

Co není možné a jak to dokázat

ŠkoMaM

KAM VŠB-TU Ostrava, 26.1.2017

Mirko Rokyta
(KMA MFF UK Praha)

Co je matematika a proč se jí tolik lidí bojí?

Co je matematika a proč se jí tolik lidí bojí?

Matematika $\neq$ počítání.

Co je matematika a proč se jí tolik lidí bojí?

Matematika $\neq$ počítání.

Matematika je spíše způsob,
jakým uvažujeme o problémech.

Co to znamená, když se řekne, že něco "nejde"?

Co to znamená, když se řekne, že něco "nejde"?
Pozor, nezaměňovat s výrokem "Já to neumím".

Co to znamená, když se řekne, že něco "nejde"?
Pozor, nezaměňovat s výrokem "Já to neumím".

(Tomáš Baťa: Neříkej, že to nejde, řekni, že to neumíš.)

Co to znamená, když se řekne, že něco "nejde"?
Pozor, nezaměňovat s výrokem "Já to neumím".

(Tomáš Baťa: Neříkej, že to nejde, řekni, že to neumíš.)

(Opravdu je to tak? Co když některé věci opravdu nejdou udělat?)

Co to znamená, když se řekne, že něco "nejde"?
Pozor, nezaměňovat s výrokem "Já to neumím".

(Tomáš Baťa: Neříkej, že to nejde, řekni, že to neumíš.)

(Opravdu je to tak? Co když některé věci opravdu nejdou udělat?)

Pokud si matematik myslí, že něco NELZE, měl by umět
DOKÁZAT, že to nelze.

Příklady:

- V padesáti nelze v 21. století hrát špičkově hokej v NHL.

Příklady:

- V padesáti nelze v 21. století hrát špičkově hokej v NHL. (Opravdu?)

Příklady:

- V padesáti nelze v 21. století hrát špičkově hokej v NHL. (Opravdu?)
- Žádnou odmocninu přirozeného čísla nelze napsat jako podíl dvou přirozených čísel.

Příklady:

- V padesáti nelze v 21. století hrát špičkově hokej v NHL. (Opravdu?)
- Žádnou odmocninu přirozeného čísla nelze napsat jako podíl dvou přirozených čísel. (A co $\sqrt{4} = \frac{2}{1}$?)

Příklady:

- V padesáti nelze v 21. století hrát špičkově hokej v NHL. (Opravdu?)
- Žádnou odmocninu přirozeného čísla nelze napsat jako podíl dvou přirozených čísel. (A co $\sqrt{4} = \frac{2}{1}$?)
- Žádnou odmocninu přirozeného čísla, **které není druhou mocninou přirozeného čísla**, nelze napsat jako podíl dvou přirozených čísel.

Příklady:

- V padesáti nelze v 21. století hrát špičkově hokej v NHL. (Opravdu?)
- Žádnou odmocninu přirozeného čísla nelze napsat jako podíl dvou přirozených čísel. (A co $\sqrt{4} = \frac{2}{1}$?)
- Žádnou odmocninu přirozeného čísla, které není druhou mocninou přirozeného čísla, nelze napsat jako podíl dvou přirozených čísel. (To je pravda.

Příklady:

- V padesáti nelze v 21. století hrát špičkově hokej v NHL. (Opravdu?)
- Žádnou odmocninu přirozeného čísla nelze napsat jako podíl dvou přirozených čísel. (A co $\sqrt{4} = \frac{2}{1}$?)
- Žádnou odmocninu přirozeného čísla, které není druhou mocninou přirozeného čísla, nelze napsat jako podíl dvou přirozených čísel. (To je pravda. Uměli byste to dokázat?)

Příklady:

- V padesáti nelze v 21. století hrát špičkově hokej v NHL. (Opravdu?)
- Žádnou odmocninu přirozeného čísla nelze napsat jako podíl dvou přirozených čísel. (A co $\sqrt{4} = \frac{2}{1}$?)
- Žádnou odmocninu přirozeného čísla, **které není druhou mocninou přirozeného čísla**, nelze napsat jako podíl dvou přirozených čísel. (To je pravda. Uměli byste to dokázat? Za chvíli kousek z toho zkusíme.)

Příklady:

- V padesáti nelze v 21. století hrát špičkově hokej v NHL. (Opravdu?)
- Žádnou odmocninu přirozeného čísla nelze napsat jako podíl dvou přirozených čísel. (A co $\sqrt{4} = \frac{2}{1}$?)
- Žádnou odmocninu přirozeného čísla, **které není druhou mocninou přirozeného čísla** , nelze napsat jako podíl dvou přirozených čísel. (To je pravda. Uměli byste to dokázat? Za chvíli kousek z toho zkusíme.)

Základní otázka:

Jak se proboha dokazuje, že něco **nejde**?

Příklady:

- V padesáti nelze v 21. století hrát špičkově hokej v NHL. (Opravdu?)
- Žádnou odmocninu přirozeného čísla nelze napsat jako podíl dvou přirozených čísel. (A co $\sqrt{4} = \frac{2}{1}$?)
- Žádnou odmocninu přirozeného čísla, **které není druhou mocninou přirozeného čísla** , nelze napsat jako podíl dvou přirozených čísel. (To je pravda. Uměli byste to dokázat? Za chvíli kousek z toho zkusíme.)

Základní otázka:

Jak se proboha dokazuje, že něco **nejde**?

Jednoduchá odpověď:

Příklady:

- V padesáti nelze v 21. století hrát špičkově hokej v NHL. (Opravdu?)
- Žádnou odmocninu přirozeného čísla nelze napsat jako podíl dvou přirozených čísel. (A co $\sqrt{4} = \frac{2}{1}$?)
- Žádnou odmocninu přirozeného čísla, **které není druhou mocninou přirozeného čísla** , nelze napsat jako podíl dvou přirozených čísel. (To je pravda. Uměli byste to dokázat? Za chvíli kousek z toho zkusíme.)

Základní otázka:

Jak se proboha dokazuje, že něco **nejde**?

Jednoduchá odpověď: **Velmi těžce.**

Co je dnes na programu:

- 1 Problém vykousnuté šachovnice.

Co je dnes na programu:

- 1 Problém vykousnuté šachovnice.
- 2 Problém odmocniny ze dvou a vůbec odmocnin.

Co je dnes na programu:

- 1 Problém vykousnuté šachovnice.
- 2 Problém odmocniny ze dvou a vůbec odmocnin.
- 3 Kam lze a kam nelze doskákat (na čtverečkovém papíru) - tzv. *Conway's Soldiers Problem*.

Co je dnes na programu:

- 1 Problém vykousnutí šachovnice.
- 2 Problém odmocniny ze dvou a vůbec odmocnin.
- 3 Kam lze a kam nelze doskákat (na čtverečkovém papíru) - tzv. *Conway's Soldiers Problem*.
- 4 Trisekce úhlu, kvadratura kruhu, duplikace krychle.

Co je dnes na programu:

- 1 Problém vykousnutí šachovnice.
- 2 Problém odmocniny ze dvou a vůbec odmocnin.
- 3 Kam lze a kam nelze doskákat (na čtverečkovém papíru) - tzv. *Conway's Soldiers Problem*.
- 4 Trisekce úhlu, kvadratura kruhu, duplikace krychle.

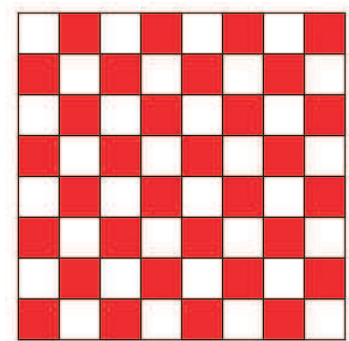
Všechny tyto problémy mají jedno společné: tvrdí se v nich, že něco **nelze provést**,

Co je dnes na programu:

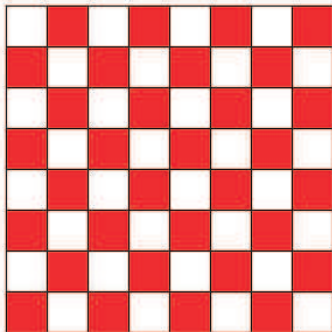
- 1 Problém vykousnutí šachovnice.
- 2 Problém odmocniny ze dvou a vůbec odmocnin.
- 3 Kam lze a kam nelze doskákat (na čtverečkovém papíru) - tzv. *Conway's Soldiers Problem*.
- 4 Trisekce úhlu, kvadratura kruhu, duplikace krychle.

Všechny tyto problémy mají jedno společné: tvrdí se v nich, že něco **nelze provést**, a navíc se **umí dokázat, že to nelze provést**.

2. Problém vykousnuté šachovnice

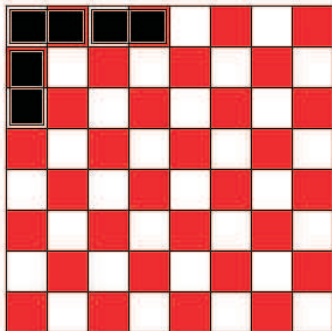


2. Problém vykousnuté šachovnice



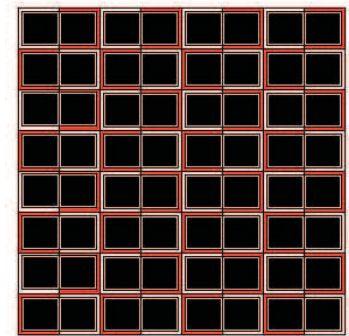
Otázka: Lze pokrýt šachovnici kostkami domina?

2. Problém vykousnuté šachovnice



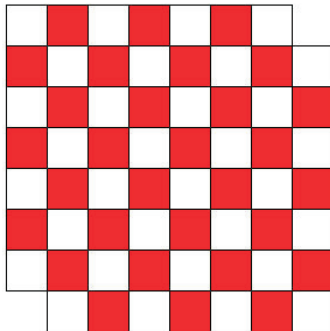
Začít je možno například takto...

2. Problém vykousnuté šachovnice



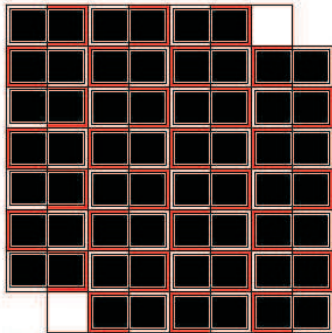
... a ... ano, samozřejmě to lze.

2. Problém vykousnuté šachovnice



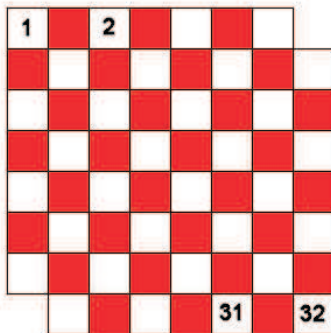
Otázka č.2: Lze pokrýt **takto "vykousnutou"** šachovnici kostkami domina?

2. Problém vykousnuté šachovnice



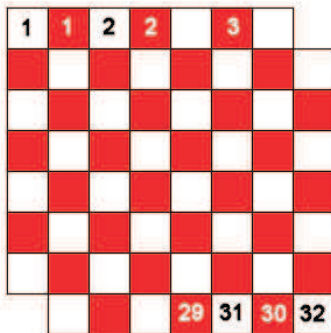
Je to problém typu "nelze" nebo problém typu "já to neumím"?

2. Problém vykousnuté šachovnice



Bílých polí je 32.

2. Problém vykousnuté šachovnice



Červených polí je 30.

