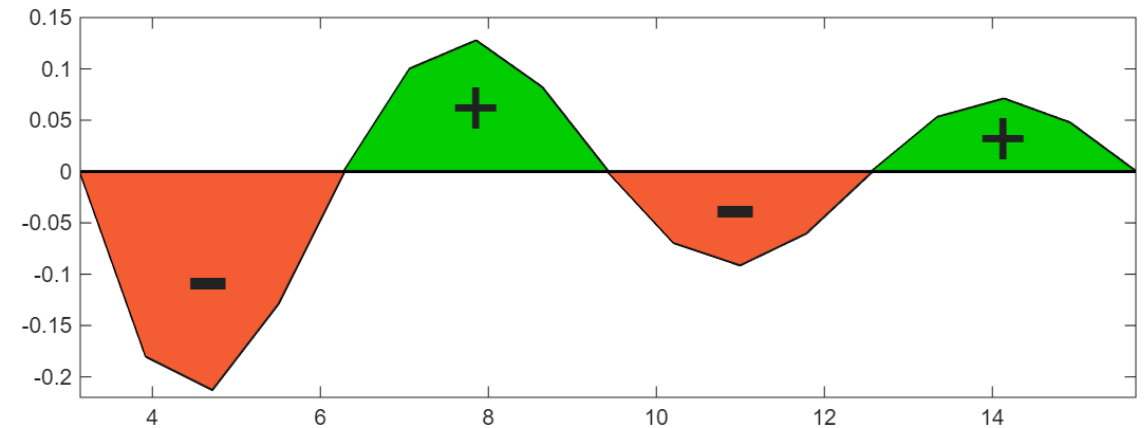
- Kde F_{green} značí počet vzorků, které „padly“ do zelené oblasti.



- Minulý integrál by šel numericky dobře určit pomocí lichoběžníkové metody,
- Ale co integrály

$$S(t) = \int_0^t \sin(v^2) dv, \quad C(t) = \int_0^t \cos(v^2) dv ?$$

- Jedná se Fresnelovy integrály, které opět nelze vyjádřit analyticky (vyšší transcendentní funkce),
- Zde numerická aproximace lichoběžníkovou metodou s ekvidistantním dělením intervalu je nepoužitelná,
- **Řešením je Monte Carlo integrace.**



Fresnelovy integrály a Eulerova spirála

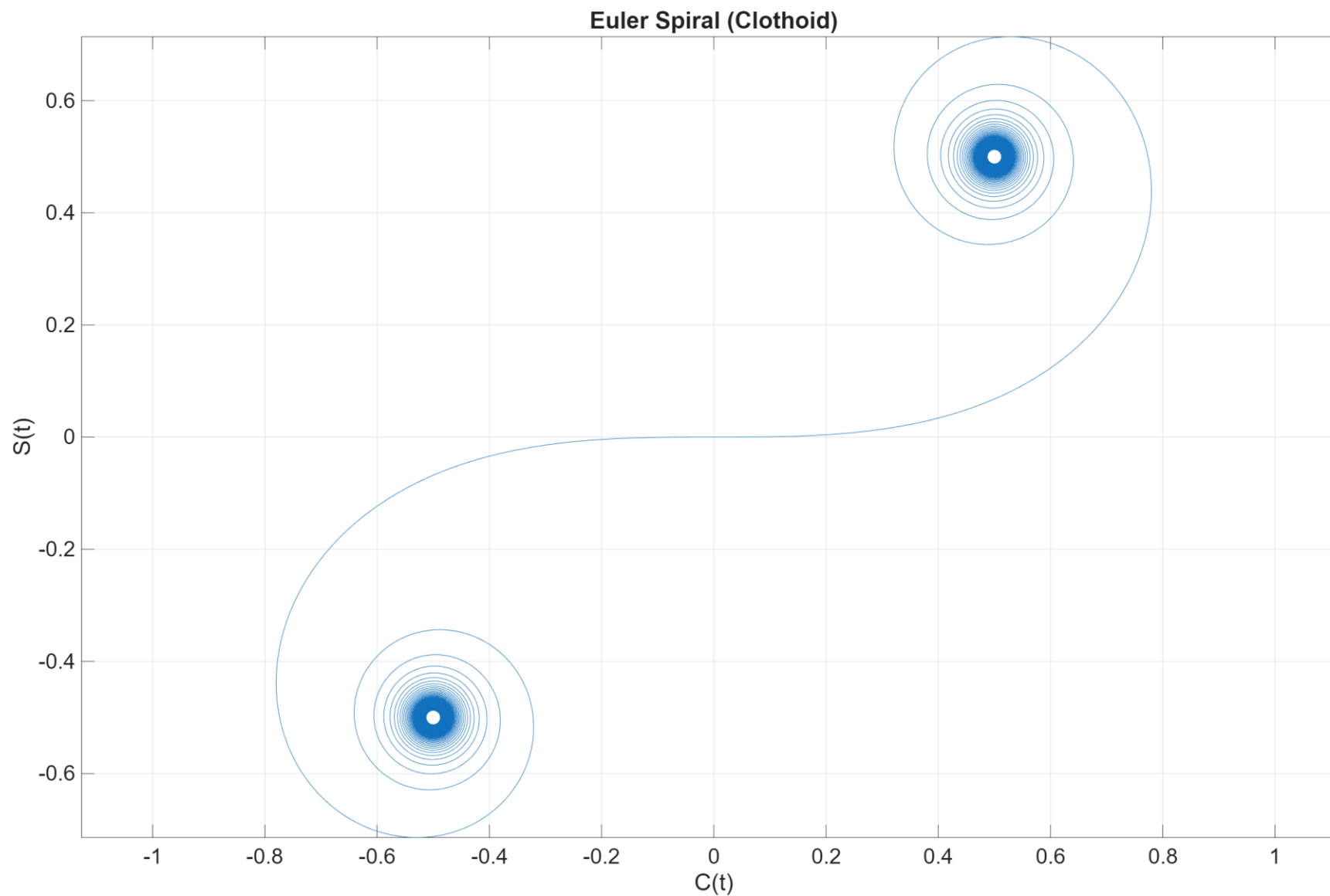
- Nechť (Normalizované Fresnelovy integrály)

