# Od popisu okamžité rychlosti k derivování funkcí

Petra Vondráková

Katedra aplikované matematiky
VŠB-Technická univerzita, Ostrava

[redacted]

# Isaac Newton

- 1643 narozen v Lincolnshire, Anglie
- studoval v Cambridge
- 1665 – 1666 základy diferenciálního a integrálního počtu
- profesor v Cambridge
- strach z kritiky

# Gottfried Wilhelm Leibniz

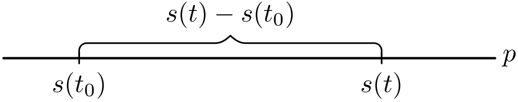
- 1646 narozen v Lipsku, Německo
- vystudoval logiku, filozofii a právo
- profesionální diplomat a právník
- v matematice byl samouk
- 1684 publikoval základy diferenciálního a integrálního počtu

# Mechanický model

- Uvažujme hmotný bod, který se pohybuje po přímce $p$. Označme $t$ čas a $s(t)$ polohu, v níž se bod v čase $t$ nachází.

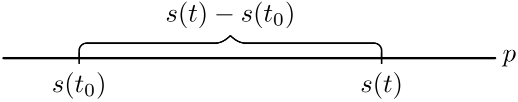
# Mechanický model

- Uvažujme hmotný bod, který se pohybuje po přímce $p$. Označme $t$ čas a $s(t)$ polohu, v níž se bod v čase $t$ nachází.



# Mechanický model

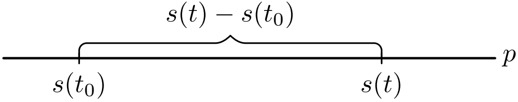
- Uvažujme hmotný bod, který se pohybuje po přímce $p$. Označme $t$ čas a $s(t)$ polohu, v níž se bod v čase $t$ nachází.




- Zvolíme časový okamžik $t$ (např. $t > t_0$) a budeme předpokládat, že v intervalu $\langle t_0, t \rangle$ se bod pohybuje doprava.

# Mechanický model

- Uvažujme hmotný bod, který se pohybuje po přímce $p$. Označme $t$ čas a $s(t)$ polohu, v níž se bod v čase $t$ nachází.




- Zvolíme časový okamžik $t$ (např. $t > t_0$) a budeme předpokládat, že v intervalu $\langle t_0, t \rangle$ se bod pohybuje doprava.
- Průměrná rychlost za dobu $t - t_0$ je dráha, kterou bod v této době urazil, tj. $s(t) - s(t_0)$, dělená přírůstkem času $t - t_0$.

# Mechanický model

Průměrná rychlost $v_t$ v časovém intervalu $\langle t_0, t\rangle$ je tedy

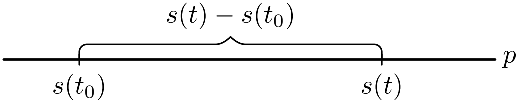
$$v_t = \frac{\text{dráha}}{\text{čas}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}\,.$$

# Mechanický model

Průměrná rychlost $v_t$ v časovém intervalu $\langle t_0, t\rangle$ je tedy

$$v_t = \frac{\text{dráha}}{\text{čas}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}\,.$$

Naším úkolem je určit okamžitou rychlost bodu v čase $t_0$.

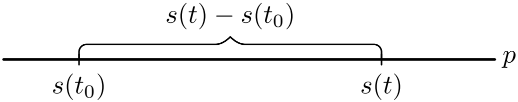


# Mechanický model

Průměrná rychlost $v_t$ v časovém intervalu $\langle t_0, t\rangle$ je tedy

$$v_t = \frac{\text{dráha}}{\text{čas}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}\,.$$

Naším úkolem je určit okamžitou rychlost bodu v čase $t_0$.




Myšlenka: Přibližujme koncový čas $t$ k $t_0$, tj. zkracujme časový interval $\langle t_0, t\rangle$, a zkoumejme průměrné rychlosti na těchto intervalech.

