

Můžeme věřit intuici?

Petr Vodstrčil

`petr.vodstrcil@vsb.cz`

Katedra aplikované matematiky, Fakulta elektrotechniky a informatiky,
Vysoká škola báňská–Technická univerzita Ostrava



Ostrava, 24.1. 2017
(ŠKOMAM 2017)

- 1 Každé dva kruhy mají stejný obvod.
- 2 $\pi = 2$
- 3 Provaz kolem zeměkoule
- 4 Dvě kilometrové kolejnice
- 5 Míchání karet
- 6 Úloha o brachistochroně
- 7 Závěr

1 Každé dva kruhy mají stejný obvod.

2 $\pi = 2$

3 Provaz kolem zeměkoule

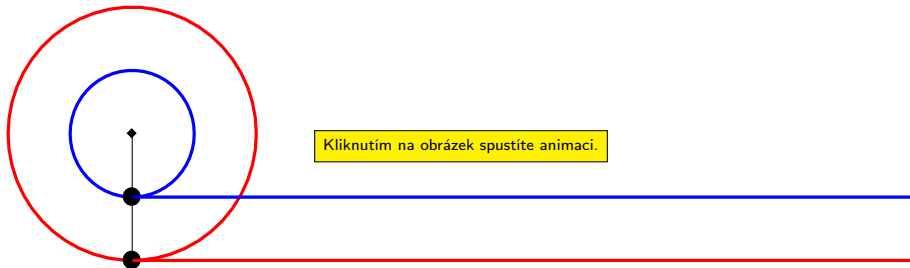
4 Dvě kilometrové kolejnice

5 Míchání karet

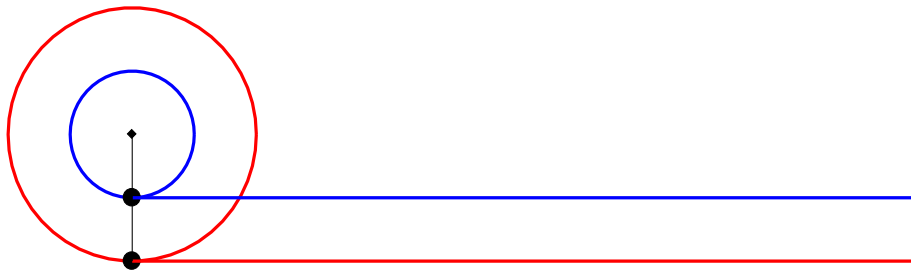
6 Úloha o brachistochroně

7 Závěr

Každé dva kruhy mají stejný obvod.



Každé dva kruhy mají stejný obvod.



1 Každé dva kruhy mají stejný obvod.

2 $\pi = 2$

3 Provaz kolem zeměkoule

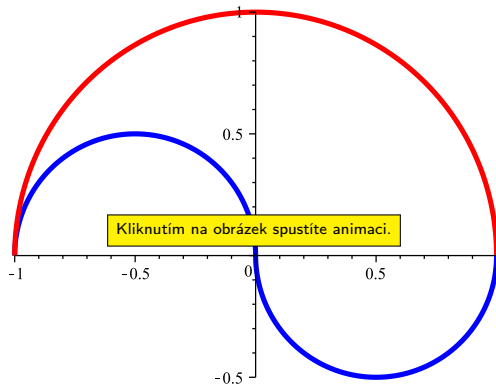
4 Dvě kilometrové kolejnice

5 Míchání karet

6 Úloha o brachistochroně

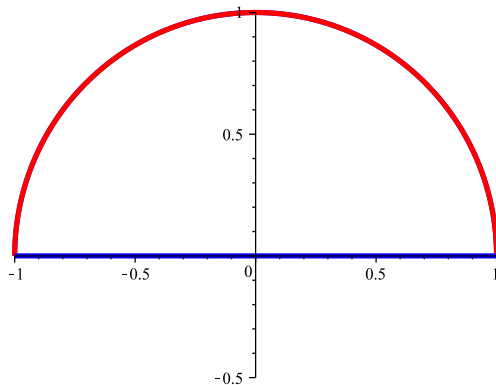
7 Závěr

$$\pi = 2$$



Délka červené i modré křivky je π .

$$\pi = 2$$



Délka červené i modré křivky je π .

1 Každé dva kruhy mají stejný obvod.

2 $\pi = 2$

3 Provaz kolem zeměkoule

4 Dvě kilometrové kolejnice

5 Míchání karet

6 Úloha o brachistochroně

7 Závěr

Provaz kolem zeměkoule 1

Předpokládejme, že Země je koule o poloměru $r = 6\,378\,000$ m. Kolem rovníku natáhneme provaz tak, aby Zemi těsně obepínal. Poté provaz prodloužíme o 1 metr.