2. Problém vykousnuté šachovnice

Tvrzení

"Vykousnutou" šachovnici (ve které jsme odstranili dva protější rohy) nelze pokrýt kostkami domina.

2. Problém vykousnuté šachovnice

Tvrzení

"Vykousnutou" šachovnici (ve které jsme odstranili dva protější rohy) nelze pokrýt kostkami domina.

Důkaz.

2. Problém vykousnuté šachovnice

Tvrzení

"Vykousnutou" šachovnici (ve které jsme odstranili dva protější rohy) nelze pokrýt kostkami domina.

Důkaz.

- Bílých polí na vykousnuté šachovnici je 32.

2. Problém vykousnuté šachovnice

Tvrzení

"Vykousnutou" šachovnici (ve které jsme odstranili dva protější rohy) nelze pokrýt kostkami domina.

Důkaz.

- Bílých polí na vykousnuté šachovnici je 32.
- Červených polí na vykousnuté šachovnici je 30.

2. Problém vykousnuté šachovnice

Tvrzení

"Vykousnutou" šachovnici (ve které jsme odstranili dva protější rohy) nelze pokrýt kostkami domina.

Důkaz.

- Bílých polí na vykousnuté šachovnici je 32.
- Červených polí na vykousnuté šachovnici je 30.
- Dominová kostka pokryje vždy právě jedno bílé a právě jedno červené pole.

2. Problém vykousnuté šachovnice

Tvrzení

"Vykousnutou" šachovnici (ve které jsme odstranili dva protější rohy) nelze pokrýt kostkami domina.

Důkaz.

- Bílých polí na vykousnuté šachovnici je 32.
- Červených polí na vykousnuté šachovnici je 30.
- Dominová kostka pokryje vždy právě jedno bílé a právě jedno červené pole.
- Když položím **jakkoli** 30 kostek domina, zbudou 2 bílá pole.

2. Problém vykousnuté šachovnice

Tvrzení

"Vykousnutou" šachovnici (ve které jsme odstranili dva protější rohy) nelze pokrýt kostkami domina.

Důkaz.

- Bílých polí na vykousnuté šachovnici je 32.
- Červených polí na vykousnuté šachovnici je 30.
- Dominová kostka pokryje vždy právě jedno bílé a právě jedno červené pole.
- Když položím **jakkoli** 30 kostek domina, zbudou 2 bílá pole.
- Ale dvě pole stejné barvy nelze pokrýt jednou kostkou domina, protože pole stejné barvy neleží vedle sebe.

3. Odmocňujeme

Problém: lze číslo $\sqrt{2}$ napsat jako podíl dvou přirozených čísel?

3. Odmocňujeme

Problém: lze číslo $\sqrt{2}$ napsat jako podíl dvou přirozených čísel? (tj. vyjádřit ho ve tvaru zlomku?)

3. Odmocňujeme

Problém: lze číslo $\sqrt{2}$ napsat jako podíl dvou přirozených čísel? (tj. vyjádřit ho ve tvaru zlomku?) (tj. je $\sqrt{2}$ **racionální** číslo?)

3. Odmocňujeme

Problém: lze číslo $\sqrt{2}$ napsat jako podíl dvou přirozených čísel? (tj. vyjádřit ho ve tvaru zlomku?) (tj. je $\sqrt{2}$ **racionální** číslo?)

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

3. Odmocňujeme

Problém: lze číslo $\sqrt{2}$ napsat jako podíl dvou přirozených čísel? (tj. vyjádřit ho ve tvaru zlomku?) (tj. je $\sqrt{2}$ **racionální** číslo?)

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad \text{kde } p, q \text{ už nemají společného dělitele}$$

3. Odmocňujeme

Problém: lze číslo $\sqrt{2}$ napsat jako podíl dvou přirozených čísel? (tj. vyjádřit ho ve tvaru zlomku?) (tj. je $\sqrt{2}$ **racionální** číslo?)

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad \text{kde } p, q \text{ už nemají společného dělitele}$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

3. Odmocňujeme

Problém: Lze číslo $\sqrt{2}$ napsat jako podíl dvou přirozených čísel? (tj. vyjádřit ho ve tvaru zlomku?) (tj. je $\sqrt{2}$ **racionální** číslo?)

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad \text{kde } p, q \text{ už nemají společného dělitele}$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$2q^2 = p^2$$

3. Odmocňujeme

Problém: lze číslo $\sqrt{2}$ napsat jako podíl dvou přirozených čísel? (tj. vyjádřit ho ve tvaru zlomku?) (tj. je $\sqrt{2}$ **racionální** číslo?)

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad \text{kde } p, q \text{ už nemají společného dělitele}$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$2q^2 = p^2 \implies p^2 \text{ sudé}$$

3. Odmocňujeme

Problém: lze číslo $\sqrt{2}$ napsat jako podíl dvou přirozených čísel? (tj. vyjádřit ho ve tvaru zlomku?) (tj. je $\sqrt{2}$ **racionální** číslo?)

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad \text{kde } p, q \text{ už nemají společného dělitele}$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$2q^2 = p^2 \implies p^2 \text{ sudé} \implies p \text{ sudé}$$

3. Odmocňujeme

Problém: lze číslo $\sqrt{2}$ napsat jako podíl dvou přirozených čísel? (tj. vyjádřit ho ve tvaru zlomku?) (tj. je $\sqrt{2}$ **racionální** číslo?)

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad \text{kde } p, q \text{ už nemají společného dělitele}$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$2q^2 = p^2 \implies p^2 \text{ sudé} \implies p \text{ sudé} \implies p = 2k$$

3. Odmocňujeme

Problém: lze číslo $\sqrt{2}$ napsat jako podíl dvou přirozených čísel? (tj. vyjádřit ho ve tvaru zlomku?) (tj. je $\sqrt{2}$ **racionální** číslo?)

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad \text{kde } p, q \text{ už nemají společného dělitele}$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$2q^2 = p^2 \implies p^2 \text{ sudé} \implies p \text{ sudé} \implies p = 2k$$

$$2q^2 = 4k^2$$

3. Odmocňujeme

Problém: lze číslo $\sqrt{2}$ napsat jako podíl dvou přirozených čísel? (tj. vyjádřit ho ve tvaru zlomku?) (tj. je $\sqrt{2}$ **racionální** číslo?)

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad \text{kde } p, q \text{ už nemají společného dělitele}$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$2q^2 = p^2 \implies p^2 \text{ sudé} \implies p \text{ sudé} \implies p = 2k$$

$$2q^2 = 4k^2$$

$$q^2 = 2k^2$$

3. Odmocňujeme

Problém: lze číslo $\sqrt{2}$ napsat jako podíl dvou přirozených čísel? (tj. vyjádřit ho ve tvaru zlomku?) (tj. je $\sqrt{2}$ **racionální** číslo?)

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad \text{kde } p, q \text{ už nemají společného dělitele}$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$2q^2 = p^2 \implies p^2 \text{ sudé} \implies p \text{ sudé} \implies p = 2k$$

$$2q^2 = 4k^2$$

$$q^2 = 2k^2 \implies q^2 \text{ sudé}$$

3. Odmocňujeme

Problém: lze číslo $\sqrt{2}$ napsat jako podíl dvou přirozených čísel? (tj. vyjádřit ho ve tvaru zlomku?) (tj. je $\sqrt{2}$ **racionální** číslo?)

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad \text{kde } p, q \text{ už nemají společného dělitele}$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$2q^2 = p^2 \implies p^2 \text{ sudé} \implies p \text{ sudé} \implies p = 2k$$

$$2q^2 = 4k^2$$

$$q^2 = 2k^2 \implies q^2 \text{ sudé} \implies q \text{ sudé}$$

3. Odmocňujeme

Problém: lze číslo $\sqrt{2}$ napsat jako podíl dvou přirozených čísel? (tj. vyjádřit ho ve tvaru zlomku?) (tj. je $\sqrt{2}$ **racionální** číslo?)

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad \text{kde } p, q \text{ už nemají společného dělitele}$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$2q^2 = p^2 \implies p^2 \text{ sudé} \implies p \text{ sudé} \implies p = 2k$$

$$2q^2 = 4k^2$$

$$q^2 = 2k^2 \implies q^2 \text{ sudé} \implies q \text{ sudé} \implies q = 2m$$

3. Odmocňujeme

Problém: lze číslo $\sqrt{2}$ napsat jako podíl dvou přirozených čísel? (tj. vyjádřit ho ve tvaru zlomku?) (tj. je $\sqrt{2}$ **racionální** číslo?)

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad \text{kde } p, q \text{ už nemají společného dělitele}$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$2q^2 = p^2 \implies p^2 \text{ sudé} \implies p \text{ sudé} \implies p = 2k$$

$$2q^2 = 4k^2$$

$$q^2 = 2k^2 \implies q^2 \text{ sudé} \implies q \text{ sudé} \implies q = 2m$$

Příklad tzv. **sporu**, který ukazuje, že výchozí předpoklad byl mylný.

3. Odmocňujeme

Problém: lze číslo $\sqrt{2}$ napsat jako podíl dvou přirozených čísel? (tj. vyjádřit ho ve tvaru zlomku?) (tj. je $\sqrt{2}$ **racionální** číslo?)

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad \text{kde } p, q \text{ už nemají společného dělitele}$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$2q^2 = p^2 \implies p^2 \text{ sudé} \implies p \text{ sudé} \implies p = 2k$$

$$2q^2 = 4k^2$$

$$q^2 = 2k^2 \implies q^2 \text{ sudé} \implies q \text{ sudé} \implies q = 2m$$

Příklad tzv. **sporu**, který ukazuje, že výchozí předpoklad byl mylný.

Podobně ani například $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\dots$,

3. Odmocňujeme

Problém: lze číslo $\sqrt{2}$ napsat jako podíl dvou přirozených čísel? (tj. vyjádřit ho ve tvaru zlomku?) (tj. je $\sqrt{2}$ **racionální** číslo?)

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad \text{kde } p, q \text{ už nemají společného dělitele}$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$2q^2 = p^2 \implies p^2 \text{ sudé} \implies p \text{ sudé} \implies p = 2k$$

$$2q^2 = 4k^2$$

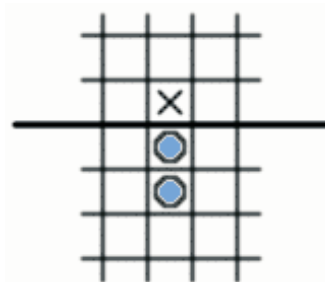
$$q^2 = 2k^2 \implies q^2 \text{ sudé} \implies q \text{ sudé} \implies q = 2m$$

Příklad tzv. **sporu**, který ukazuje, že výchozí předpoklad byl mylný.

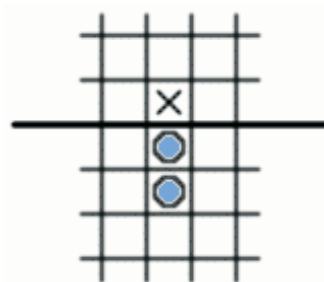
Podobně ani například $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\dots$, ale ani $\sqrt[3]{2}$ nejsou racionální (zkuste si to)...

4. Do které řady lze doskákat?

4. Do které řady lze doskákat?

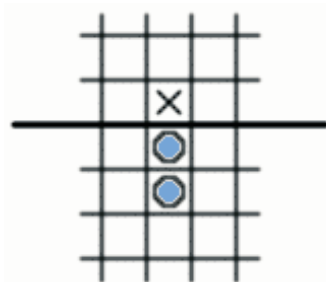


4. Do které řady lze doskát?



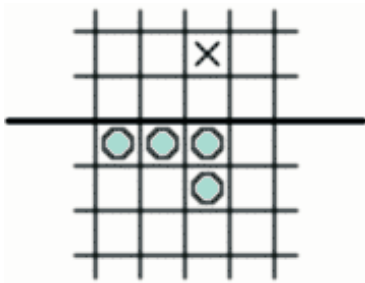
Konfigurace pro skok do první řady za bariéru je triviální.