# Mechanický model

- Průměrná rychlost:

$$v_t = \frac{\text{dráha}}{\text{čas}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

# Mechanický model

- Průměrná rychlost:

$$v_t = \frac{\text{dráha}}{\text{čas}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

- Příklad. Máme následující naměřené hodnoty:

| čas | 2,0 | 2,1 | 2,2 | 2,3 | 2,4 | 2,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| dráha | 9 | 10,02 | 11,16 | 12,45 | 13,96 | 15,8 |

# Mechanický model

- Průměrná rychlost:

$$v_t = \frac{\text{dráha}}{\text{čas}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

- Příklad. Máme následující naměřené hodnoty:

| čas | 2,0 | 2,1 | 2,2 | 2,3 | 2,4 | 2,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| dráha | 9 | 10,02 | 11,16 | 12,45 | 13,96 | 15,8 |

- Spočítáme průměrné rychlosti pro následující časové intervaly:

| čas. interval | $\langle 2; 2,5 \rangle$ | $\langle 2; 2,4 \rangle$ | $\langle 2; 2,3 \rangle$ | $\langle 2; 2,2 \rangle$ | $\langle 2; 2,1 \rangle$ |
|---|---|---|---|---|---|
| pr. rychlost | 13,6 | 12,4 | 11,5 | 10,8 | 10,2 |

# Mechanický model

- Průměrná rychlost:

$$v_t = \frac{\text{dráha}}{\text{čas}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

- Příklad. Máme následující naměřené hodnoty:

| čas | 2,0 | 2,1 | 2,2 | 2,3 | 2,4 | 2,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| dráha | 9 | 10,02 | 11,16 | 12,45 | 13,96 | 15,8 |

- Spočítáme průměrné rychlosti pro následující časové intervaly:

| čas. interval | $\langle 2; 2,5\rangle$ | $\langle 2; 2,4\rangle$ | $\langle 2; 2,3\rangle$ | $\langle 2; 2,2\rangle$ | $\langle 2; 2,1\rangle$ |
|---|---|---|---|---|---|
| pr. rychlost | $13,6$ | $12,4$ | $11,5$ | $10,8$ | $10,2$ |

- K čemu se blíží průměrné rychlosti, jestliže se koncový čas $t$ blíží k počátečnímu času $t_0 = 2$?

# Mechanický model

Jak matematicky zapsat, že přibližováním okamžiku $t$ k $t_0$ přejde průměrná rychlost na časovém intervalu $\langle t_0, t \rangle$ v okamžitou rychlost $v_0$ v čase $t_0$?

# Mechanický model

Jak matematicky zapsat, že přibližováním okamžiku $t$ k $t_0$ přejde průměrná rychlost na časovém intervalu $\langle t_0, t\rangle$ v okamžitou rychlost $v_0$ v čase $t_0$?

## Průměrná rychlost

$$v_t = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}\,.$$

# Mechanický model

Jak matematicky zapsat, že přibližováním okamžiku $t$ k $t_0$ přejde průměrná rychlost na časovém intervalu $\langle t_0, t \rangle$ v okamžitou rychlost $v_0$ v čase $t_0$?

**Průměrná rychlost**

$$v_t = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

**Okamžitá rychlost**

$$v_0 = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

# Mechanický model

Jak matematicky zapsat, že přibližováním okamžiku $t$ k $t_0$ přejde průměrná rychlost na časovém intervalu $\langle t_0, t\rangle$ v okamžitou rychlost $v_0$ v čase $t_0$?

**Průměrná rychlost**

$$v_t = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}\,.$$

**Okamžitá rychlost**

$$v_0 = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}\,.$$

Předchozí limita udává „rychlost změny“ polohy pohybujícího se bodu neboli okamžitou rychlost.

# Geometrický model

- Chceme stanovit „rychlost změny“ funkce.

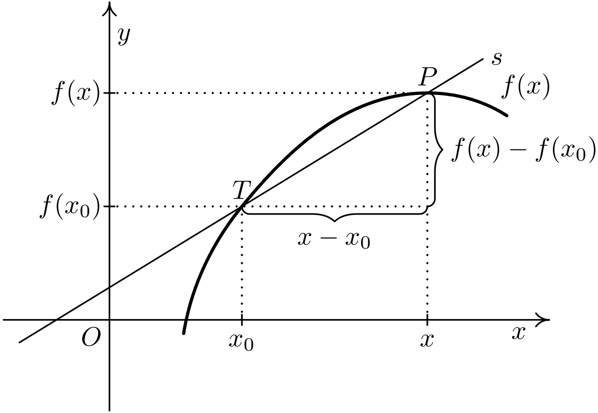
# Geometrický model

- Chceme stanovit „rychlost změny“ funkce.
- V grafickém znázornění to znamená najít v daném bodě $x$ sklon křivky (to, jak je křivka strmá).

