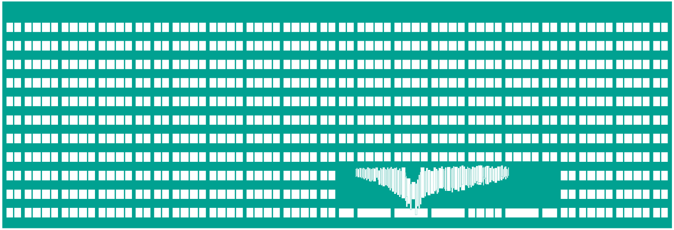
VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

VSB TECHNICAL UNIVERSITY OF OSTRAVA



www.vsb.cz

Chaos není nepořádek

Marek Lampart

Katedra aplikované matematiky, Fakulta elektrotechniky a informatiky
&
IT4Innovations

VŠB – TU Ostrava

23. ledna 2025

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

Chaos není nepořádek

Marek Lampart

Katedra aplikované matematiky, Fakulta elektrotechniky a informatiky
&
IT4Innovations

VŠB – TU Ostrava

23. ledna 2025

Význam slova „Chaos“

chaos, -u m ⟨ ř ⟩

1. velký zmatek, nepořádek, neuspořádanost, změť: *ch. v dopravě; způsobit, vyvolat ch.*
2. *filoz., náb., mytol.* (podle starověkých představ) pův. prázdný prostor, znějící průrva, později neuspořádaná změť živlů před vznikem kosmu ve smyslu uspořádaného světa

V. Petráčková, J. Kraus za kolektiv, *Akademický slovník cizích slov*. Academia, Praha 1998

Co může způsobit mávnutí motýlích křídel?

Může "toto", způsobit "tohle"?

Co může způsobit mávnutí motýlích křídel?

AMERICAN ASSOCIATION FOR THE ADVANCEMENT OF SCIENCE, 139th MEETING

Subject.........................	Predictability; Does the Flap of a Butterfly's wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas?
Author.........................	Edward N. Lorenz, Sc.D. Professor of Meteorology
Address.........................	Massachusetts Institute of Technology Cambridge, Mass. 02139
Time.........................	10:00 a.m., December 29, 1972
Place.........................	Sheraton Park Hotel, Wilmington Room
Program.........................	AAAS Section on Environmental Sciences New Approaches to Global Weather: GARP (The Global Atmospheric Research Program)
Convention Address..............	Sheraton Park Hotel

RELEASE TIME
10:00 a.m., December 29

Aplikace dynamických systémů

- V oblastech
  - akademická
  - výzkumná
  - inženýrství
- Vědní disciplíny
  - filozofie
  - umění
  - genetika
  - teologie
  - fyzika
  - chemie

- biologie
- ekonomie
- politologie
- ekologie
- mechanika
- elektrotechnika
- geoinformatika
- lingvistika
- medicína

$\vdots$

Příklad - úročení vkladu

P_0 — počáteční hodnota vkladu, r — úroková míra

$$
\begin{aligned}
&P_1 = P_0 + rP_0 = (1+r)P_0 \\
&P_2 = P_1 + rP_1 = (1+r)P_1 = (1+r)^2 P_0 \\
&P_3 = P_2 + rP_2 = (1+r)P_2 = (1+r)^3 P_0 \\
&\vdots \\
&P_n = (1+r)^n P_0
\end{aligned}
$$

Exponenciální růst

Základní model růstu populace:

- Každý jedinec se reprodukuje nezávisle na ostatních.
- *Bez omezení* zdrojů populace roste exponenciálně.

Matematický model:

$$P_{n+1} = rP_n \tag{1}$$

kde:

- P_n – velikost populace v čase n,
- r – růstová konstanta ($r > 1$ znamená růst).

Řešení:

$$P_n = P_0 r^n \tag{2}$$

Problém? V reálném světě nejsou neomezené zdroje!

Vylepšení: Růst s omezenými zdroji

Problém exponenciálního růstu:

- Populace nemůže růst neomezeně – dochází k **saturaci zdrojů**.
- Přidáme *regulační zpětnou vazbu.*

Úprava modelu:

$$P_{n+1} = rP_n \left(1 - \frac{P_n}{K}\right) \tag{3}$$

kde:

- K – **kapacita prostředí** (maximální možná populace).
- $1 - \frac{P_n}{K}$ – **brzdící člen**, který snižuje růst, když $P_n \to K$.

Dynamika:

- Pro $P_n \ll K$: téměř exponenciální růst.
- Pro $P_n \approx K$: růst se zpomaluje.
- Pro $P_n > K$: populace začne klesat.

Přechod k normalizované logistické funkci

Chceme model zjednodušit. Definujeme *normalizovanou populaci*:

$$x_n = \frac{P_n}{K} \tag{4}$$

kde $x_n \in [0, 1]$ značí relativní velikost populace vůči kapacitě prostředí.

Přepíšeme růstovou rovnici:

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n) \tag{5}$$

kde:

- $\mu = r$ – **růstový parametr**,
- $x_n(1 - x_n)$ – efektivní růst v daném okamžiku.

