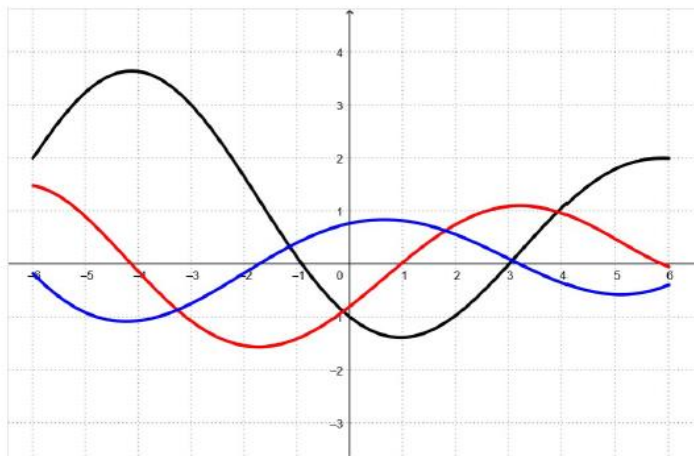


ŠKOMAM Cup 2024 – otázky a odpovědi

Otázka č. 1:



Přiřaďte barvu k funkcím f , f' a f''

Odpověď na otázku č. 1:

f – černá

f' – červená

f'' – modrá

Otázka č. 2:

Jaké komplexní číslo získáme otočením čísla $2 + \sqrt{3}i$ kolem čísla 1 o úhel $\frac{\pi}{3}$?

Odpověď na otázku č. 2:

$$\sqrt{3}i$$

Otázka č. 3:

Řešte neřešitelnou soustavu

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 1, \\x_1 - x_2 &= 2, \\x_1 + 2x_2 &= 3.\end{aligned}$$

Odpověď na otázku č. 3:

Řešení

Pro matici soustavy a vektor pravých stran platí $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Dále platí $A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, $A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Nyní potřebujeme vyřešit soustavu $A^T A x = A^T b$, tj.
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 6, \\ 2x_1 + 6x_2 = 5. \end{cases}$$

Odečteme-li od trojnásobku první rovnice rovnici druhou, dostaneme $7x_1 = 13$, odkud vypočteme $x_1 = \frac{13}{7}$. Dosazením hodnoty x_1 do jedné ze dvou rovnic pak obdržíme $x_2 = \frac{3}{14}$.

Otázka č. 4:

Lze naprogramovat program, který:

1. Rozhodne, zda-li se jiný program zastaví na všechny vstupy?
2. Rozhodne, zda-li se jiný program zastaví (pro konkrétní vstup) do daného počtu kroků?

Odpověď na otázku č. 4:

1. Ne
2. Ano

Otázka č. 5:

Jak spočítat plochu čtyřúhelníku o vnitřních úhlech $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (v hyperbolické geometrii)?

Odpověď na otázku č. 5:

$$2\pi - (\alpha + \beta + \gamma + \delta)$$

Otázka č. 6:

Najděte všechna řešení kubické rovnice:

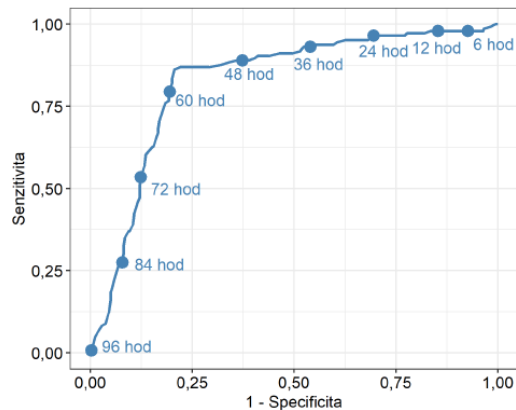
$$z^3 - 3z - 2 = 0.$$

Odpověď na otázku č. 6:

$$z_1 = 2, z_2 = z_3 = -1$$

Otázka č. 7:

Na níže uvedeném grafu je ROC křivka pro test detekující nespokojeného zákazníka firmy nabízející úklid domácnosti v závislosti na době odezvy na zákaznickou poptávku.



Odhadněte prahovou hodnotu dobu odezvy firmy (± 1 hod) pro vytvoření „nejlepšího“ testu z hlediska rovnováhy mezi jeho senzitivitou a specificitou.

Odpověď na otázku č. 7:

55,5 hodin