# Geometrický model

- Chceme stanovit „rychlost změny“ funkce.
- V grafickém znázornění to znamená najít v daném bodě $x$ sklon křivky (to, jak je křivka strmá).
- Zatím nevíme, jak určit sklon libovolné křivky. Víme ale, jak určit sklon přímky procházející dvěma body. Sklon přímky je dán velikostí úhlu, jenž svírá tato přímka s osou $x$.

- Chceme stanovit „rychlost změny“ funkce.
- V grafickém znázornění to znamená najít v daném bodě $x$ sklon křivky (to, jak je křivka strmá).
- Zatím nevíme, jak určit sklon libovolné křivky. Víme ale, jak určit sklon přímky procházející dvěma body. Sklon přímky je dán velikostí úhlu, jenž svírá tato přímka s osou $x$.
- Číselně se tato velikost úhlu vyjadřuje jako směrnice přímky neboli tangens úhlu.




Pro směrnici přímky (sečny) $s$, která je určena dvěma body $T = (x_0, f(x_0))$ a $P = (x, f(x))$, platí

$$k_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

# Geometrický model

- Umíme určit sklon přímky procházející dvěma body $T$ a $P$.

# Geometrický model

- Umíme určit sklon přímky procházející dvěma body $T$ a $P$.
- Jak určit sklon křivky v bodě $T$ ?

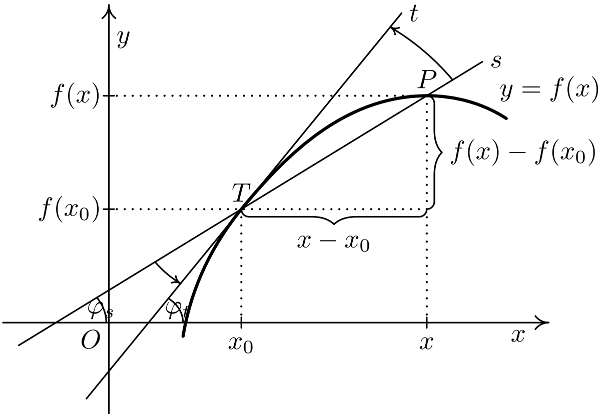
# Geometrický model

- Umíme určit sklon přímky procházející dvěma body $T$ a $P$.
- Jak určit sklon křivky v bodě $T$ ?
- Jak přejít od sklonu přímky (dva body) ke sklonu křivky (jeden bod)?

# Geometrický model

- Umíme určit sklon přímky procházející dvěma body $T$ a $P$.
- Jak určit sklon křivky v bodě $T$ ?
- Jak přejít od sklonu přímky (dva body) ke sklonu křivky (jeden bod)?
- Stejná myšlenka jako v případě okamžité rychlosti.

# Geometrický model




Postupně přibližujme bod $P$ k bodu $T$ a zkoumejme posloupnost směrnic přímek $TP$.

# Geometrický model – numerický experiment

Uvažujme funkci $f(x) = x^2$ a bod $x_0 = 5$.

Uvažujme funkci $f(x) = x^2$ a bod $x_0 = 5$.

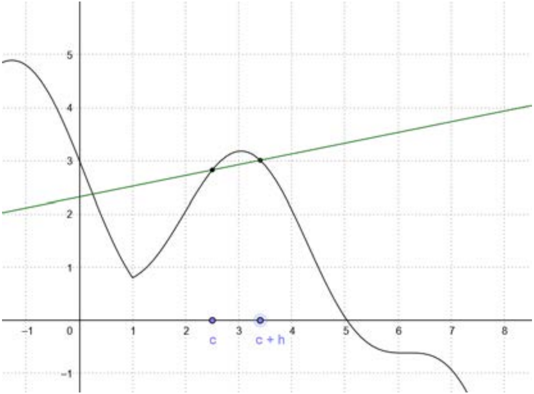
| $x$ | $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ | | |
|---|---|---|---|
| $6$ | $\frac{6^2-5^2}{6-5} = \frac{36-25}{1}$ | $=$ | $11$ |
| $5,5$ | $\frac{(5{,}5)^2-5^2}{5{,}5-5} = \frac{30{,}25-25}{0{,}5}$ | $=$ | $10,5$ |
| $5,2$ | $\frac{(5{,}2)^2-5^2}{5{,}2-5} = \frac{27{,}04-25}{0{,}2}$ | $=$ | $10,2$ |
| $5,1$ | $\frac{(5{,}1)^2-5^2}{5{,}1-5} = \frac{26{,}01-25}{0{,}1}$ | $=$ | $10,1$ |
| $5,01$ | $\frac{(5{,}01)^2-5^2}{5{,}01-5} = \frac{25{,}1001-25}{0{,}01}$ | $=$ | $10,01$ |
| $5,001$ | $\frac{(5{,}001)^2-5^2}{5{,}001-5} = \frac{25{,}010001-25}{0{,}001}$ | $=$ | $10,001$ |