$$S(t) = \int_0^t \sin\left(\frac{\pi v^2}{2}\right) dv, \quad C(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{\pi v^2}{2}\right) dv,$$

- Uvažujme parametrickou křivku
 - $x(t) = C(t)$,
 - $y(t) = S(t)$.
- Uvedená křivka se nazývá Eulerova spirála,
 - Délka křivky $l(0 \rightarrow t) = t$,
 - Projektování spojek dálnic a železnic,
 - Smyčky horské dráhy.



Fresnelovy integrály a Eulerova spirála



Výpočet ceny opce

- **Opce** je právo něco (akcie, komodity) koupit nebo prodat
 - V přesně daný okamžik v budoucnu (expirace opce),
 - Za předem danou cenu (strike price, realizační cena),
 - Vztahuje se vždy na konkrétní množství komodity,
 - Právo nákupu neznamená povinnost nákupu.
- **Call opce** je právo nákupu za danou cenu,
 - Protistrana musí prodat,
- **Put opce** je právo prodeje za danou cenu,
 - Protistrana musí koupit,
- Kryté vs. nekryté (spekulativní) opce.
- **Vypisování opcí** je licencovaná činnost,
 - Vysoce rizikové,
- **Kupovat opce** může prakticky kdokoli *poučený*,
 - Rizikové.
- **Nákup akcií a komodit** odpovídá sázce na jejich dlouhodobý růst (matematicky střední hodnota ziskovosti),
- **Nákup opcí** odpovídá sázce na jejich krátkodobý růst (call) nebo pokles (put), vychází z volatility (matematicky směrodatná odchylka ziskovosti),

Ukázka významu opcí

- **Call opce** (sázka na budoucí růst)
 - Aktuální cena akcie: $S_0 = 40$ €,
 - Garantovaná nákupní cena: $K = 42$ €,
 - Počet akcií: $N = 100$,
 - Doba opce jeden rok: $T = 1$,
 - Cena opce: $P = 300$ €, tj. $p = 3$ €/akcie,
- **Aktuální cena akcie S_T v čase expirace opce je nižší nebo stejná než garantovaná nákupní cena K**
 - Opci nevyužiji,
 - Přicházím o 300 €.
- **Aktuální cena S_T je vyšší než cena K daná opcí**