Provaz kolem zeměkoule 1

Předpokládejme, že Země je koule o poloměru $r = 6\,378\,000$ m. Kolem rovníku natáhneme provaz tak, aby Zemi těsně obepínal. Poté provaz prodloužíme o 1 metr.

Otázka 1

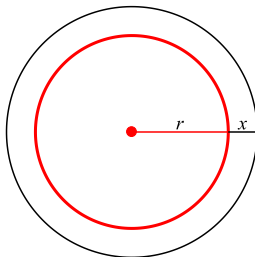
Jak velká bude mezera mezi rovníkem a provazem? Předpokládáme, že je mezera ve všech místech stejná.

Provaz kolem zeměkoule 1

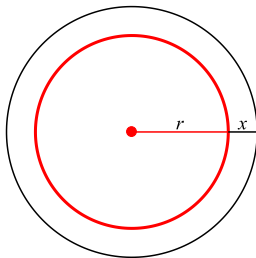
Předpokládejme, že Země je koule o poloměru $r = 6\,378\,000$ m. Kolem rovníku natáhneme provaz tak, aby Zemi těsně obepínal. Poté provaz prodloužíme o 1 metr.

Otázka 1

Jak velká bude mezera mezi rovníkem a provazem? Předpokládáme, že je mezera ve všech místech stejná.



Provaz kolem zeměkoule 1

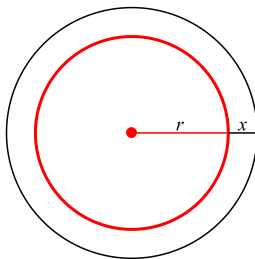


Řešení

Označíme-li x velikost mezery, pak musí platit

$$2\pi(r + x) = 2\pi r + 1,$$

Provaz kolem zeměkoule 1



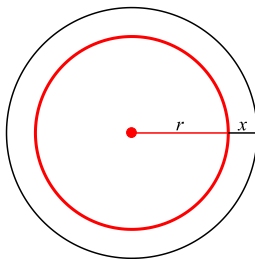
Řešení

Označíme-li x velikost mezery, pak musí platit

$$2\pi(r + x) = 2\pi r + 1,$$

odkud snadno $x = \frac{1}{2\pi} \doteq 0,159$.

Provaz kolem zeměkoule 1



Řešení

Označíme-li x velikost mezery, pak musí platit

$$2\pi(r + x) = 2\pi r + 1,$$

odkud snadno $x = \frac{1}{2\pi} \doteq 0,159$.

To znamená, že velikost hledané mezery je přibližně 16 centimetrů.

Provaz kolem zeměkoule 2

Předpokládejme, že Země je koule o poloměru $r = 6\,378\,000$ m. Kolem rovníku natáhneme provaz tak, aby Zemi těsně obepínal. Poté provaz prodloužíme o 1 metr.

Otázka 2

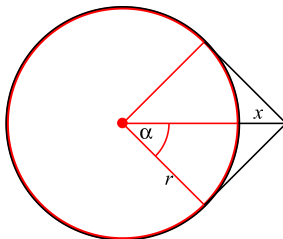
V jednom místě provaz vytáhneme, dokud se „nezarazí“ o Zemi. Do jaké výšky budeme moci provaz povytáhnout?

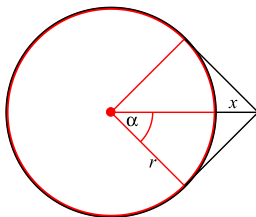
Provaz kolem zeměkoule 2

Předpokládejme, že Země je koule o poloměru $r = 6\,378\,000$ m. Kolem rovníku natáhneme provaz tak, aby Zemi těsně obepínal. Poté provaz prodloužíme o 1 metr.

Otázka 2

V jednom místě provaz vytáhneme, dokud se „nezarazí“ o Zemi. Do jaké výšky budeme moci provaz povytáhnout?





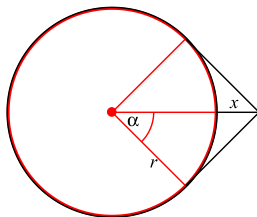
Řešení

Úloha vede na rovnici

$$2r(\operatorname{tg} \alpha - \alpha) = 1,$$

kterou nelze řešit analyticky.