4. Do které řady lze doskákat?



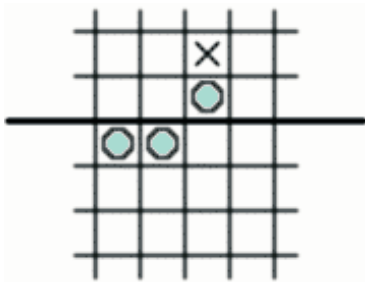
Konfigurace pro skok do první řady za bariéru je triviální.
Uměli byste najít konfiguraci, pomocí které lze doskákat
do druhé řady?

4. Do které řady lze doskákat?



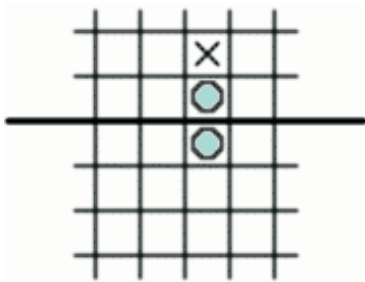
To je ona. Věříte?

4. Do které řady lze doskákat?



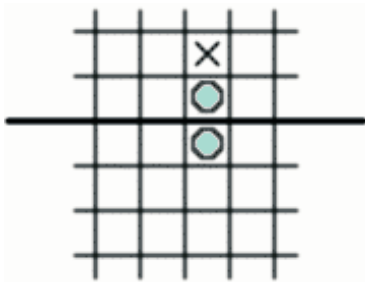
Přeskočený kámen je potřeba odstranit.

4. Do které řady lze doskákat?



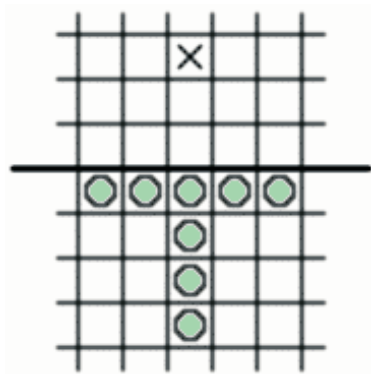
... a poslední skok už je jasný.

4. Do které řady lze doskákat?

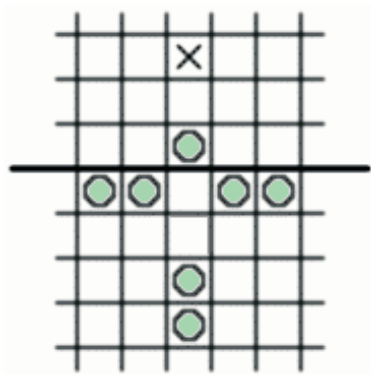


... a poslední skok už je jasný. A co třetí řada?

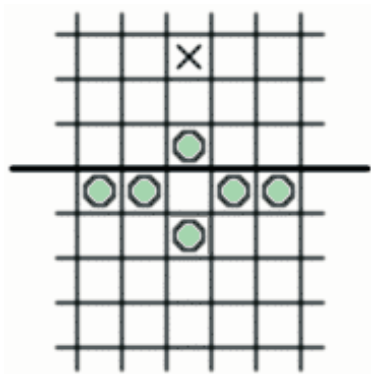
4. Do které řady lze doskákat?



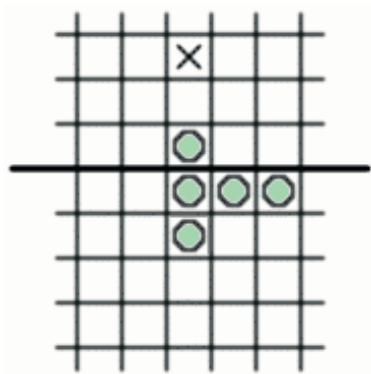
4. Do které řady lze doskákat?



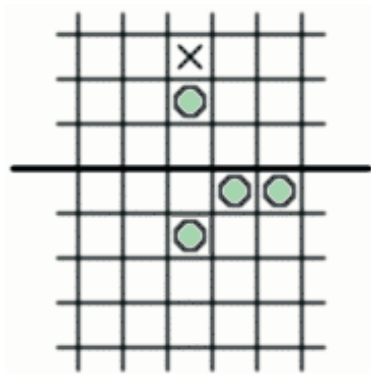
4. Do které řady lze doskákat?



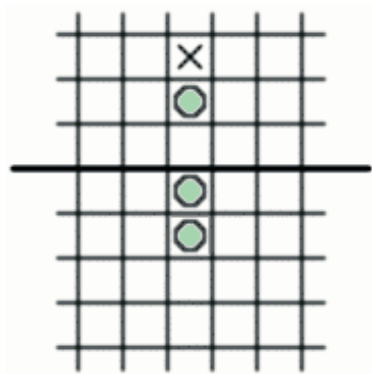
4. Do které řady lze doskákat?



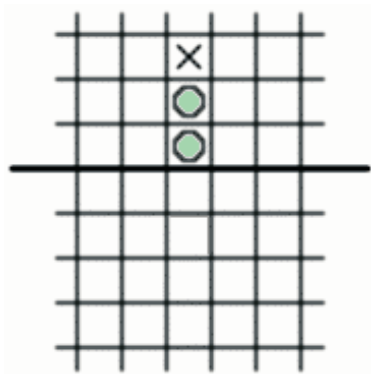
4. Do které řady lze doskákat?



4. Do které řady lze doskákat?



4. Do které řady lze doskákat?



4. Do které řady lze doskákat?

Krátké shrnutí:

4. Do které řady lze doskákat?

Krátké shrnutí:

- K doskákání do první řady byly potřeba 2 kameny.

4. Do které řady lze doskákat?

Krátké shrnutí:

- K doskákání do první řady byly potřeba 2 kameny.
- K doskákání do druhé řady byly potřeba 4 kameny.

4. Do které řady lze doskákat?

Krátké shrnutí:

- K doskákání do první řady byly potřeba 2 kameny.
- K doskákání do druhé řady byly potřeba 4 kameny.
- K doskákání do třetí řady bylo potřeba 8 kamenů.

4. Do které řady lze doskákat?

Krátké shrnutí:

- K doskákání do první řady byly potřeba 2 kameny.
- K doskákání do druhé řady byly potřeba 4 kameny.
- K doskákání do třetí řady bylo potřeba 8 kamenů.
- Uměli byste doskákat do čtvrté řady?

4. Do které řady lze doskákat?

Krátké shrnutí:

- K doskákání do první řady byly potřeba 2 kameny.
- K doskákání do druhé řady byly potřeba 4 kameny.
- K doskákání do třetí řady bylo potřeba 8 kamenů.
- Uměli byste doskákat do čtvrté řady?
- A kolik kamenů je k tomu minimálně potřeba?

4. Do které řady lze doskákat?

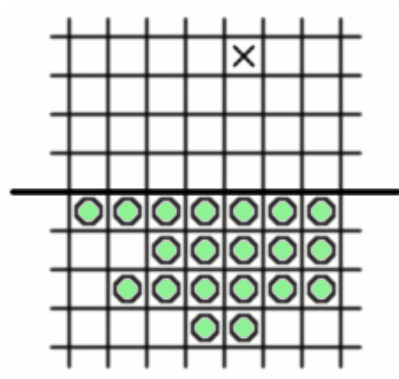
Krátké shrnutí:

- K doskákání do první řady byly potřeba 2 kameny.
- K doskákání do druhé řady byly potřeba 4 kameny.
- K doskákání do třetí řady bylo potřeba 8 kamenů.

- Uměli byste doskákat do čtvrté řady?
- A kolik kamenů je k tomu minimálně potřeba?

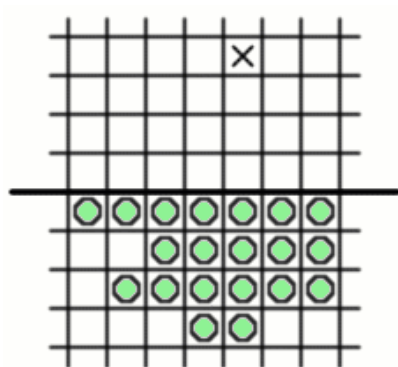
Překvapení č. 1: Je potřeba alespoň 20 kamenů.

4. Do které řady lze doskákat?



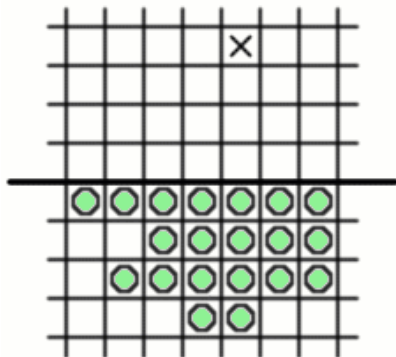
Toto je ona konfigurace.

4. Do které řady lze doskákat?



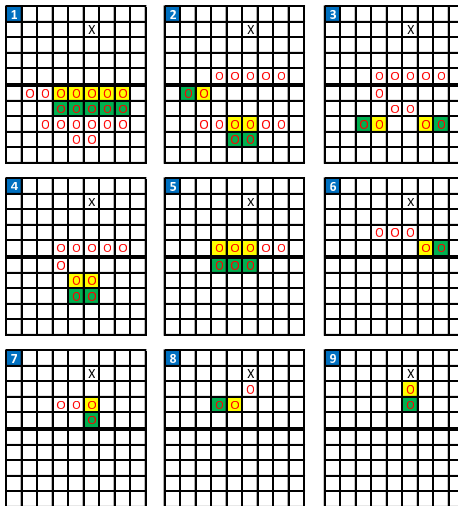
Toto je ona konfigurace. (Skákejte za domácí cvičení.)

4. Do které řady lze doskákat?



Toto je ona konfigurace. (Skákejte za domácí cvičení.)
(Případně se pokuste najít konfiguraci s méně než 20 kameny.

4. Do které řady lze doskákat?



Skáčíme do čtvrté řady - zelení skáčíou přes žluté

4. Do které řady lze doskákat?

Zásadní otázka:

4. Do které řady lze doskákat?

Zásadní otázka:

- Kolik je tedy potřeba kamenů, bychom doskákali do páté řady?

4. Do které řady lze doskákat?

Zásadní otázka:

- Kolik je tedy potřeba kamenů, bychom doskákali do páté řady?
- 2, 4, 8, 20, ??

4. Do které řady lze doskákat?

Zásadní otázka:

- Kolik je tedy potřeba kamenů, bychom doskákali do páté řady?
- 2, 4, 8, 20, ??

Překvapení č. 2:

Do páté (a tedy ani do žádné další řady) **NELZE** doskákat pomocí žádné konfigurace konečně mnoha kamenů, ležících "pod bariérou".

4. Do které řady lze doskákat?

Zásadní otázka:

- Kolik je tedy potřeba kamenů, bychom doskákali do páté řady?
- 2, 4, 8, 20, ??

Překvapení č. 2:

Do páté (a tedy ani do žádné další řady) **NELZE** doskákat pomocí žádné konfigurace konečně mnoha kamenů, ležících "pod bariérou".

Umíme to dokázat?

4. Do které řady lze doskákat?

Zásadní otázka:

- Kolik je tedy potřeba kamenů, bychom doskákali do páté řady?
- 2, 4, 8, 20, ??