Význam této rovnice:

- Pro malé $\mu \to$ *stabilní populace.*
- Pro vyšší $\mu \to$ *oscilace, bifurkace.*
- Pro velké $\mu \to$ *chaos!*

Dynamický systém

Definice

Nechť $f : X \to X$ je spojité zobrazení na kompaktním metrickém prostoru X. Pak se uspořádaná dvojice

$$(X, f)$$

nazývá ***(diskrétní) dynamický systém.***

Generický příklad - Systém logistických zobrazení

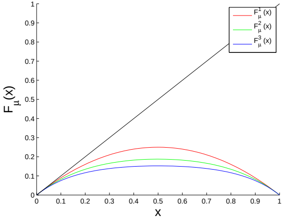
$$F_\mu(x) : [0,1] \to [0,1] \qquad F_\mu(x) = \mu x(1-x)$$

R.M. May. *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, Nature, **261**(1976) s. 459–467.

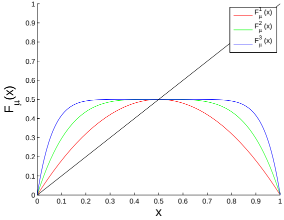
Generický příklad - Systém logistických zobrazení

$$F_\mu(x) : [0,1] \to [0,1] \qquad F_\mu(x) = \mu x(1-x)$$

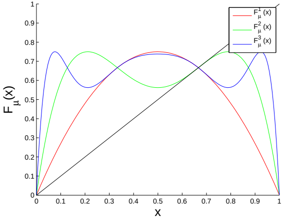
$\mu = 1$



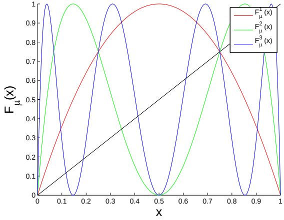
$\mu = 2$



$\mu = 3$



$\mu = 4$



Co je bifurkační diagram a jak jej konstruovat?

Co je bifurkační diagram (BD)?

- Graficky znázorňuje **dlouhodobé chování dynamického systému** při různých hodnotách parametru.
- Ukazuje, kdy dochází ke **stabilním řešením, periodickým oscilacím a chaosu**.

Jak konstruovat BD?

1. Vybereme např. **logistickou funkci**:

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$$

2. Zvolíme rozsah hodnot parametru μ (např. $2 \leq \mu \leq 4$).
3. Pro každé μ iterujeme rovnici od počáteční hodnotyx_0.
4. Vykreslíme pouze **hodnoty v ustáleném stavu**.
5. Opakujeme tento proces pro celou osu $\mu \to$ získáme BD.

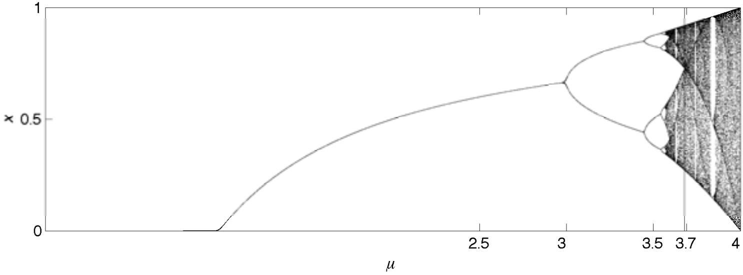
Co je bifurkační diagram a jak jej konstruovat?

Význam BD:

- Odhaluje přechody mezi **stabilitou, periodicitou a chaosem**.
- Pomáhá předpovídat chování systémů ve fyzice, biologii, ekonomii.

Bifurkační diagram

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$$



Chaos ve smyslu Liho a Yorka

Definice

Necht' (X, f) je dynamický systém. Řekneme, že f je ***chaotické ve smyslu Liho a Yorka***, jestliže existuje nespočetná podmnožina $S \subset X$ (z anglického „scrambled" set, tj. promíchaná) taková, že pro všechna $x, y \in S$ od sebe různá (tj. $x \neq y$) jsou splněny následující dvě podmínky:

1. $\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0.$
2. $\liminf_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0.$

T.-Y. Li a J. A. Yorke. *Period three implies chaos*. Amer. Math. Monthly, **82** (1975), s. 985–992.

Chaos ve smyslu Liho a Yorka

Věta

Buď $([0,1], f)$ dynamický systém mající 3-periodický bod.Potom je f chaotické ve smyslu Liho a Yorka.

T.-Y. Li a J. A. Yorke. *Period three implies chaos*. Amer. Math. Monthly, **82** (1975), s. 985–992.

Závěr: Chaos v každodenním životě

Proč je důležité rozumět chaosu?

Počasí: Proč nelze předpovědět počasí na měsíc dopředu?

Malé změny, velké dopady: Jak může drobná změna v rozhodnutí ovlivnit celý život?

Ekonomika: Proč jsou burzovní trhy nepředvídatelné?

Dopravní zácpy: Jak se chaos projevuje v každodenním provozu?

Lidské chování: Proč je někdy nepředvídatelné?

Hlavní myšlenka:
Chaos není nepořádek – je to **skrytý a složitý řád v komplexních systémech**.

Děkuji za pozornost

Marek Lampart

Katedra aplikované matematiky, Fakulta elektrotechniky a informatiky
&
IT4Innovations

VŠB – TU Ostrava

23. ledna 2025

VŠB TECHNICKÁ
UNIVERZITA
OSTRAVA