Provaz kolem zeměkoule 2



Řešení

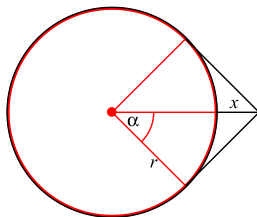
Úloha vede na rovnici

$$2r(\operatorname{tg} \alpha - \alpha) = 1,$$

kterou nelze řešit analyticky.

Hledané x pak dopočteme ze vztahu $x = r \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right)$.

Provaz kolem zeměkoule 2



Řešení

Úloha vede na rovnici

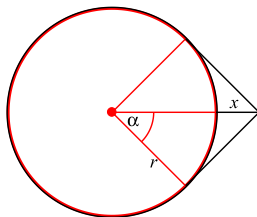
$$2r(\operatorname{tg} \alpha - \alpha) = 1,$$

kterou nelze řešit analyticky.

Hledané x pak dopočteme ze vztahu $x = r \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right)$.

Řešíme-li úlohu numericky, obdržíme výsledek $x \doteq 121,505$

Provaz kolem zeměkoule 2



Řešení

Úloha vede na rovnici

$$2r(\operatorname{tg} \alpha - \alpha) = 1,$$

kterou nelze řešit analyticky.

Hledané x pak dopočteme ze vztahu $x = r \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right)$.

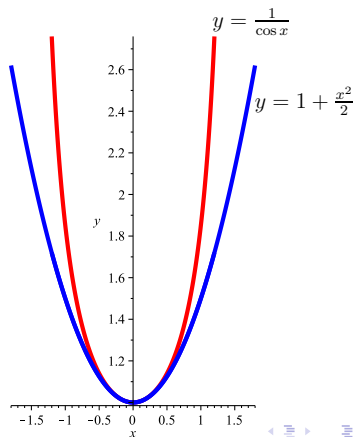
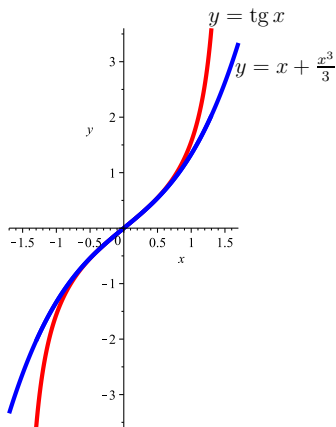
Řešíme-li úlohu numericky, obdržíme výsledek $x \doteq 121,505$ (metrů!).

Lze ukázat, že pro malé úhly α platí vztahy

$$\operatorname{tg} \alpha \doteq \alpha + \frac{\alpha^3}{3} \quad \text{a} \quad \frac{1}{\cos \alpha} \doteq 1 + \frac{\alpha^2}{2}. \quad (\heartsuit)$$

Lze ukázat, že pro malé úhly α platí vztahy

$$\operatorname{tg} \alpha \doteq \alpha + \frac{\alpha^3}{3} \quad \text{a} \quad \frac{1}{\cos \alpha} \doteq 1 + \frac{\alpha^2}{2}. \quad (\heartsuit)$$



Lze ukázat, že pro malé úhly α platí vztahy

$$\operatorname{tg} \alpha \doteq \alpha + \frac{\alpha^3}{3} \quad \text{a} \quad \frac{1}{\cos \alpha} \doteq 1 + \frac{\alpha^2}{2}. \quad (\heartsuit)$$

Rovnice $2r(\operatorname{tg} \alpha - \alpha) = 1$ pak (podle $(\heartsuit)$) přejde do tvaru $\frac{2r\alpha^3}{3} = 1$, kterou už vyřešit umíme.

Lze ukázat, že pro malé úhly α platí vztahy

$$\operatorname{tg} \alpha \doteq \alpha + \frac{\alpha^3}{3} \quad \text{a} \quad \frac{1}{\cos \alpha} \doteq 1 + \frac{\alpha^2}{2}. \quad (\heartsuit)$$

Rovnice $2r(\operatorname{tg} \alpha - \alpha) = 1$ pak (podle $(\heartsuit)$) přejde do tvaru $\frac{2r\alpha^3}{3} = 1$, kterou už vyřešit umíme.

Řešením rovnice $\frac{2r\alpha^3}{3} = 1$ (a tedy přibližným řešením rovnice $2r(\operatorname{tg} \alpha - \alpha) = 1$) je $\alpha = \sqrt[3]{\frac{3}{2r}}$.