Překvapení č. 2:

Do páté (a tedy ani do žádné další řady) **NELZE** doskákat pomocí žádné konfigurace konečně mnoha kamenů, ležících "pod bariérou".

Umíme to dokázat?

ANO. Umíme dokázat, že v tomto případě to **NELZE**.

4. Do které řady lze doskákat?

Zásadní otázka:

- Kolik je tedy potřeba kamenů, bychom doskákali do páté řady?
- 2, 4, 8, 20, ??

Překvapení č. 2:

Do páté (a tedy ani do žádné další řady) **NELZE** doskákat pomocí žádné konfigurace konečně mnoha kamenů, ležících "pod bariérou".

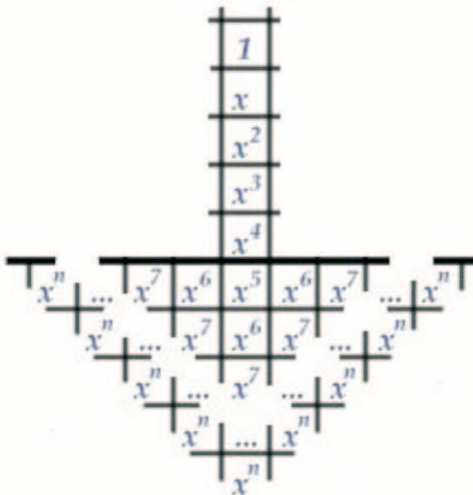
Umíme to dokázat?

ANO. Umíme dokázat, že v tomto případě to NELZE.

(Ani ranní ptáče nedoskáče dál, než do čtvrté řady.)

4. Do které řady lze doskákat?

První krok Conwayova důkazu: chytré očíslování polí.



4. Do které řady lze doskákat?

Platí:

- Existuje taková volba $x \in (0, 1)$, že součet S hodnot všech polí, na kterých leží nějaký kámen, je menší než jedna, ať je počáteční rozložení (libovolně konečně mnoha) kamenů v dolní polorovině jakékoli.

4. Do které řady lze doskákat?

Platí:

- Existuje taková volba $x \in (0, 1)$, že součet S hodnot všech polí, na kterých leží nějaký kámen, je menší než jedna, ať je počáteční rozložení (libovolně konečně mnoha) kamenů v dolní polorovině jakékoli.
- Po provedení každého "tahu" (= skoku a odstranění přeskočeného kamene) se hodnota S **nezvětší**

4. Do které řady lze doskákat?

Platí:

- Existuje taková volba $x \in (0, 1)$, že součet S hodnot všech polí, na kterých leží nějaký kámen, je menší než jedna, ať je počáteční rozložení (libovolně konečně mnoha) kamenů v dolní polorovině jakékoli.
- Po provedení každého "tahu" (= skoku a odstranění přeskoceného kamene) se hodnota S **nezvětší** (bud' zůstane stejná nebo se dokonce zmenší),

4. Do které řady lze doskákat?

Platí:

- Existuje taková volba $x \in (0, 1)$, že součet S hodnot všech polí, na kterých leží nějaký kámen, je menší než jedna, ať je počáteční rozložení (libovolně konečně mnoha) kamenů v dolní polorovině jakékoli.
- Po provedení každého "tahu" (= skoku a odstranění přeskoceného kamene) se hodnota S **nezvětší** (bud' zůstane stejná nebo se dokonce zmenší), a tedy **po celou dobu skákání včetně posledního skoku zůstává $S < 1$.**

4. Do které řady lze doskákat?

Platí:

- Existuje taková volba $x \in (0, 1)$, že součet S hodnot všech polí, na kterých leží nějaký kámen, je menší než jedna, ať je počáteční rozložení (libovolně konečně mnoha) kamenů v dolní polorovině jakékoli.
- Po provedení každého "tahu" (= skoku a odstranění přeskoceného kamene) se hodnota S **nezvětší** (buď zůstane stejná nebo se dokonce zmenší), a tedy **po celou dobu skákání včetně posledního skoku zůstává $S < 1$.**

Odtud plyne:

Pokud by bylo možno doskákat do páté řady, ležel by po dosažení tohoto cíle poslední kámen na poli s hodnotou 1, tedy by v té chvíli platilo $S = 1$, což není možné.

Tři starověké konstrukční úlohy:

Tři starověké konstrukční úlohy:

- *Zdvojnásobení (duplikace) krychle*

Tři starověké konstrukční úlohy:

- *Zdvojnásobení (duplikace) krychle (Délský problém)*

Tři starověké konstrukční úlohy:

- *Zdvojnásobení (duplikace) krychle (Déliký problém):* nalezení hrany krychle o dvojnásobném objemu než má daná krychle.

Tři starověké konstrukční úlohy:

- *Zdvojnásobení (duplikace) krychle (Délský problém):* nalezení hrany krychle o dvojnásobném objemu než má daná krychle.
- *Trisekce úhlu*

Tři starověké konstrukční úlohy:

- *Zdvojnásobení (duplikace) krychle (Délský problém):* nalezení hrany krychle o dvojnásobném objemu než má daná krychle.
- *Trisekce úhlu:* rozdělení daného úhlu na třetiny.

Tři starověké konstrukční úlohy:

- *Zdvojnásobení (duplikace) krychle (Délský problém):* nalezení hrany krychle o dvojnásobném objemu než má daná krychle.
- *Trisekce úhlu:* rozdělení daného úhlu na třetiny.
- *Kvadratura kruhu*

Tři starověké konstrukční úlohy:

- *Zdvojnásobení (duplikace) krychle (Délský problém):* nalezení hrany krychle o dvojnásobném objemu než má daná krychle.
- *Trisekce úhlu:* rozdělení daného úhlu na třetiny.
- *Kvadratura kruhu:* nalezení strany čtverce, jehož obsah je roven obsahu daného kruhu.

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Konstrukce kružítkem a pravítkem:

Konstrukce kružítkem a pravítkem:

- Pravítko slouží pouze k narýsování přímky (úsečky), která prochází dvěma již zkonstruovanými body.

Konstrukce kružítkem a pravítkem:

- Pravítko slouží pouze k narýsování přímky (úsečky), která prochází dvěma již zkonstruovanými body.
Pravítko nesmí mít na sobě žádné značky, "jednotky délky", měřítko, atd. Není ani dovoleno žádné značky na pravítku v průběhu konstrukce vytvářet.

Konstrukce kružítkem a pravítkem:

- Pravítko slouží pouze k narýsování přímky (úsečky), která prochází dvěma již zkonstruovanými body.
Pravítko nesmí mít na sobě žádné značky, "jednotky délky", měřítko, atd. Není ani dovoleno žádné značky na pravítku v průběhu konstrukce vytvářet.
- Kružítko slouží pouze k opsání oblouku kružnice o středu, ležícím ve zkonstruovaném bodě, a o poloměru, který odpovídá vzdálenosti dvou nějakých již zkonstruovaných bodů.

Konstrukce kružítkem a pravítkem:

- Pravítko slouží pouze k narýsování přímky (úsečky), která prochází dvěma již zkonstruovanými body.
Pravítko nesmí mít na sobě žádné značky, "jednotky délky", měřítko, atd. Není ani dovoleno žádné značky na pravítku v průběhu konstrukce vytvářet.
- Kružítko slouží pouze k opsání oblouku kružnice o středu, ležícím ve zkonstruovaném bodě, a o poloměru, který odpovídá vzdálenosti dvou nějakých již zkonstruovaných bodů.
- Konstrukce musí sestávat pouze z *konečného počtu kroků*.

Konstrukce kružítkem a pravítkem:

- Pravítko slouží pouze k narýsování přímky (úsečky), která prochází dvěma již zkonstruovanými body.
Pravítko nesmí mít na sobě žádné značky, "jednotky délky", měřítko, atd. Není ani dovoleno žádné značky na pravítku v průběhu konstrukce vytvářet.
- Kružítko slouží pouze k opsání oblouku kružnice o středu, ležícím ve zkonstruovaném bodě, a o poloměru, který odpovídá vzdálenosti dvou nějakých již zkonstruovaných bodů.
- Konstrukce musí sestávat pouze z *konečného počtu kroků*.
- Konstrukce musí být *přesná*. Přibližná řešení nejsou považována za řešení úlohy.

Konstrukce kružítkem a pravítkem:

- Pravítko slouží pouze k narysování přímky (úsečky), která prochází dvěma již zkonstruovanými body.
Pravítko nesmí mít na sobě žádné značky, "jednotky délky", měřítko, atd. Není ani dovoleno žádné značky na pravítku v průběhu konstrukce vytvářet.
- Kružítko slouží pouze k opsání oblouku kružnice o středu, ležícím ve zkonstruovaném bodě, a o poloměru, který odpovídá vzdálenosti dvou nějakých již zkonstruovaných bodů.
- Konstrukce musí sestávat pouze z *konečného počtu kroků*.
- Konstrukce musí být *přesná*. Přibližná řešení nejsou považována za řešení úlohy.
- Nedílnou součástí řešení je *důkaz*.

Překvapivé završení snah o uvedené tři konstrukce:
žádnou z nich nelze provést

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Překvapivé završení snah o uvedené tři konstrukce:
žádnou z nich nelze provést
(při splnění všech uvedených konstrukčních pravidel).

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Překvapivé završení snah o uvedené tři konstrukce:
žádnou z nich nelze provést
(při splnění všech uvedených konstrukčních pravidel).

Základní idea důkazu: algebraický popis množiny čísel,
které lze zkonstruovat (jako vzdálenosti bodů v rovině)
pomocí konstrukčních pravidel,

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Překvapivé završení snah o uvedené tři konstrukce:
žádnou z nich nelze provést
(při splnění všech uvedených konstrukčních pravidel).

Základní idea důkazu: algebraický popis množiny čísel, které lze zkonstruovat (jako vzdálenosti bodů v rovině) pomocí konstrukčních pravidel, a důkaz toho, že požadované délky neleží v této množině.

"Algebraizace" problému duplikace krychle:

Je-li dána krychle o hraně a , je její objem a^3 .

"Algebraizace" problému duplikace krychle:

Je-li dána krychle o hraně a , je její objem a^3 .

Krychle o dvojnásobném objemu má tedy objem $2a^3$

"Algebraizace" problému duplikace krychle:

Je-li dána krychle o hraně a , je její objem a^3 .

Krychle o dvojnásobném objemu má tedy objem $2a^3$
a hranu $\sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2}$.

"Algebraizace" problému duplikace krychle:

Je-li dána krychle o hraně a , je její objem a^3 .

Krychle o dvojnásobném objemu má tedy objem $2a^3$
a hranu $\sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2}$.

Úkol je tedy

"Algebraizace" problému duplikace krychle:

Je-li dána krychle o hraně a , je její objem a^3 .

Krychle o dvojnásobném objemu má tedy objem $2a^3$
a hranu $\sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2}$.

Úkol je tedy

z dané délky a zkonstruovat délku $a\sqrt[3]{2}$,

"Algebraizace" problému duplikace krychle:

Je-li dána krychle o hraně a , je její objem a^3 .

Krychle o dvojnásobném objemu má tedy objem $2a^3$
a hranu $\sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2}$.

Úkol je tedy

z dané délky a zkonstruovat délku $a\sqrt[3]{2}$,

nebo jinak (protože danou délku a můžeme považovat za základní, tj. "jednotkovou")

"Algebraizace" problému duplikace krychle:

Je-li dána krychle o hraně a , je její objem a^3 .