⇒ Opci využiji

 - Moje obchodní bilance je dána vztahem

$$Z = N(S_T - K) - P = 100(S_T - 42) - 300,$$
 - $S_T = 44$ € $\Rightarrow Z = 100(44 - 42) - 300 = -100$ €,
 - $S_T = 45$ € $\Rightarrow Z = 100(45 - 42) - 300 = 0$ €,
 - $S_T = 46$ € $\Rightarrow Z = 100(46 - 42) - 300 = +100$ €,
 - $S_T = 55$ € $\Rightarrow Z = 100(55 - 42) - 300 = +1000$ €,
 - Maximální prodělek je dán cenou opce, maximální zisk je teoretický neomezený.
 - **Numusím disponovat cenou akcií.**

Výpočet ceny opce

- Opčně nemusíme kupovat nebo prodávat pouze akcie,
- Opce lze použít jako pojistku proti výkyvům cen
 - Obchodovatelných komodit,
 - Zahraničních měn.
- **To hlavní se ukrývá v ceně opce!**
- **Začněme několika termíny**
 - **Drift r** je střední hodnota relativního výnosu,
 - Za dané období (30 dní, 90 dní, rok,...),
 - Funguje podobně jako roční úroková sazba,
 - Dominuje z dlouhodobého hlediska,
 - Dlouhodobé opce (rok a výše),

- **Volatilita σ** je směrodatná odchylka driftu r
 - Za stejné období jako drift r ,
 - 1 obchodní rok má přibližně 252 dní,

$$\sigma_{den} = \frac{\sigma_{rok}}{\sqrt{252}}$$

- Dominuje z krátkodobého hlediska,
 - Krátkodobé opce (dny a měsíce),
- **Pro drift i volatilitu společně platí**
 - Udávají se v procentech %,
 - Při výpočtech dosadíme $r, \sigma/100$,
 - Pro minulost vypočteme,
 - Pro budoucnost odhadujeme.

- **Historický výnos můžeme matematicky vyjádřit**

$$z = r \pm \sigma.$$

- **Budoucí predikce** (Brownův model)

$$S_T = S_0 \underbrace{e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}}_{\text{drift}} \underbrace{e^{\sigma Z\sqrt{T}}}_{\text{volatilita}},$$

- **Z** je náhodné číslo z normovaného normálního rozdělení

- $N(0,1), \mu = 0, \sigma = \sigma^2 = 1,$

- Simuluje náhodné chování trhu pro jeden scénář,

- **T** je čas do expirace opce,

- **S_0** je aktuální cena akcie,

- **S_T** je cena očekávaná v momentě expirace opce,

- **Chování trhu** simulujeme pro různé náhodné scénáře,

- Zastoupeno náhodnou volbou Z ,

- Celkový počet simulací je n ,

- Chyba klesá s rostoucím počtem simulací $\frac{1}{\sqrt{n}}$,

- **Zadání příkladu**

- $S_0 = 100$ € (aktuální cena),

- $K = 105$ € (realizační cena),

- $T = 0.25$ (90 dní),

- $r = 0.05$ (drift),

- $\sigma = 0.20$ (volatilita),

- $n = 100000 = 10^6$ (počet simulací).

Výpočet ceny opce

```
import numpy as np

# Parametry
S0 = 100          # Aktuální cena akcie
K = 105           # Strike cena (realizační cena)
T = 0.25          # Čas do splatnosti (3 měsíce = 0.25 roku)
r = 0.05          # Roční Drift(5 %)
sigma = 0.20      # Roční volatilita (20 %)
n_simulations = 100000

# 1. Generování náhodných šoků
z = np.random.standard_normal(n_simulations)

# 2. Výpočet koncových cen ST
# Všimni si, že T figuruje v driftu i v části s volatilitou
ST = S0 * np.exp((r - 0.5 * sigma**2) * T + sigma * np.sqrt(T) * z)

# 3. Výpočet výplaty (payoff)
# Výplata je max(S_T - K, 0)
payoffs = np.maximum(ST - K, 0)

# 4. Průměr a diskontování k dnešku
option_price = np.exp(-r * T) * np.mean(payoffs)

print(f"Odhadovaná cena evropské call opce (T=0.25): {option_price:.2f} €")
```