# Geometrický model – numerický experiment

Uvažujme funkci $f(x) = x^2$ a bod $x_0 = 5$.

| $x$ | $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ |
|---|---|
| $6$ | $\frac{6^2-5^2}{6-5} = \frac{36-25}{1} = 11$ |
| $5,5$ | $\frac{(5{,}5)^2-5^2}{5{,}5-5} = \frac{30{,}25-25}{0{,}5} = 10,5$ |
| $5,2$ | $\frac{(5{,}2)^2-5^2}{5{,}2-5} = \frac{27{,}04-25}{0{,}2} = 10,2$ |
| $5,1$ | $\frac{(5{,}1)^2-5^2}{5{,}1-5} = \frac{26{,}01-25}{0{,}1} = 10,1$ |
| $5,01$ | $\frac{(5{,}01)^2-5^2}{5{,}01-5} = \frac{25{,}1001-25}{0{,}01} = 10,01$ |
| $5,001$ | $\frac{(5{,}001)^2-5^2}{5{,}001-5} = \frac{25{,}010001-25}{0{,}001} = 10,001$ |

Směrnice přímek $TP$ se přibližují k hodnotě 10.
Tedy sklon křivky $x^2$ v bodě $x_0 = 5$ je 10.




Geogebra Applet: Derivace v bodě

# Geometrický model – shrnutí

Jak matematicky zapsat, že přibližováním bodu $x$ k bodu $x_0$ přejde směrnice sečny $k_s$, která je určena dvěma body $T = (x_0, f(x_0))$ a $P = (x, f(x))$, ve směrnici tečny $k_t$ v bodě $x_0$?

**Směrnice sečny**

$$k_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Jak matematicky zapsat, že přibližováním bodu $x$ k bodu $x_0$ přejde směrnice sečny $k_s$, která je určena dvěma body $T = (x_0, f(x_0))$ a $P = (x, f(x))$, ve směrnici tečny $k_t$ v bodě $x_0$?

**Směrnice sečny**

$$k_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

**Směrnice tečny**

$$k_t = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

# Co již víme?

Ukázali jsme si, že platí:

**Okamžitá rychlost**

$$v_0 = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

# Co již víme?

Ukázali jsme si, že platí:

**Okamžitá rychlost**

$$v_0 = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

**Směrnice tečny**

$$k_t = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

# Co již víme?

Ukázali jsme si, že platí:

**Okamžitá rychlost**

$$v_0 = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

**Směrnice tečny**

$$k_t = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

**Okamžité zrychlení**

$$a_0 = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$$

# Definice derivace funkce v bodě

Vzhledem k důležitosti zmíněné limity, zavádíme následující definici.

## Definice

Nechť $x_0 \in D(f)$. Existuje-li limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

značíme ji $f'(x_0)$ a nazýváme derivací funkce $f$ v bodě $x_0$.
Je-li $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že $f$ má v bodě $x_0$ vlastní derivaci.
Je-li $f'(x_0) = \pm\infty$, říkáme, že funkce $f$ má v bodě $x_0$ nevlastní derivaci.

# Jednostranné derivace funkce v bodě

Obdobně definujeme

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,,$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$

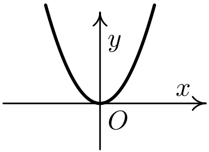
Hodnoty $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ se nazývají derivace zprava (derivace zleva) funkce $f$ v bodě $x_0$.
Platí, že funkce $f$ má derivaci v bodě $x_0$ právě tehdy, když existují obě jednostranné derivace funkce $f$ v tomto bodě a jsou si rovny.

# Příklad 1

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = x^2$ v bodě $x_0 = 0$.

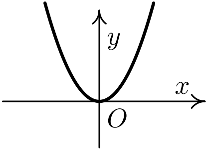
# Příklad 1

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = x^2$ v bodě $x_0 = 0$.



# Příklad 1

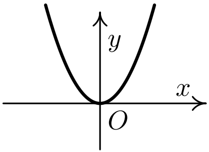
Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = x^2$ v bodě $x_0 = 0$.