Krychle o dvojnásobném objemu má tedy objem $2a^3$
a hranu $\sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2}$.

Úkol je tedy

z dané délky a zkonstruovat délku $a\sqrt[3]{2}$,

nebo jinak (protože danou délku a můžeme považovat za základní, tj. "jednotkovou")

z dané délky 1 zkonstruovat délku $\sqrt[3]{2}$.

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Jde to?

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

**Jde to? Jaké všechny délky umíme z délky 1
zkonstruovat?**

1, 2, ...

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Jde to? Jaké všechny délky umíme z délky 1 zkonstruovat?

1, 2, ... všechny součty a rozdíly.

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Jde to? Jaké všechny délky umíme z délky 1 zkonstruovat?

1, 2, ... všechny součty a rozdíly.

Umíme i součiny a podíly. (Umíte?)

Jde to? Jaké všechny délky umíme z délky 1 zkonstruovat?

1, 2, ... všechny součty a rozdíly.

Umíme i součiny a podíly. (Umíte?) Tj. všechna tzv. racionální čísla.

Jde to? Jaké všechny délky umíme z délky 1 zkonstruovat?

1, 2, ... všechny součty a rozdíly.

Umíme i součiny a podíly. (Umíte?) Tj. všechna tzv. racionální čísla.

Pokud by to bylo všechno, co umíme zkonstruovat, tak bychom byli s důkazem hotovi,

Jde to? Jaké všechny délky umíme z délky 1 zkonstruovat?

1, 2, ... všechny součty a rozdíly.

Umíme i součiny a podíly. (Umíte?) Tj. všechna tzv. racionální čísla.

Pokud by to bylo všechno, co umíme zkonstruovat, tak bychom byli s důkazem hotovi, protože $\sqrt[3]{2}$ není racionální číslo.

Jde to? Jaké všechny délky umíme z délky 1 zkonstruovat?

1, 2, ... všechny součty a rozdíly.

Umíme i součiny a podíly. (Umíte?) Tj. všechna tzv. racionální čísla.

Pokud by to bylo všechno, co umíme zkonstruovat, tak bychom byli s důkazem hotovi, protože $\sqrt[3]{2}$ není racionální číslo.

Ale my umíme zkonstruovat i $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ...

Jde to? Jaké všechny délky umíme z délky 1 zkonstruovat?

1, 2, ... všechny součty a rozdíly.

Umíme i součiny a podíly. (Umíte?) Tj. všechna tzv. racionální čísla.

Pokud by to bylo všechno, co umíme zkonstruovat, tak bychom byli s důkazem hotovi, protože $\sqrt[3]{2}$ není racionální číslo.

Ale my umíme zkonstruovat i $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... umíme druhé odmocniny všech přirozených čísel,

Jde to? Jaké všechny délky umíme z délky 1 zkonstruovat?

1, 2, ... všechny součty a rozdíly.

Umíme i součiny a podíly. (Umíte?) Tj. všechna tzv. racionální čísla.

Pokud by to bylo všechno, co umíme zkonstruovat, tak bychom byli s důkazem hotovi, protože $\sqrt[3]{2}$ není racionální číslo.

Ale my umíme zkonstruovat i $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... umíme druhé odmocniny všech přirozených čísel, a tedy i všechny součty, rozdíly, násobky a podíly takovýchto čísel:

$$3 + 2\sqrt{2},$$

Jde to? Jaké všechny délky umíme z délky 1 zkonstruovat?

1, 2, ... všechny součty a rozdíly.

Umíme i součiny a podíly. (Umíte?) Tj. všechna tzv. racionální čísla.

Pokud by to bylo všechno, co umíme zkonstruovat, tak bychom byli s důkazem hotovi, protože $\sqrt[3]{2}$ není racionální číslo.

Ale my umíme zkonstruovat i $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... umíme druhé odmocniny všech přirozených čísel, a tedy i všechny součty, rozdíly, násobky a podíly takovýchto čísel:

$$3 + 2\sqrt{2}, \frac{3+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}-4\sqrt{7}} \dots$$

Jde to? Jaké všechny délky umíme z délky 1 zkonstruovat?

1, 2, ... všechny součty a rozdíly.

Umíme i součiny a podíly. (Umíte?) Tj. všechna tzv. racionální čísla.

Pokud by to bylo všechno, co umíme zkonstruovat, tak bychom byli s důkazem hotovi, protože $\sqrt[3]{2}$ není racionální číslo.

Ale my umíme zkonstruovat i $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... umíme druhé odmocniny všech přirozených čísel, a tedy i všechny součty, rozdíly, násobky a podíly takovýchto čísel:

$$3 + 2\sqrt{2}, \frac{3+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}-4\sqrt{7}} \dots$$

A to už je docela složitá otázka, jestli se mezi nimi nevyskytuje i ona $\sqrt[3]{2}$.

Vytvoření "řetízku množin" všech zkonstruovatelných čísel:

Vytvoření "řetízku množin" všech zkonstruovatelných čísel:

- 1 $\mathbb{Q}$... všechna racionální čísla.

Vytvoření "řetízku množin" všech zkonstruovatelných čísel:

- 1 $\mathbb{Q}$... všechna racionální čísla.
- 2 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ a přitom ji umím zkonstruovat.

Vytvoření "řetízku množin" všech zkonstruovatelných čísel:

- 1 $\mathbb{Q}$... všechna racionální čísla.
- 2 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ a přitom ji umím zkonstruovat.
- 3 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$: všechna čísla tvaru $p + q\sqrt{2}$, kde $p, q \in \mathbb{Q}$.

Vytvoření "řetízku množin" všech zkonstruovatelných čísel:

- 1 $\mathbb{Q}$... všechna racionální čísla.
- 2 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ a přitom ji umím zkonstruovat.
- 3 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$: všechna čísla tvaru $p + q\sqrt{2}$, kde $p, q \in \mathbb{Q}$.
- 4 $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ a přitom ji umím zkonstruovat.

Vytvoření "řetízku množin" všech zkonstruovatelných čísel:

- 1 $\mathbb{Q}$... všechna racionální čísla.
- 2 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ a přitom ji umím zkonstruovat.
- 3 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$: všechna čísla tvaru $p + q\sqrt{2}$, kde $p, q \in \mathbb{Q}$.
- 4 $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ a přitom ji umím zkonstruovat.
- 5 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})$: všechna čísla tvaru $r + s\sqrt{3}$, kde $r, s \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Vytvoření "řetízku množin" všech zkonstruovatelných čísel:

- 1 $\mathbb{Q}$... všechna racionální čísla.
- 2 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ a přitom ji umím zkonstruovat.
- 3 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$: všechna čísla tvaru $p + q\sqrt{2}$, kde $p, q \in \mathbb{Q}$.
- 4 $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ a přitom ji umím zkonstruovat.
- 5 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})$: všechna čísla tvaru $r + s\sqrt{3}$, kde $r, s \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

...

Vytvoření "řetízku množin" všech zkonstruovatelných čísel:

- 1 $\mathbb{Q}$... všechna racionální čísla.
- 2 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ a přitom ji umím zkonstruovat.
- 3 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$: všechna čísla tvaru $p + q\sqrt{2}$, kde $p, q \in \mathbb{Q}$.
- 4 $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ a přitom ji umím zkonstruovat.
- 5 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})$: všechna čísla tvaru $r + s\sqrt{3}$, kde $r, s \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

...

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})(\sqrt{5}) \dots$$

Vytvoření "řetízku množin" všech zkonstruovatelných čísel:

- 1 $\mathbb{Q}$... všechna racionální čísla.
- 2 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ a přitom ji umím zkonstruovat.
- 3 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$: všechna čísla tvaru $p + q\sqrt{2}$, kde $p, q \in \mathbb{Q}$.
- 4 $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ a přitom ji umím zkonstruovat.
- 5 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})$: všechna čísla tvaru $r + s\sqrt{3}$, kde $r, s \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

...

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})(\sqrt{5}) \dots$$

**Žádná jiná čísla, než vytvořená tímto mechanismem,
už zkonstruovat nejdou.**

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Věta

Reálné číslo x je zkonstruovatelné (v konečném počtu kroků) právě tehdy, když

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Věta

Reálné číslo x je zkonstruovatelné (v konečném počtu kroků) právě tehdy, když existují množiny $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2, \dots, \mathbb{K}_n \subset \mathbb{R}$, takové, že

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Věta

Reálné číslo x je zkonstruovatelné (v konečném počtu kroků) právě tehdy, když existují množiny $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2, \dots, \mathbb{K}_n \subset \mathbb{R}$, takové, že

1

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \dots \subset \mathbb{K}_n,$$

Věta

Reálné číslo x je zkonstruovatelné (v konečném počtu kroků) právě tehdy, když existují množiny $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2, \dots, \mathbb{K}_n \subset \mathbb{R}$, takové, že

1

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \dots \subset \mathbb{K}_n,$$

2

■ $\mathbb{K}_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{r_1}), r_1 \in \mathbb{Q}, \sqrt{r_1} \notin \mathbb{Q},$

Věta

Reálné číslo x je zkonstruovatelné (v konečném počtu kroků) právě tehdy, když existují množiny $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2, \dots, \mathbb{K}_n \subset \mathbb{R}$, takové, že

1

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \dots \subset \mathbb{K}_n,$$

2

- $\mathbb{K}_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{r_1}), r_1 \in \mathbb{Q}, \sqrt{r_1} \notin \mathbb{Q},$
- $\mathbb{K}_2 = \mathbb{K}_1(\sqrt{r_2}), r_2 \in \mathbb{K}_1, \sqrt{r_2} \notin \mathbb{K}_1,$

Věta

Reálné číslo x je zkonstruovatelné (v konečném počtu kroků) právě tehdy, když existují množiny $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2, \dots, \mathbb{K}_n \subset \mathbb{R}$, takové, že

1

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \dots \subset \mathbb{K}_n,$$

2

- $\mathbb{K}_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{r_1}), r_1 \in \mathbb{Q}, \sqrt{r_1} \notin \mathbb{Q},$
- $\mathbb{K}_2 = \mathbb{K}_1(\sqrt{r_2}), r_2 \in \mathbb{K}_1, \sqrt{r_2} \notin \mathbb{K}_1,$
- $\mathbb{K}_3 = \mathbb{K}_2(\sqrt{r_3}), r_3 \in \mathbb{K}_2, \sqrt{r_3} \notin \mathbb{K}_2,$

Věta

Reálné číslo x je zkonstruovatelné (v konečném počtu kroků) právě tehdy, když existují množiny $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2, \dots, \mathbb{K}_n \subset \mathbb{R}$, takové, že

1

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \dots \subset \mathbb{K}_n,$$

2

- $\mathbb{K}_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{r_1}), r_1 \in \mathbb{Q}, \sqrt{r_1} \notin \mathbb{Q},$
- $\mathbb{K}_2 = \mathbb{K}_1(\sqrt{r_2}), r_2 \in \mathbb{K}_1, \sqrt{r_2} \notin \mathbb{K}_1,$
- $\mathbb{K}_3 = \mathbb{K}_2(\sqrt{r_3}), r_3 \in \mathbb{K}_2, \sqrt{r_3} \notin \mathbb{K}_2,$
- $\dots$

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Věta

Reálné číslo x je zkonstruovatelné (v konečném počtu kroků) právě tehdy, když existují množiny $\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2, \dots, \mathbb{K}_n \subset \mathbb{R}$, takové, že

1

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \dots \subset \mathbb{K}_n,$$

2

- $\mathbb{K}_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{r_1}), r_1 \in \mathbb{Q}, \sqrt{r_1} \notin \mathbb{Q},$
- $\mathbb{K}_2 = \mathbb{K}_1(\sqrt{r_2}), r_2 \in \mathbb{K}_1, \sqrt{r_2} \notin \mathbb{K}_1,$
- $\mathbb{K}_3 = \mathbb{K}_2(\sqrt{r_3}), r_3 \in \mathbb{K}_2, \sqrt{r_3} \notin \mathbb{K}_2,$
- ...