Lze ukázat, že pro malé úhly α platí vztahy

$$\operatorname{tg} \alpha \doteq \alpha + \frac{\alpha^3}{3} \quad \text{a} \quad \frac{1}{\cos \alpha} \doteq 1 + \frac{\alpha^2}{2}. \quad (\heartsuit)$$

Rovnice $2r(\operatorname{tg} \alpha - \alpha) = 1$ pak (podle $(\heartsuit)$) přejde do tvaru $\frac{2r\alpha^3}{3} = 1$, kterou už vyřešit umíme.

Řešením rovnice $\frac{2r\alpha^3}{3} = 1$ (a tedy přibližným řešením rovnice $2r(\operatorname{tg} \alpha - \alpha) = 1$) je $\alpha = \sqrt[3]{\frac{3}{2r}}$.

S přihlédnutím k $(\heartsuit)$ pak dostaneme

$$x = r \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right) \doteq \frac{r\alpha^2}{2} = \frac{1}{4} \sqrt[3]{18r} \doteq 121,504.$$

1 Každé dva kruhy mají stejný obvod.

2 $\pi = 2$

3 Provaz kolem zeměkoule

4 Dvě kilometrové kolejnice

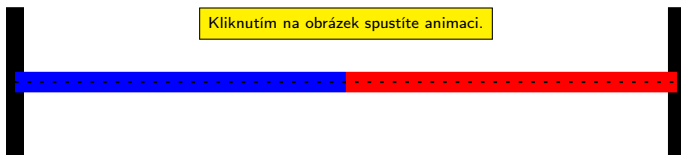
5 Míchání karet

6 Úloha o brachistochroně

7 Závěr

Dvě kilometrové kolejnice

Každá (kilometrová) kolejnice se vlivem tepla prodlouží o 1 milimetr. Jak vysoko se kolejnice zvednou?



Dvě kilometrové kolejnice

Každá (kilometrová) kolejnice se vlivem tepla prodlouží o 1 milimetr. Jak vysoko se kolejnice zvednou?



Dvě kilometrové kolejnice

Každá (kilometrová) kolejnice se vlivem tepla prodlouží o 1 milimetr. Jak vysoko se kolejnice zvednou?



Řešení – Pythagorova věta

$$v = \sqrt{1000,001^2 - 1000^2}$$

Dvě kilometrové kolejnice

Každá (kilometrová) kolejnice se vlivem tepla prodlouží o 1 milimetr. Jak vysoko se kolejnice zvednou?



Řešení – Pythagorova věta

$$v = \sqrt{1000,001^2 - 1000^2} = \sqrt{2,000001}$$

Dvě kilometrové kolejnice

Každá (kilometrová) kolejnice se vlivem tepla prodlouží o 1 milimetr. Jak vysoko se kolejnice zvednou?



Řešení – Pythagorova věta

$$v = \sqrt{1000,001^2 - 1000^2} = \sqrt{2,000001} \approx 1,4142$$

Dvě kilometrové kolejnice

Každá (kilometrová) kolejnice se vlivem tepla prodlouží o 1 milimetr. Jak vysoko se kolejnice zvednou?



Řešení – Pythagorova věta

$$v = \sqrt{1000,001^2 - 1000^2} = \sqrt{2,000001} \approx 1,4142 \text{ (metrů!)}$$

1 Každé dva kruhy mají stejný obvod.

2 $\pi = 2$

3 Provaz kolem zeměkoule

4 Dvě kilometrové kolejnice

5 Míchání karet

6 Úloha o brachistochroně

7 Závěr

Míchání karet

Na stole leží balíček 32 karet. Tento balíček rozdělíme na dvě poloviny a budeme provádět speciální míchání. Princip jednoduše vysvětlíme na osmi kartách. Pokud bychom měli karty (1,2,3,4,5,6,7,8), tak bychom po zamíchání dostali karty v pořadí (1,5,2,6,3,7,4,8).

Míchání karet

Na stole leží balíček 32 karet. Tento balíček rozdělíme na dvě poloviny a budeme provádět speciální míchání. Princip jednoduše vysvětlíme na osmi kartách. Pokud bychom měli karty (1,2,3,4,5,6,7,8), tak bychom po zamíchání dostali karty v pořadí (1,5,2,6,3,7,4,8).

Pozorování

Všech možných zamíchání balíčku 32 karet je přesně

$$32! = 263130836933693530167218012160000000 \doteq 2,63 \cdot 10^{35}.$$

Míchání karet

Na stole leží balíček 32 karet. Tento balíček rozdělíme na dvě poloviny a budeme provádět speciální míchání. Princip jednoduše vysvětlíme na osmi kartách. Pokud bychom měli karty (1,2,3,4,5,6,7,8), tak bychom po zamíchání dostali karty v pořadí (1,5,2,6,3,7,4,8).