Opce roční, $r = 0.05$, $\sigma = 0.20$

- 8.03 € /akcie,

Opce roční, $r = 0.05$, $\sigma = 0.50$

- 19.85 € /akcie,

Opce roční, $r = 0.02$, $\sigma = 0.10$

- 2.75 € /akcie,

Opce 90 dní, $r = 0.05$, $\sigma = 0.20$

- 2.46 € /akcie,

Opce 90 dní, $r = 0.05$, $\sigma = 0.50$

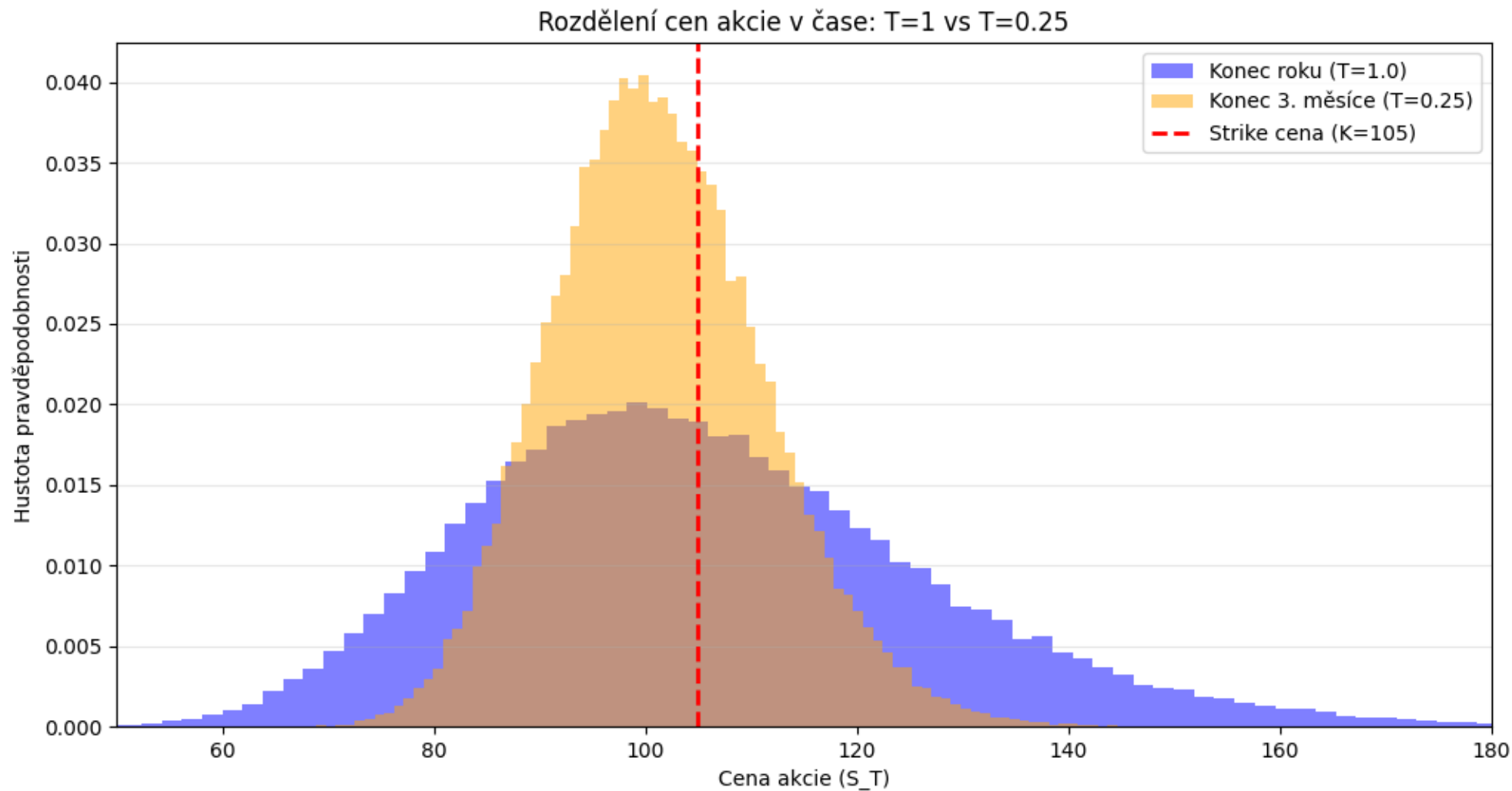
- 8.40 € /akcie,

Opce 90 dní, $r = 0.02$, $\sigma = 0.10$

- 0.54 € /akcie,

*Kód generoval Google Gemini.