3

$$x \in \mathbb{K}_n.$$

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Otázka "Lze zkonstruovat $\sqrt[3]{2}$?"

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Otázka "Lze zkonstruovat $\sqrt[3]{2}$?" je tedy ekvivalentní otázce "Patří $\sqrt[3]{2}$ do některé z množin $\mathbb{K}_n$, které vzniknou výše uvedeným způsobem?".

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Patří $\sqrt[3]{2}$ do některé z množin $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \dots \subset \mathbb{K}_n$?

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Patří $\sqrt[3]{2}$ do některé z množin $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \dots \subset \mathbb{K}_n$?

Např. $\mathbb{K}_1$: pak $\sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r}$, kde $p, q, r \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{r} \notin \mathbb{Q}$.

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Patří $\sqrt[3]{2}$ do některé z množin $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \dots \subset \mathbb{K}_n$?

Např. $\mathbb{K}_1$: pak $\sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r}$, kde $p, q, r \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{r} \notin \mathbb{Q}$.

$$\sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r} \quad \Bigg| \quad \text{na třetí}$$

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Patří $\sqrt[3]{2}$ do některé z množin $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \dots \subset \mathbb{K}_n$?

Např. $\mathbb{K}_1$: pak $\sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r}$, kde $p, q, r \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{r} \notin \mathbb{Q}$.

$$\begin{array}{lcl} \sqrt[3]{2} & = & p + q\sqrt{r} \quad \Bigg| \quad \text{na třetí} \\ 2 & = & p^3 + 3pq^2r + \sqrt{r}(3p^2q + q^3r) \end{array} \quad (1)$$

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Patří $\sqrt[3]{2}$ do některé z množin $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \dots \subset \mathbb{K}_n$?

Např. $\mathbb{K}_1$: pak $\sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r}$, kde $p, q, r \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{r} \notin \mathbb{Q}$.

$$\begin{array}{lcl} \sqrt[3]{2} & = & p + q\sqrt{r} \quad \Bigg| \quad \text{na třetí} \\ 2 & = & p^3 + 3pq^2r + \sqrt{r}(3p^2q + q^3r) \end{array} \quad (1)$$

Možnosti:

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Patří $\sqrt[3]{2}$ do některé z množin $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \dots \subset \mathbb{K}_n$?

Např. $\mathbb{K}_1$: pak $\sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r}$, kde $p, q, r \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{r} \notin \mathbb{Q}$.

$$\begin{array}{lcl} \sqrt[3]{2} & = & p + q\sqrt{r} \quad \Bigg| \quad \text{na třetí} \\ 2 & = & p^3 + 3pq^2r + \sqrt{r}(3p^2q + q^3r) \end{array} \quad (1)$$

Možnosti:

1 $3p^2q + q^3r \neq 0$:

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Patří $\sqrt[3]{2}$ do některé z množin $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \dots \subset \mathbb{K}_n$?

Např. $\mathbb{K}_1$: pak $\sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r}$, kde $p, q, r \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{r} \notin \mathbb{Q}$.

$$\begin{array}{lcl} \sqrt[3]{2} & = & p + q\sqrt{r} \quad \Bigg| \quad \text{na třetí} \\ 2 & = & p^3 + 3pq^2r + \sqrt{r}(3p^2q + q^3r) \end{array} \quad (1)$$

Možnosti:

❶ $3p^2q + q^3r \neq 0$: pak ale z rovnice (1) plyne, že

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Patří $\sqrt[3]{2}$ do některé z množin $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \dots \subset \mathbb{K}_n$?

Např. $\mathbb{K}_1$: pak $\sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r}$, kde $p, q, r \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{r} \notin \mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2} &= p + q\sqrt{r} & \Bigg| & \text{na třetí} \\ 2 &= p^3 + 3pq^2r + \sqrt{r}(3p^2q + q^3r) \end{aligned} \quad (1)$$

Možnosti:

❶ $3p^2q + q^3r \neq 0$: pak ale z rovnice (1) plyne, že

$$\sqrt{r} = \frac{2 - p^3 - 3pq^2r}{3p^2q + q^3r}$$

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Patří $\sqrt[3]{2}$ do některé z množin $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \dots \subset \mathbb{K}_n$?

Např. $\mathbb{K}_1$: pak $\sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r}$, kde $p, q, r \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{r} \notin \mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2} &= p + q\sqrt{r} & \Bigg| & \text{na třetí} \\ 2 &= p^3 + 3pq^2r + \sqrt{r}(3p^2q + q^3r) \end{aligned} \quad (1)$$

Možnosti:

❶ $3p^2q + q^3r \neq 0$: pak ale z rovnice (1) plyne, že

$$\sqrt{r} = \frac{2 - p^3 - 3pq^2r}{3p^2q + q^3r} \in \mathbb{Q}$$

což není pravda.

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Patří $\sqrt[3]{2}$ do některé z množin $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \dots \subset \mathbb{K}_n$?

Např. $\mathbb{K}_1$: pak $\sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r}$, kde $p, q, r \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{r} \notin \mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2} &= p + q\sqrt{r} & \Bigg| & \text{na třetí} \\ 2 &= p^3 + 3pq^2r + \sqrt{r}(3p^2q + q^3r) \end{aligned} \quad (1)$$

Možnosti:

❶ $3p^2q + q^3r \neq 0$: pak ale z rovnice (1) plyne, že

$$\sqrt{r} = \frac{2 - p^3 - 3pq^2r}{3p^2q + q^3r} \in \mathbb{Q}$$

což není pravda.

❷ $3p^2q + q^3r = 0$:

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Patří $\sqrt[3]{2}$ do některé z množin $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \dots \subset \mathbb{K}_n$?

Např. $\mathbb{K}_1$: pak $\sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r}$, kde $p, q, r \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{r} \notin \mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2} &= p + q\sqrt{r} & \Bigg| & \text{na třetí} \\ 2 &= p^3 + 3pq^2r + \sqrt{r}(3p^2q + q^3r) \end{aligned} \quad (1)$$

Možnosti:

❶ $3p^2q + q^3r \neq 0$: pak ale z rovnice (1) plyne, že

$$\sqrt{r} = \frac{2 - p^3 - 3pq^2r}{3p^2q + q^3r} \in \mathbb{Q}$$

což není pravda.

❷ $3p^2q + q^3r = 0$: pak ale $(p - q\sqrt{r})^3 =$

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Patří $\sqrt[3]{2}$ do některé z množin $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \dots \subset \mathbb{K}_n$?

Např. $\mathbb{K}_1$: pak $\sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r}$, kde $p, q, r \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{r} \notin \mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2} &= p + q\sqrt{r} & \Bigg| & \text{na třetí} \\ 2 &= p^3 + 3pq^2r + \sqrt{r}(3p^2q + q^3r) \end{aligned} \quad (1)$$

Možnosti:

❶ $3p^2q + q^3r \neq 0$: pak ale z rovnice (1) plyne, že

$$\sqrt{r} = \frac{2 - p^3 - 3pq^2r}{3p^2q + q^3r} \in \mathbb{Q}$$

což není pravda.

❷ $3p^2q + q^3r = 0$: pak ale $(p - q\sqrt{r})^3 =$
 $p^3 + 3pq^2r - \sqrt{r}(3p^2q + q^3r) =$

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Patří $\sqrt[3]{2}$ do některé z množin $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \dots \subset \mathbb{K}_n$?

Např. $\mathbb{K}_1$: pak $\sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r}$, kde $p, q, r \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{r} \notin \mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2} &= p + q\sqrt{r} & \Bigg| & \text{na třetí} \\ 2 &= p^3 + 3pq^2r + \sqrt{r}(3p^2q + q^3r) \end{aligned} \quad (1)$$

Možnosti:

❶ $3p^2q + q^3r \neq 0$: pak ale z rovnice (1) plyne, že

$$\sqrt{r} = \frac{2 - p^3 - 3pq^2r}{3p^2q + q^3r} \in \mathbb{Q}$$

což není pravda.

❷ $3p^2q + q^3r = 0$: pak ale $(p - q\sqrt{r})^3 =$
 $p^3 + 3pq^2r - \sqrt{r}(3p^2q + q^3r) = p^3 + 3pq^2r =$

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Patří $\sqrt[3]{2}$ do některé z množin $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \dots \subset \mathbb{K}_n$?

Např. $\mathbb{K}_1$: pak $\sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r}$, kde $p, q, r \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{r} \notin \mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2} &= p + q\sqrt{r} & \Bigg| & \text{na třetí} \\ 2 &= p^3 + 3pq^2r + \sqrt{r}(3p^2q + q^3r) \end{aligned} \quad (1)$$

Možnosti:

❶ $3p^2q + q^3r \neq 0$: pak ale z rovnice (1) plyne, že

$$\sqrt{r} = \frac{2 - p^3 - 3pq^2r}{3p^2q + q^3r} \in \mathbb{Q}$$

což není pravda.

❷ $3p^2q + q^3r = 0$: pak ale $(p - q\sqrt{r})^3 = p^3 + 3pq^2r - \sqrt{r}(3p^2q + q^3r) = p^3 + 3pq^2r = 2$, tedy i $p - q\sqrt{r} = \sqrt[3]{2}$

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Patří $\sqrt[3]{2}$ do některé z množin $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \dots \subset \mathbb{K}_n$?

Např. $\mathbb{K}_1$: pak $\sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r}$, kde $p, q, r \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{r} \notin \mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2} &= p + q\sqrt{r} & \Bigg| & \text{na třetí} \\ 2 &= p^3 + 3pq^2r + \sqrt{r}(3p^2q + q^3r) \end{aligned} \quad (1)$$

Možnosti:

❶ $3p^2q + q^3r \neq 0$: pak ale z rovnice (1) plyne, že

$$\sqrt{r} = \frac{2 - p^3 - 3pq^2r}{3p^2q + q^3r} \in \mathbb{Q}$$

což není pravda.

❷ $3p^2q + q^3r = 0$: pak ale $(p - q\sqrt{r})^3 = p^3 + 3pq^2r - \sqrt{r}(3p^2q + q^3r) = p^3 + 3pq^2r = 2$, tedy i $p - q\sqrt{r} = \sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r}$.

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Patří $\sqrt[3]{2}$ do některé z množin $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \dots \subset \mathbb{K}_n$?

Např. $\mathbb{K}_1$: pak $\sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r}$, kde $p, q, r \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{r} \notin \mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2} &= p + q\sqrt{r} & \Bigg| & \text{na třetí} \\ 2 &= p^3 + 3pq^2r + \sqrt{r}(3p^2q + q^3r) \end{aligned} \quad (1)$$

Možnosti:

- ① $3p^2q + q^3r \neq 0$: pak ale z rovnice (1) plyne, že

$$\sqrt{r} = \frac{2 - p^3 - 3pq^2r}{3p^2q + q^3r} \in \mathbb{Q}$$

což není pravda.

- ② $3p^2q + q^3r = 0$: pak ale $(p - q\sqrt{r})^3 = p^3 + 3pq^2r - \sqrt{r}(3p^2q + q^3r) = p^3 + 3pq^2r = 2$, tedy i $p - q\sqrt{r} = \sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r}$. To ale znamená, že $q\sqrt{2} = 0$,

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Patří $\sqrt[3]{2}$ do některé z množin $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \dots \subset \mathbb{K}_n$?