Pozorování

Všech možných zamíchání balíčku 32 karet je přesně
 $32! = 263130836933693530167218012160000000 \doteq 2,63 \cdot 10^{35}$.

Úloha

Uvažujme náhodně promíchaný balíček 32 karet. Kolikrát za sebou musíme s tímto balíčkem provést výše uvedené míchání, abychom dostali stejně seřazený balíček, jako byl na začátku?

Míchání karet

Na stole leží balíček 32 karet. Tento balíček rozdělíme na dvě poloviny a budeme provádět speciální míchání. Princip jednoduše vysvětlíme na osmi kartách. Pokud bychom měli karty (1,2,3,4,5,6,7,8), tak bychom po zamíchání dostali karty v pořadí (1,5,2,6,3,7,4,8).

Pozorování

Všech možných zamíchání balíčku 32 karet je přesně
 $32! = 263130836933693530167218012160000000 \doteq 2,63 \cdot 10^{35}$.

Úloha

Uvažujme náhodně promíchaný balíček 32 karet. Kolikrát za sebou musíme s tímto balíčkem provést výše uvedené míchání, abychom dostali stejně seřazený balíček, jako byl na začátku?

Poznámka

Řešitelnost úlohy vyplývá z faktu, že počet všech zamíchání balíčku karet je konečný (viz pozorování výše).

Matematický popis našeho míchání

$$p(n) = \begin{cases} 2n - 1 & \text{pro } n \in \{1, 2, \dots, 16\}, \\ 2n - 32 & \text{pro } n \in \{17, 18, \dots, 32\}. \end{cases}$$

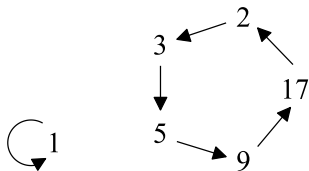
Matematický popis našeho míchání

$$p(n) = \begin{cases} 2n - 1 & \text{pro } n \in \{1, 2, \dots, 16\}, \\ 2n - 32 & \text{pro } n \in \{17, 18, \dots, 32\}. \end{cases}$$



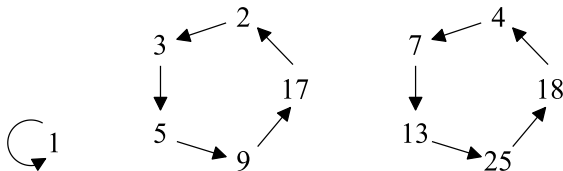
Matematický popis našeho míchání

$$p(n) = \begin{cases} 2n - 1 & \text{pro } n \in \{1, 2, \dots, 16\}, \\ 2n - 32 & \text{pro } n \in \{17, 18, \dots, 32\}. \end{cases}$$



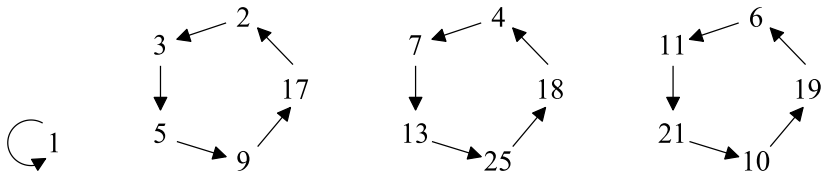
Matematický popis našeho míchání

$$p(n) = \begin{cases} 2n - 1 & \text{pro } n \in \{1, 2, \dots, 16\}, \\ 2n - 32 & \text{pro } n \in \{17, 18, \dots, 32\}. \end{cases}$$



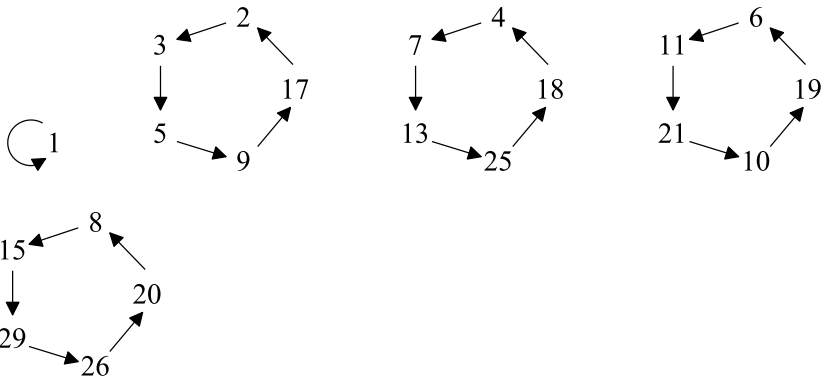
Matematický popis našeho míchání

$$p(n) = \begin{cases} 2n - 1 & \text{pro } n \in \{1, 2, \dots, 16\}, \\ 2n - 32 & \text{pro } n \in \{17, 18, \dots, 32\}. \end{cases}$$