$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 0}{x - 0} =$$

# Příklad 1

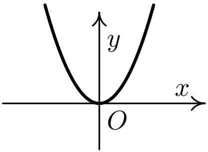
Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = x^2$ v bodě $x_0 = 0$.




$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} =$$

# Příklad 1

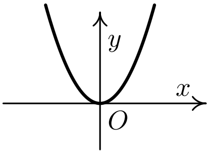
Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = x^2$ v bodě $x_0 = 0$.




$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0.$$

# Příklad 1

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = x^2$ v bodě $x_0 = 0$.




$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} x = 0.$$

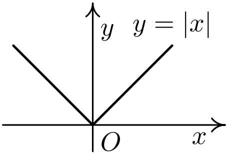
Derivace $f'(0)$ představuje směrnici tečny ke grafu funkce v bodě $(0, f(0))$. Tj. tečnou je osa $x$.

# Příklad 2

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě $x_0 = 0$.

# Příklad 2

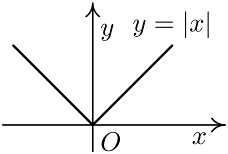
Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě $x_0 = 0$.




$$f : y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

# Příklad 2

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě $x_0 = 0$.

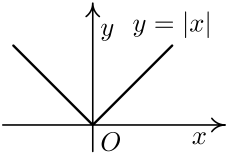



$$f : y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Vypočtěme jednostranné derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě 0.

# Příklad 2

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě $x_0 = 0$.



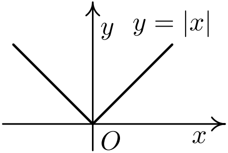

$$f : y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Vypočtěme jednostranné derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě 0.

$f'_+(0) =$

# Příklad 2

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě $x_0 = 0$.



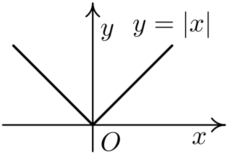

$$f : y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Vypočtěme jednostranné derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě 0.

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} =$$

# Příklad 2

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě $x_0 = 0$.



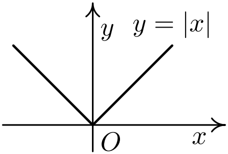

$$f : y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Vypočtěme jednostranné derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě 0.

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} =$$

# Příklad 2

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě $x_0 = 0$.



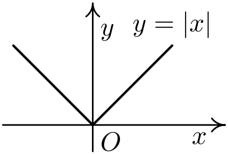

$$f : y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Vypočtěme jednostranné derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě 0.

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

# Příklad 2

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě $x_0 = 0$.




$$f: y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

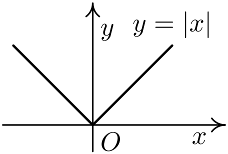
Vypočtěme jednostranné derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě 0.

$$f'_{+}(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

$$f'_{-}(0) =$$

# Příklad 2

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě $x_0 = 0$.




$$f : y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

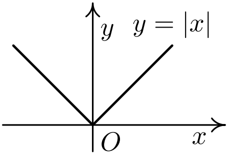
Vypočtěme jednostranné derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě 0.

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

# Příklad 2

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě $x_0 = 0$.




$$f : y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Vypočtěme jednostranné derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě 0.

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

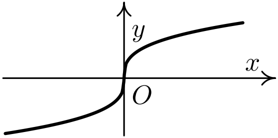
Tedy $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, a proto $f'(0)$ neexistuje. V takovém bodě nelze sestrojit tečnu.

# Příklad 3

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v bodě $x_0 = 0$.

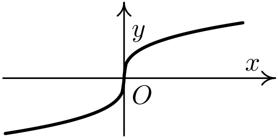
# Příklad 3

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v bodě $x_0 = 0$.



# Příklad 3

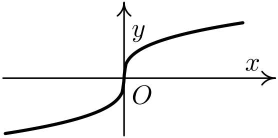
Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v bodě $x_0 = 0$.




$f'(0) =$

# Příklad 3

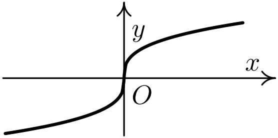
Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v bodě $x_0 = 0$.




$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} =$$

# Příklad 3

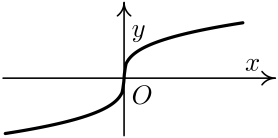
Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v bodě $x_0 = 0$.




$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} =$$

# Příklad 3

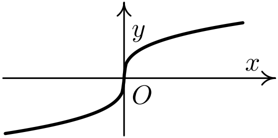
Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v bodě $x_0 = 0$.