Srovnání roční a 90-denní opce, $r = 0.05, \sigma = 0.20$



Pojištění kurzu EUR/CZK

- Pojišťujeme cenu EUR vůči CZK,
- Kladný drift $r > 0$ znamená,
že cena eura v korunách rostla,
- Jak zjistit drift a volatilitu za poslední rok?
- Volatilita $\sigma = 2.58 \%$,
- Roční drift $r = -3.91 \%$,
- $S_0 = 24.264099$ CZK,
- Dosadíme do předchozího kódu,
- **Opce roční $K = S_0$: 0.02 CZK/1€,**
- **Opce 90 dní $K = S_0$: 0.04 CZK/1€.**

```
import yfinance as yf
import numpy as np
import pandas as pd

# 1. Stažení dat pro Euro vůči Koruně za poslední rok
ticker = "EURCZK=X"
data = yf.download(ticker, period="1y")

# 2. Výpočet denních logaritmických výnosů
data['Returns'] = np.log(data['Close'] / data['Close'].shift(1))

# 3. Výpočet roční volatility
# Směrodatná odchylka denních výnosů vynásobená odmocninou z obchodních dnů
daily_vol = data['Returns'].std()
annual_vol = daily_vol * np.sqrt(252)

# 4. Výpočet ročního driftu
# Průměrný denní výnos vynásobený 252 dny
annual_drift = data['Returns'].mean() * 252

print(f"--- Analýza EUR/CZK za poslední rok ---")
print(f"Roční volatilita (sigma): {annual_vol*100:.2f} %")
print(f"Roční drift (mu): {annual_drift*100:.2f} %")
print(f"Aktuální kurz (poslední): {data['Close'].iloc[-1]:.2f} CZK/EUR")
```

Generátory pseudonáhodných čísel

- Rádi bychom **generovali zcela náhodná čísla a jejich posloupnosti**,
- Z důvodu ověření a práce s výsledky navíc požadujeme **opakovatelnost** vygenerované posloupnosti čísel. To znamená, že při opakovaném spuštění generátoru se stejným nastavením získáme vždy totožnou posloupnost,
- Fyzikální generátory náhodných čísel nejsou vhodné – generování není opakovatelné,
- Deterministické algoritmy generují tzv. **pseudonáhodná čísla**,
- Požadujeme **minimální korelaci** mezi vygenerovanými posloupnostmi čísel (pro různá nastavení generátoru),
- Viz příklad – Monte Carlo 2D integrace – pokud náhodnost a tím i rozmístění generovaných dvojic (x, y) nebude náhodná (body budou více *padat* do určité části obrázku), získáme zkreslený odhad hustoty pravděpodobnosti a tím i nepřesný odhad výsledku.

Generátory náhodných čísel v 1D

- Uvažujme uniformní hustotu pravděpodobnosti $f(x)$ na intervalu $[0,1]$. Potřebujeme vygenerovat posloupnost N vzorků z tohoto intervalu.
- **Lineární kongruentní generátor LCG**
 1. Zvolme **celé číslo** $n_0 \geq 0$, pak
 2. $n_{i+1} = (an_i + c) \bmod m$, $a > 1, c, m$ jsou **celá čísla** – zřejmě $0 \leq n_i < m$,
 - Číslo a se nazývá násobitel, c přírůstek. Číslo m nazýváme modulo a určuje horní rozsah generátoru,
 3. Náhodné čísla získáme ve tvaru $x_i = n_i/m$.
- **Multiplikativní kongruentní (lineární) generátor MCG (MLCG)**
 - Volbou $c \equiv 0$ a dosazením do LCG získáme $n_{i+1} = an_i \bmod m, n_0 > 0$.

Rozsah a zrnitost generátoru MCG (MLCG)

- **Rozsah generátoru** udává, jak dlouhou posloupnost náhodných čísel umí vygenerovat, než se tato začne opakovat. Rozsah generátoru MCG je **nejvýše** roven číslu m .
- **Zrnitost generátoru** udává, jak hustě umí generátor zaplnit požadovaný interval $[0,1]$. Maximální potřebný počet čísel je dán podílem délky intervalu a rozlišením počítačové aritmetiky ε , například přesnost datového typu *double* je $\varepsilon = 10^{-15}$. Pak
 - $M_{max} = 1/10^{-15} = 10^{15}$,
 - Zrnitost můžeme relativně definovat jako $Z_{rel} = \max\left\{\frac{M_{max}-M}{M_{max}}, 0\right\}$,
 - kde M je rozsah generátoru.