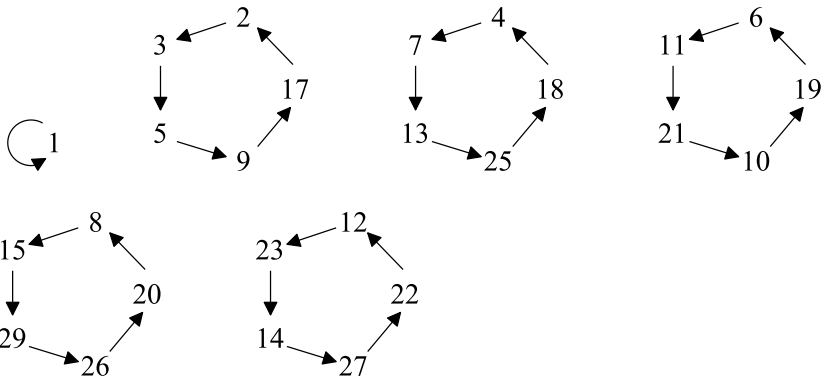
Matematický popis našeho míchání

$$p(n) = \begin{cases} 2n - 1 & \text{pro } n \in \{1, 2, \dots, 16\}, \\ 2n - 32 & \text{pro } n \in \{17, 18, \dots, 32\}. \end{cases}$$



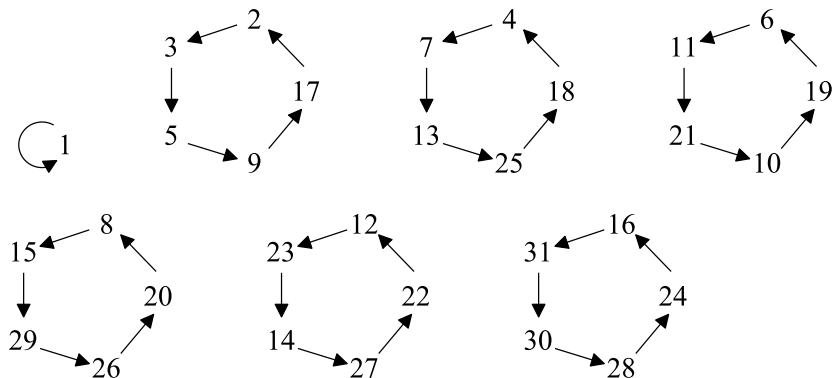
Matematický popis našeho míchání

$$p(n) = \begin{cases} 2n - 1 & \text{pro } n \in \{1, 2, \dots, 16\}, \\ 2n - 32 & \text{pro } n \in \{17, 18, \dots, 32\}. \end{cases}$$



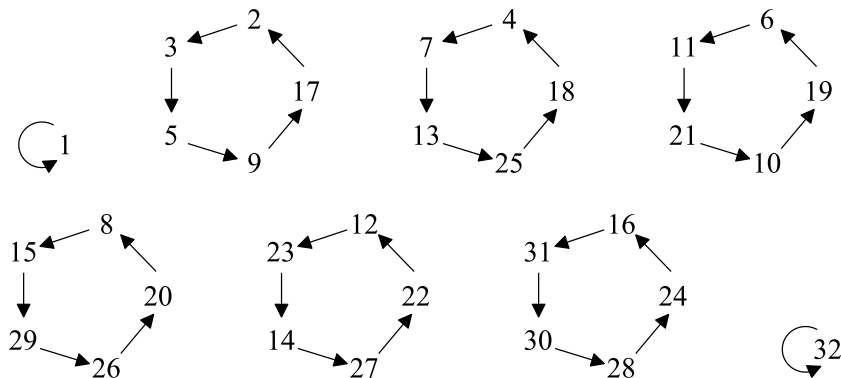
Matematický popis našeho míchání

$$p(n) = \begin{cases} 2n - 1 & \text{pro } n \in \{1, 2, \dots, 16\}, \\ 2n - 32 & \text{pro } n \in \{17, 18, \dots, 32\}. \end{cases}$$