Např. $\mathbb{K}_1$: pak $\sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r}$, kde $p, q, r \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{r} \notin \mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2} &= p + q\sqrt{r} & \Bigg| & \text{na třetí} \\ 2 &= p^3 + 3pq^2r + \sqrt{r}(3p^2q + q^3r) \end{aligned} \quad (1)$$

Možnosti:

- ❶ $3p^2q + q^3r \neq 0$: pak ale z rovnice (1) plyne, že

$$\sqrt{r} = \frac{2 - p^3 - 3pq^2r}{3p^2q + q^3r} \in \mathbb{Q}$$

což není pravda.

- ❷ $3p^2q + q^3r = 0$: pak ale $(p - q\sqrt{r})^3 = p^3 + 3pq^2r - \sqrt{r}(3p^2q + q^3r) = p^3 + 3pq^2r = 2$, tedy i $p - q\sqrt{r} = \sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r}$. To ale znamená, že $q\sqrt{2} = 0$, a tedy $\sqrt[3]{2} = p$

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Patří $\sqrt[3]{2}$ do některé z množin $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \dots \subset \mathbb{K}_n$?

Např. $\mathbb{K}_1$: pak $\sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r}$, kde $p, q, r \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{r} \notin \mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{2} &= p + q\sqrt{r} & \Bigg| & \text{na třetí} \\ 2 &= p^3 + 3pq^2r + \sqrt{r}(3p^2q + q^3r) \end{aligned} \quad (1)$$

Možnosti:

- ❶ $3p^2q + q^3r \neq 0$: pak ale z rovnice (1) plyne, že

$$\sqrt{r} = \frac{2 - p^3 - 3pq^2r}{3p^2q + q^3r} \in \mathbb{Q}$$

což není pravda.

- ❷ $3p^2q + q^3r = 0$: pak ale $(p - q\sqrt{r})^3 = p^3 + 3pq^2r - \sqrt{r}(3p^2q + q^3r) = p^3 + 3pq^2r = 2$, tedy i $p - q\sqrt{r} = \sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{r}$. To ale znamená, že $q\sqrt{2} = 0$, a tedy $\sqrt[3]{2} = p \in \mathbb{Q}$, což není pravda.

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Ta úvaha je byla v podstatě založená na tom, že když $\sqrt[3]{2}$ nepatří do $\mathbb{Q}$, nepatří ani do $\mathbb{K}_1$.

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Ta úvaha je byla v podstatě založená na tom, že když $\sqrt[3]{2}$ nepatří do $\mathbb{Q}$, nepatří ani do $\mathbb{K}_1$.

Podobnými úvahami "krok za krokem" se dá ukázat, že když $\sqrt[3]{2}$ nepatří do $\mathbb{K}_1$, nepatří ani do $\mathbb{K}_2, \dots$ atd.

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Ta úvaha je byla v podstatě založená na tom, že když $\sqrt[3]{2}$ nepatří do $\mathbb{Q}$, nepatří ani do $\mathbb{K}_1$.

Podobnými úvahami "krok za krokem" se dá ukázat, že když $\sqrt[3]{2}$ nepatří do $\mathbb{K}_1$, nepatří ani do $\mathbb{K}_2, \dots$ atd. a nepatří do žádného $\mathbb{K}_n$.

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Ta úvaha je byla v podstatě založená na tom, že když $\sqrt[3]{2}$ nepatří do $\mathbb{Q}$, nepatří ani do $\mathbb{K}_1$.

Podobnými úvahami "krok za krokem" se dá ukázat, že když $\sqrt[3]{2}$ nepatří do $\mathbb{K}_1$, nepatří ani do $\mathbb{K}_2, \dots$ atd. a nepatří do žádného $\mathbb{K}_n$.

Připomeňme: Otázka "Lze zkonstruovat $\sqrt[3]{2}$?"

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Ta úvaha je byla v podstatě založená na tom, že když $\sqrt[3]{2}$ nepatří do $\mathbb{Q}$, nepatří ani do $\mathbb{K}_1$.

Podobnými úvahami "krok za krokem" se dá ukázat, že když $\sqrt[3]{2}$ nepatří do $\mathbb{K}_1$, nepatří ani do $\mathbb{K}_2, \dots$ atd. a nepatří do žádného $\mathbb{K}_n$.

Připomeňme: Otázka "Lze zkonstruovat $\sqrt[3]{2}$?" byla ekvivalentní otázce "Patří $\sqrt[3]{2}$ do některé z množin $\mathbb{K}_n$, které vzniknou výše uvedeným způsobem?".

5. Konstrukce pravítkem a kružítkem

Ta úvaha je byla v podstatě založená na tom, že když $\sqrt[3]{2}$ nepatří do $\mathbb{Q}$, nepatří ani do $\mathbb{K}_1$.

Podobnými úvahami "krok za krokem" se dá ukázat, že když $\sqrt[3]{2}$ nepatří do $\mathbb{K}_1$, nepatří ani do $\mathbb{K}_2, \dots$ atd. a nepatří do žádného $\mathbb{K}_n$.

Připomeňme: Otázka "Lze zkonstruovat $\sqrt[3]{2}$?" byla ekvivalentní otázce "Patří $\sqrt[3]{2}$ do některé z množin $\mathbb{K}_n$, které vzniknou výše uvedeným způsobem?".

Odpověď na druhou otázku je ovšem **NE**, tedy $\sqrt[3]{2}$ nelze zkonstruovat a **zdvojení krychle nelze provést pouze kružítkem a pravítkem podle starořeckých pravidel.**

6. Konstrukce pomocí kružítka a označeného pravítka

Jaká nejjednodušší modifikace konstrukčních pravidel umožní alespoň některou z uvedených konstrukcí provést?

6. Konstrukce pomocí kružítká a označeného pravítka

Konstrukce kružítkem a pravítkem (připomenutí):

Konstrukce kružítkem a pravítkem (připomenutí):

- Pravítko slouží pouze k narýsování přímky (úsečky), která prochází dvěma již zkonstruovanými body.
Pravítko nesmí mít na sobě žádné značky, "jednotky délky", měřítko, atd. Není ani dovoleno žádné značky na pravítku v průběhu konstrukce vytvářet.
- Kružítko slouží pouze k opsání oblouku kružnice o středu, ležícím ve zkonstruovaném bodě, a o poloměru, který odpovídá vzdálenosti dvou nějakých již zkonstruovaných bodů.
- Konstrukce musí sestávat pouze z *konečného počtu kroků*.
- Konstrukce musí být *přesná*. Přibližná řešení nejsou považována za řešení úlohy.
- Nedílnou součástí řešení je *důkaz*.

Konstrukce kružítkem a pravítkem (připomenutí):

- Pravítko slouží pouze k narysování přímky (úsečky), která prochází dvěma již zkonstruovanými body.
Pravítko nesmí mít na sobě žádné značky, "jednotky délky", měřítko, atd. **Není ani dovoleno žádné značky na pravítku v průběhu konstrukce vytvářet.**
- Kružítko slouží pouze k opsání oblouku kružnice o středu, ležícím ve zkonstruovaném bodě, a o poloměru, který odpovídá vzdálenosti dvou nějakých již zkonstruovaných bodů.
- Konstrukce musí sestávat pouze z *konečného počtu kroků*.
- Konstrukce musí být *přesná*. Přibližná řešení nejsou považována za řešení úlohy.
- Nedílnou součástí řešení je *důkaz*.

6. Konstrukce pomocí kružítka a označeného pravítka

Platí:

Platí:

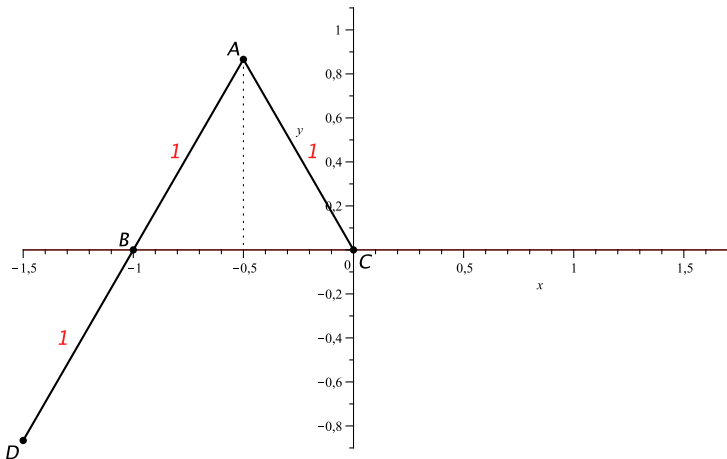
Je-li dovoleno učinit na pravítku v průběhu konstrukce značky, lze provést zdvojení krychle a trisekci úhlu při zachování všech ostatních konstrukčních pravidel.

Platí:

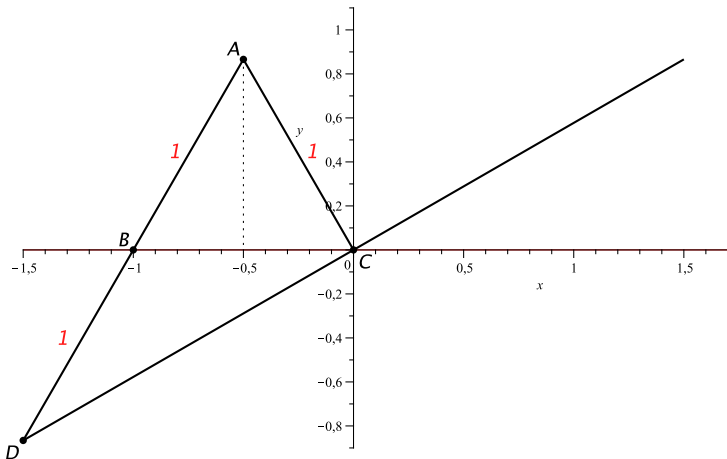
Je-li dovoleno učinit na pravítku v průběhu konstrukce značky, lze provést zdvojení krychle a trisekci úhlu při zachování všech ostatních konstrukčních pravidel. Konstrukce je přesná (což lze dokázat) a sestává z konečného počtu kroků.