Parametry generátorů a prostory vyšších dimenzí

- **Jak zvolit parametry m a a ?** Pro parametr m máme dvě možnosti. Varianta $m = 2^\alpha$ je **strojově optimální $\rightarrow$ realizace modulo pouhým bitovým posunem**. $M = m/4 = 2^{\alpha-2}$ pro $a \bmod 8 = 3$ nebo $a \bmod 8 = 5$, tedy $a = 3 + 8p$ nebo $a = 5 + 8p, p \geq 0$.
- **Co prvočísla?** Druhou možností je zvolit za m dosti velké prvočíslo. Velká prvočísla se hledají ve tvaru $p = 2^\alpha - 1$. Volba $m = p$ není strojově optimální, má však také své výhody – tou hlavní je **nižší korelační koeficient**
- Transformace na interval $[a, b]$ $\rightarrow$ lineární transformace $x_i = a + \hat{x}_i(b - a)$
- Transformace pro neuniformní rozdělení $\rightarrow$ metody využívají inverzní kumulativní distribuční funkci $F^{-1}(x)$ včetně tabelovaných hodnot (v případě složitého výpočtu).
- Pro prostory vyšší dimenze, tedy $d \geq 2$, generujeme buď d jednodimenzionálních posloupností (SoA – Structure of Arrays), nebo postupně v cyklech délky d plníme i -té složky všech vektorů (AoS – Arrays of Structure). SoA je mnohem výkonnější.

Použitá literatura

- William L. Dunn, J. Kenneth Shultis, *Exploring Monte Carlo Methods*, Elsevier, 2012, ISBN 9780444515759, <https://www.sciencedirect.com/book/9780444515759/exploring-monte-carlo-methods>
- Oliver C. Ibe, *Markov Processes for Stochastic Modeling* (Second Edition), Elsevier, 2013, ISBN 9780124077959, <https://www.sciencedirect.com/book/9780124077959/markov-processes-for-stochastic-modeling>
- Johannes Grotendorst, Dominik Marx, Alejandro Muramatsu, *Quantum Simulations of Complex Many-Body Systems: From Theory to Algorithms*, NIC-Directors, 2002, ISBN 3-00-009057-6
- Wikipedia contributors. (2025, November 16). Fresnel integral. In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved 23:27, January 21, 2026, from https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Fresnel_integral&oldid=1322456389
- Google Gemini PRO

- HULL, John C. *Options, Futures, and Other Derivatives*. 11. vydání. New York: Pearson, 2021. ISBN 978-0136939979.
- GLASSERMAN, Paul. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. New York: Springer, 2003. ISBN 978-0387004518.
- SHREVE, Steven E. *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. New York: Springer, 2004. ISBN 978-0387401010.
- BLACK, Fischer a Myron SCHOLES. *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. Journal of Political Economy, roč. 81, č. 3, s. 637–654, 1973.
- MCKINNEY, Wes. *Python for Data Analysis: Data Wrangling with Pandas, NumPy, and IPython*. 3. vydání. Sebastopol: O'Reilly Media, 2022. ISBN 978-1098112677.
- FABOZZI, Frank J. *Encyclopedia of Financial Models*. Hoboken: Wiley, 2012. ISBN 978-1118011898.
- HARRIS, Charles R., et al. *Array programming with NumPy*. Nature, roč. 585, s. 357–362, 2020.
- KWOK, Yue-Kuen. *Mathematical Models of Financial Derivatives*. 2. vydání. New York: Springer, 2008. ISBN 978-3540422884.
- DUFFIE, Darrell. *Dynamic Asset Pricing Theory*. 3. vydání. Princeton: Princeton University Press, 2001. ISBN 978-0691090207.
- BRANDIMARTE, Paolo. *Handbook in Monte Carlo Simulation: Applications in Financial Engineering, Risk Management, and Economics*. Hoboken: Wiley, 2014. ISBN 978-1118593264.

Děkuji za pozornost

Ing. Lukáš Kapera

lukas.kapera1@vsb.cz

www.vsb.cz