$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} =$$

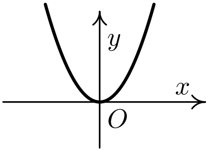
# Příklad 3

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v bodě $x_0 = 0$.



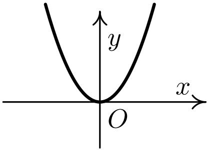

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = +\infty.$$

# Co již víme?

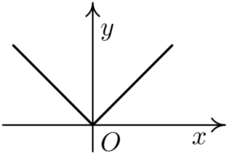



$$f'(0) = 0$$

# Co již víme?

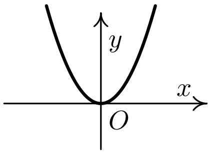



$$f'(0) = 0$$

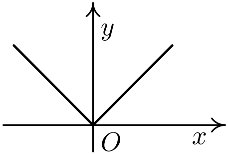



$f'(0)$ *neexistuje*

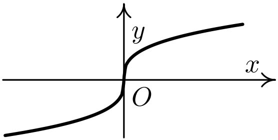
# Co již víme?




$$f'(0) = 0$$

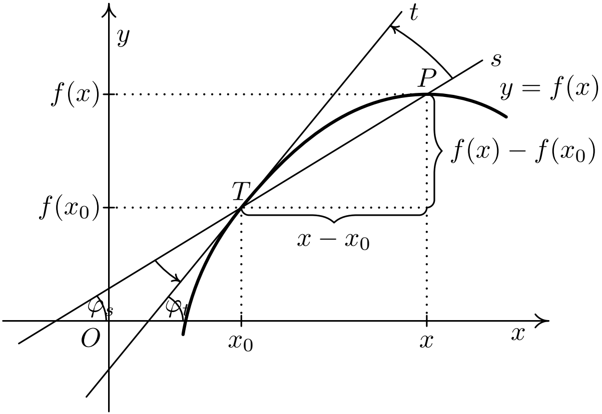



$f'(0)$ *neexistuje*




$$f'(0) = +\infty$$

# Derivace funkce v bodě – jiný zápis




Označíme-li $h = x - x_0$, pak

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

# Definice derivace funkce na množině

Doposud jsme mluvili o derivaci funkce v jednom bodě $x_0$. Tato derivace je nějaké číslo.

# Definice derivace funkce na množině

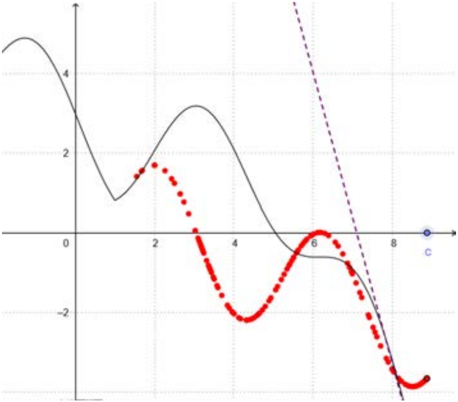
Doposud jsme mluvili o derivaci funkce v jednom bodě $x_0$. Tato derivace je nějaké číslo.
Jestliže má $f$ derivaci v každém bodě definičního oboru (popř. nějaké jeho části), dostáváme novou funkci $f'$ definovanou takto:

# Definice derivace funkce na množině

Doposud jsme mluvili o derivaci funkce v jednom bodě $x_0$. Tato derivace je nějaké číslo.
Jestliže má $f$ derivaci v každém bodě definičního oboru (popř. nějaké jeho části), dostáváme novou funkci $f'$ definovanou takto:

**Definice**

Nechť existuje vlastní derivace $f'(x)$ funkce $f$ pro všechna $x \in M$, kde $M \subset D(f)$. Pak funkci $f'$: $y = f'(x)$, $x \in M$, nazýváme derivací funkce $f$ na $M$.




Geogebra Applet: Derivace na množině - nová funkce

# Derivace funkce $f(x) = x^3 - x$

Určete derivaci funkce $f(x) = x^3 - x$.