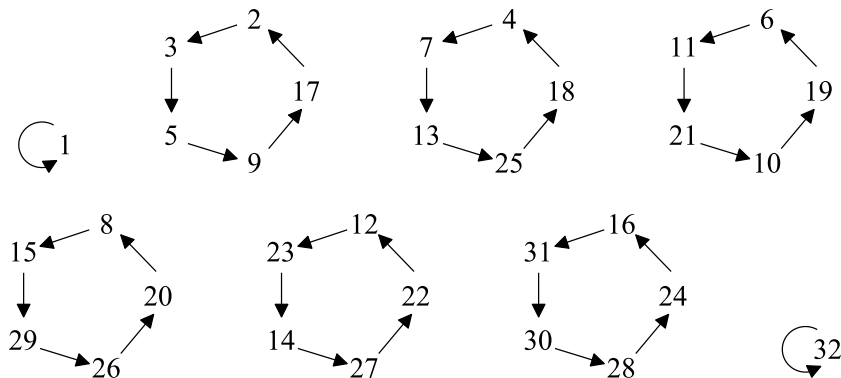
Matematický popis našeho míchání

$$p(n) = \begin{cases} 2n - 1 & \text{pro } n \in \{1, 2, \dots, 16\}, \\ 2n - 32 & \text{pro } n \in \{17, 18, \dots, 32\}. \end{cases}$$



Matematický popis našeho míchání

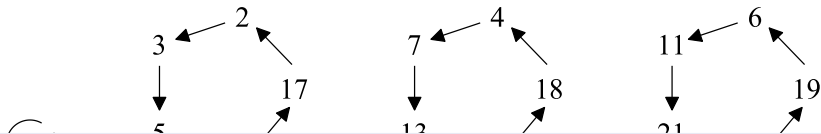
$$p(n) = \begin{cases} 2n - 1 & \text{pro } n \in \{1, 2, \dots, 16\}, \\ 2n - 32 & \text{pro } n \in \{17, 18, \dots, 32\}. \end{cases}$$



Stačí tedy pouze 5 míchání!!!

Matematický popis našeho míchání

$$p(n) = \begin{cases} 2n - 1 & \text{pro } n \in \{1, 2, \dots, 16\}, \\ 2n - 32 & \text{pro } n \in \{17, 18, \dots, 32\}. \end{cases}$$



[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32]

[1,17,2,18,3,19,4,20,5,21,6,22,7,23,8,24,9,25,10,26,11,27,12,28,13,29,14,30,15,31,16,32]

[1,9,17,25,2,10,18,26,3,11,19,27,4,12,20,28,5,13,21,29,6,14,22,30,7,15,23,31,8,16,24,32]

[1,5,9,13,17,21,25,29,2,6,10,14,18,22,26,30,3,7,11,15,19,23,27,31,4,8,12,16,20,24,28,32]

[1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30,32]

[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32]

26

27

28

29

Stačí tedy pouze 5 míchání!!!

Jaký by byl minimální počet zamíchání, pokud bychom místo 32 karet měli karet pouze 28?

Jaký by byl minimální počet zamíchání, pokud bychom místo 32 karet měli karty pouze 28?

Odpověď

Hledaný minimální počet je 18.