Určete derivaci funkce $f(x) = x^3 - x$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - (x+h) - (x^3 - x)}{h}$$

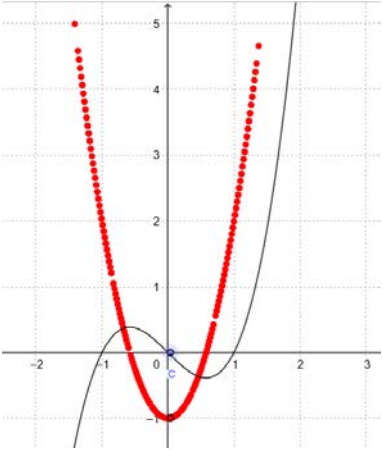
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^3 + h^3 - x - h - x^3 + x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^3 + h^3 - h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (3x^2 + 3xh^2 + h^2 - 1)$$

$$= 3x^2 - 1$$

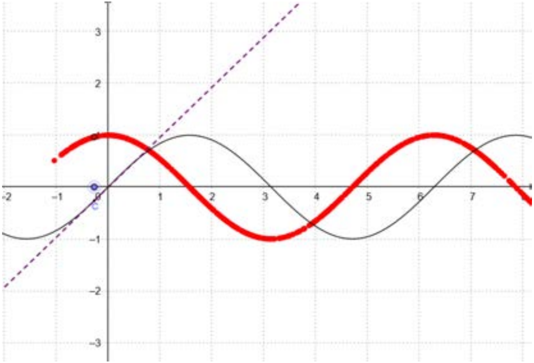
# Derivace funkce $f(x) = x^3 - x$



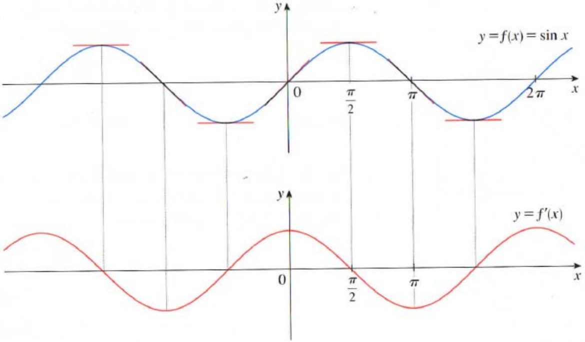

$$f(x) = x^3 - x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

# Derivace elementárních funkcí

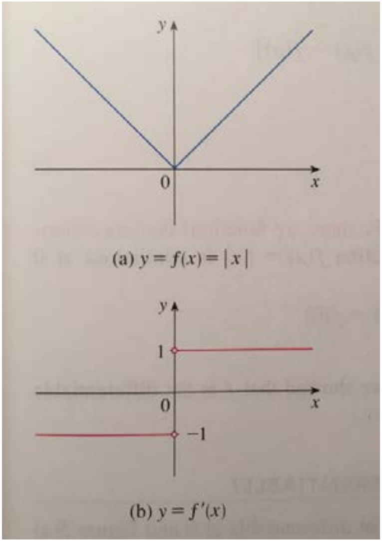



Geogebra Applet: Derivace na množině - elementární funkce




$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$




$$f(x) = |x|$$

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

# Derivace elementárních funkcí

$\boxed{1}$ $(c)' = 0,\ c \in \mathbb{R}$ (konst.), $x \in \mathbb{R}$,

$\boxed{2}$ $(x^r)' = r \cdot x^{r-1},\ r \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^+$,

$\boxed{3}$ $(\sin x)' = \cos x,\ x \in \mathbb{R}$,

$\boxed{4}$ $(\cos x)' = -\sin x,\ x \in \mathbb{R}$,

$\boxed{5}$ $(e^x)' = e^x,\ x \in \mathbb{R}$,

$\boxed{6}$ $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x},\quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$,

$\boxed{7}$ $(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x},\quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$,

$\boxed{8}$ $(\ln x)' = \dfrac{1}{x},\quad x \in \mathbb{R}^+$,

$\boxed{9}$ $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad x \in (-1, 1)$,

# Derivace elementárních funkcí

$$\boxed{10} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad x \in (-1,1),$$

$$\boxed{11} \qquad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1}\,, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\boxed{12} \qquad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{x^2+1}\,, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\boxed{13} \qquad (a^x)' = a^x \ln a, \ \ a > 0, \ \ a \neq 1, \ \ x \in \mathbb{R},$$

$$\boxed{14} \qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}\,, \ \ a > 0, \ \ a \neq 1, \ \ x \in \mathbb{R}^+.$$

# Vytvoření kalkulu

Newton a Leibniz předložili pravidla pro:

- derivování základních elementárních funkcí,

# Vytvoření kalkulu

Newton a Leibniz předložili pravidla pro:

- derivování základních elementárních funkcí,
- derivování součtu, rozdílu, součinu, podílu funkcí,

# Vytvoření kalkulu

Newton a Leibniz předložili pravidla pro:

- derivování základních elementárních funkcí,
- derivování součtu, rozdílu, součinu, podílu funkcí,
- derivování složených funkcí,

# Vytvoření kalkulu

Newton a Leibniz předložili pravidla pro:

- derivování základních elementárních funkcí,
- derivování součtu, rozdílu, součinu, podílu funkcí,
- derivování složených funkcí,
- a tím pádem derivování všech elementárních funkcí.

# Vytvoření kalkulu

Newton a Leibniz předložili pravidla pro:

- derivování základních elementárních funkcí,
- derivování součtu, rozdílu, součinu, podílu funkcí,
- derivování složených funkcí,
- a tím pádem derivování všech elementárních funkcí.

Byl vytvořen kalkul, který fungoval a nacházel nesmírné uplatnění v různých oborech. Lidé sice nevěděli, proč to funguje, ale věděli, co mají dělat.

# K čemu využijeme derivace

Diferenciální rovnice se využívají ke zkoumání různých problémů ve fyzice, biologii nebo sociálních vědách.
Ve všech případech, které si ukážeme, vystupuje derivace, která představuje rychlost změny nějaké měnící se veličiny.

# Ochlazování kávy

Horké těleso je v místnosti a ochlazuje se. Na teplotu místnosti toto ochlazování nemá vliv. Rychlost s jakou klesá teplota tělesa je úměrná rozdílu mezi teplotou tohoto tělesa a teplotou místnosti. Označíme-li teplotu tělesa $T$, teplotu místnosti $T_0$, čas $t$ a konstatu úměrnosti $k$, pak

$$T'(t) = -k(T - T_0)$$

# Radioaktivní rozpad

Při datování archeologických nálezů pozůstatků živých organismů se využívá toho, že radioaktivní prvky se rozpadají rychlostí, která je přímo úměrná množství dosud nerozpadnutého materiálu. Označíme-li množství materiálu $y$, čas $t$ a konstatu úměrnosti $k$, pak

$$y'(t) = -ky$$

# Rovnice samočištění jezer

V jezeře je kontaminace. Do jezera přitéká čistá voda a kontaminovaná voda vytéká. Tím se jezero čistí. Čím menší je kontaminace, tím menší je koncentrace nečistot ve vytékající vodě a tím pomaleji se nečistoty vyplavují. Matematicky můžeme předpokládat, že rychlost, s jakou klesá množství nečistot v jezeře, je úměrné okamžitému množství nečistot.
Označíme-li množství nečistot $y$, čas $t$ a konstatu úměrnosti $k$, pak

$$y'(t) = -ky$$

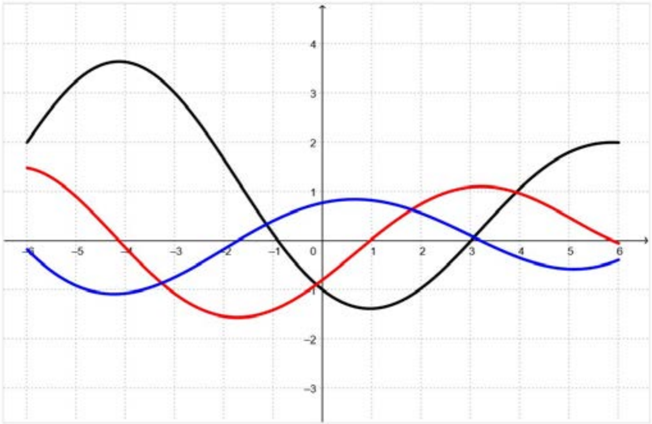
# Krvácení při operaci

Při operaci pacient krvácí a krev je doplňována fyziologickým roztokem. Celkový objem tekutiny v krevním oběhu pacienta je konstantní, ale pacient ztrácí krvinky. Je to podobné jako samočištění jezera. Při dané intenzitě krvácení je ztráta krvinek tím menší, čím je krvinek méně. Tedy rychlost, s jakou klesá množství krvinek v těle pacienta, je úměrná okamžitému množství těchto krvinek.

Označíme-li množství krvinek v libovolné jednotce $y$, čas $t$ a konstatu úměrnosti $k$, pak

$$y'(t) = -ky$$

# Otázka na konec




Přiřaďte barvu k funkcím $f$, $f'$ a $f''$

# Děkuji za pozornost a přeji krásný den

Studijní program
Výpočetní a aplikovaná matematika

Katedra aplikované matematiky
www.am.vsb.cz