1 Každé dva kruhy mají stejný obvod.

2 $\pi = 2$

3 Provaz kolem zeměkoule

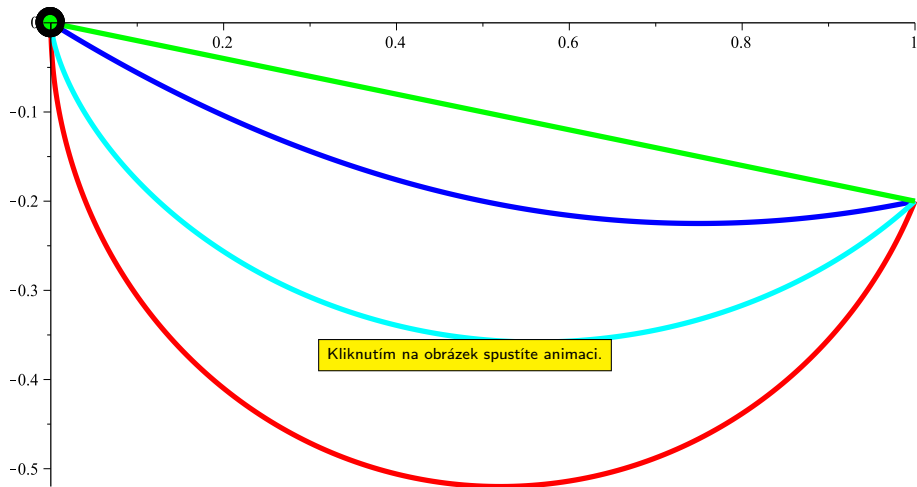
4 Dvě kilometrové kolejnice

5 Míchání karet

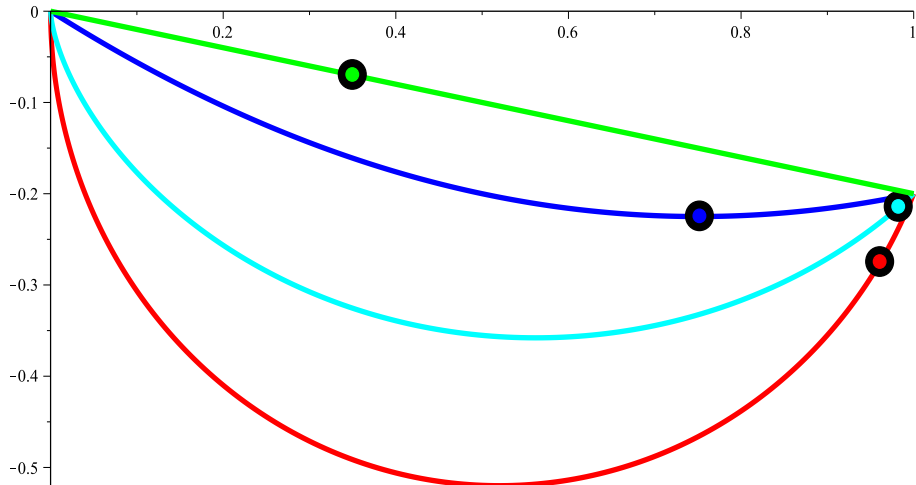
6 Úloha o brachistochroně

7 Závěr

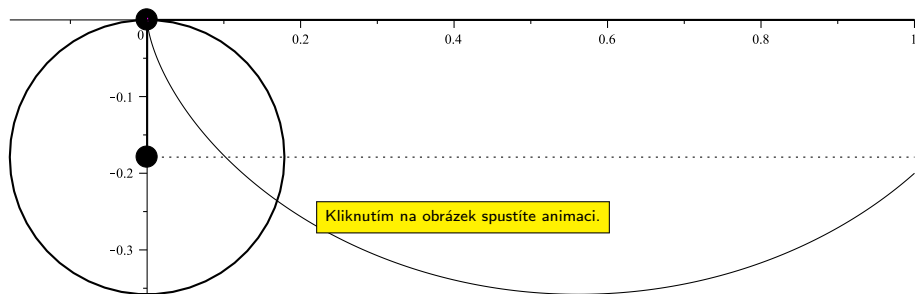
Úloha o brachistochroně



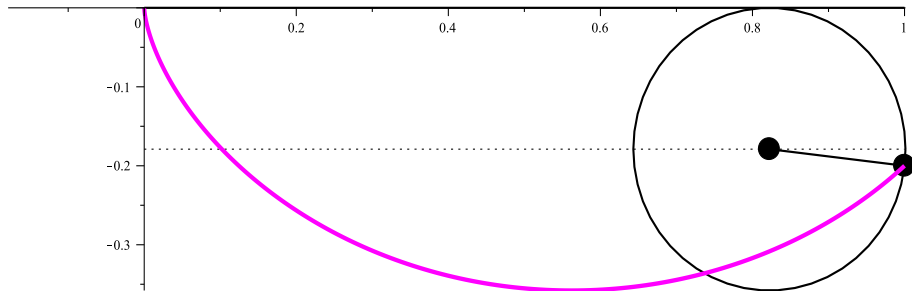
Úloha o brachistochroně



Úloha o brachistochroně



Úloha o brachistochroně



- 1 Každé dva kruhy mají stejný obvod.
- 2 $\pi = 2$
- 3 Provaz kolem zeměkoule
- 4 Dvě kilometrové kolejnice
- 5 Míchání karet
- 6 Úloha o brachistochroně
- 7 Závěr



JIŘÍ BOUCHALA, Matematická analýza ve Vesmíru.
(<http://homel.vsb.cz/~bou10/MA1/ma1.html>)



PETR KOVÁŘ.



D. ACHESON, 1089 a vše, co s tím souvisí. Moment překvapení
v matematice. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, **49** (2004),
č. 1, 24–31.
(<http://dml.cz/handle/10338.dmlcz/141206>)



<http://cs.wikipedia.org/wiki/Malfattiho%2520kruhy?oldid=10902717>



L. PICK, Přednáška s nesmyslně dlouhým názvem.

Nevěřme vždy své intuici.

Nevěřme vždy své intuici.

Děkuji za pozornost !!!