6. Konstrukce pomocí kružítká a označeného pravítka

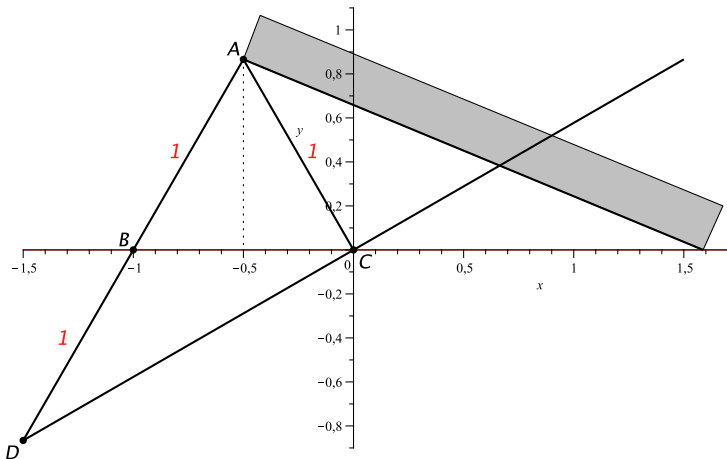
6. Konstrukce pomocí kružítká a označeného pravítka



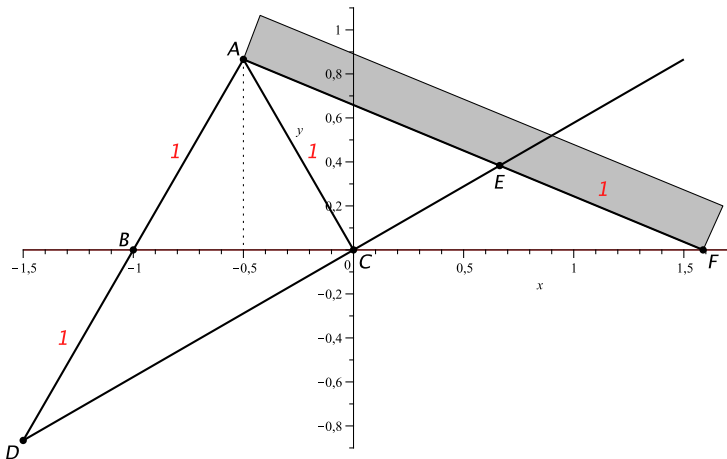
6. Konstrukce pomocí kružítká a označeného pravítka



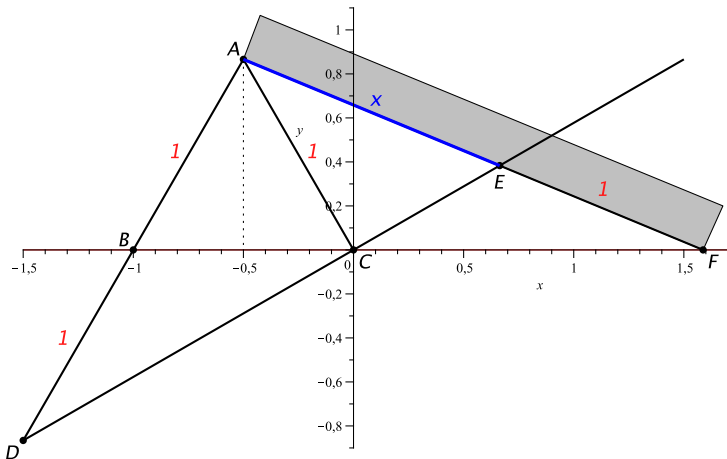
6. Konstrukce pomocí kružítka a označeného pravítka



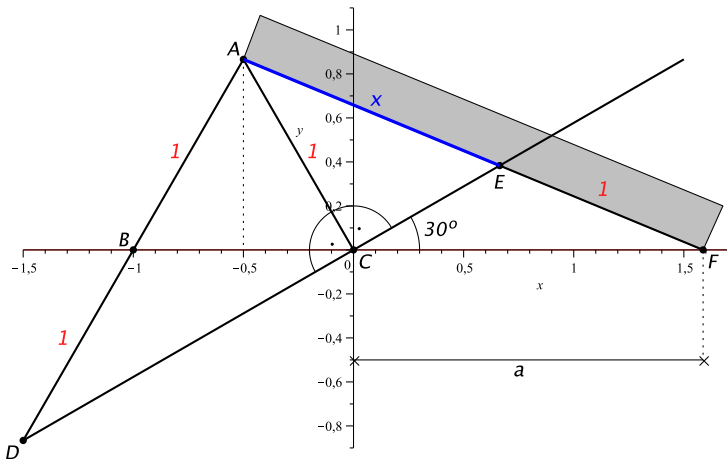
6. Konstrukce pomocí kružítka a označeného pravítka



6. Konstrukce pomocí kružítka a označeného pravítka

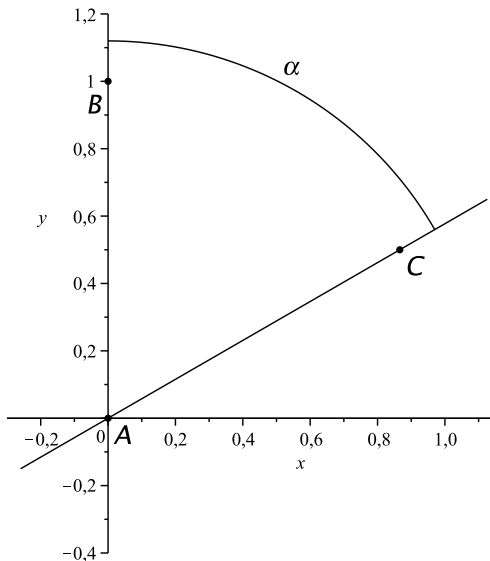


6. Konstrukce pomocí kružítka a označeného pravítka

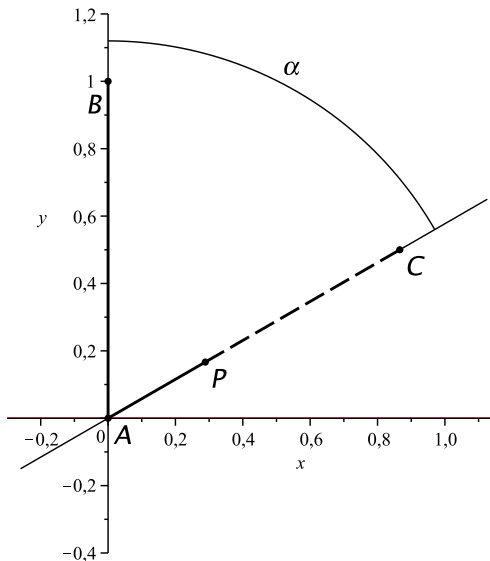


6. Konstrukce pomocí kružítká a označeného pravítka

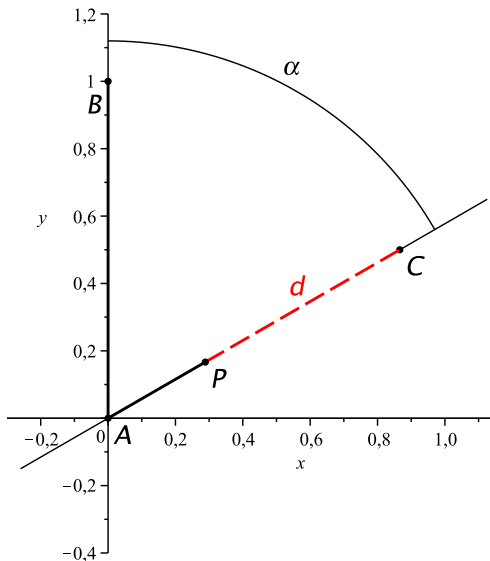
6. Konstrukce pomocí kružítka a označeného pravítka



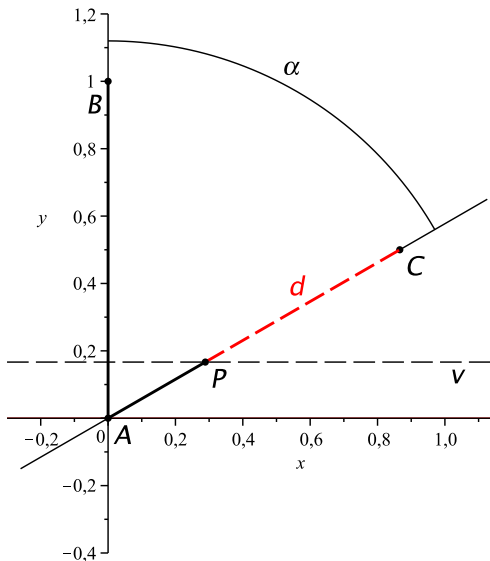
6. Konstrukce pomocí kružítka a označeného pravítka



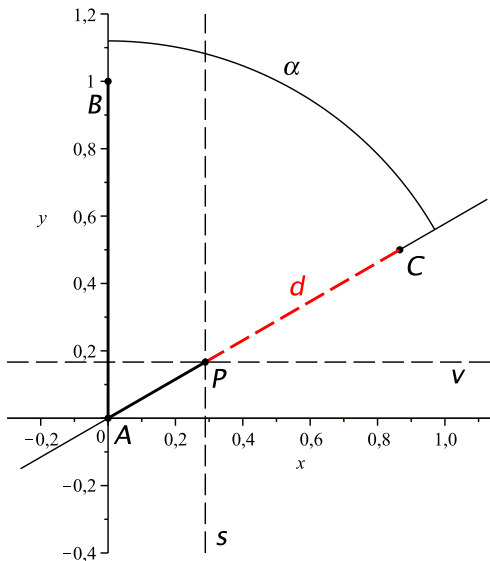
6. Konstrukce pomocí kružítka a označeného pravítka



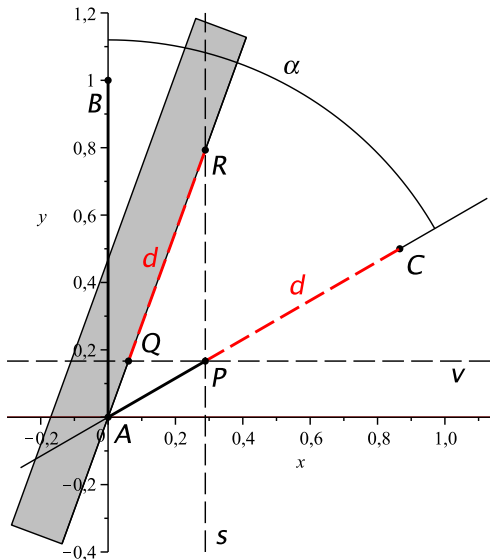
6. Konstrukce pomocí kružítka a označeného pravítka



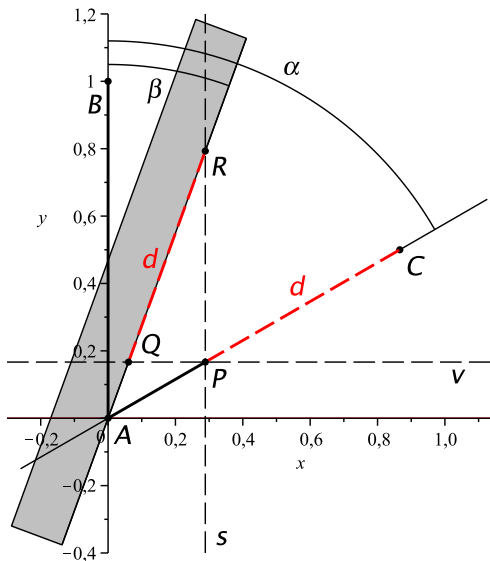
6. Konstrukce pomocí kružítka a označeného pravítka



6. Konstrukce pomocí kružítka a označeného pravítka



6. Konstrukce pomocí kružítka a označeného pravítka



Děkuji za pozornost.

Mirko Rokyta
KMA MFF Praha
Sokolovská 83
Praha 8 - Karlín

`mirko.rokyta@mff.cuni.cz`

Bonus: Collatzova posloupnost

Problém (za 1000 liber).

Problém (za 1000 liber).

Collatzův problém (Lothar Collatz (1910-1990)),

Problém (za 1000 liber).

Collatzův problém (Lothar Collatz (1910-1990)),
Kakutaniho problém, Ulamův problém, $3n+1$ problém

Problém (za 1000 liber).

Collatzův problém (Lothar Collatz (1910-1990)),
Kakutaniho problém, Ulamův problém, $3n+1$ problém

$$a_0 \in \mathbb{N}$$

Problém (za 1000 liber).

Collatzův problém (Lothar Collatz (1910-1990)),
Kakutaniho problém, Ulamův problém, $3n+1$ problém

$$a_0 \in \mathbb{N}$$
$$a_{n+1} := \begin{cases} \frac{a_n}{2} & \text{je-li } a_n \text{ sudé} \end{cases}$$

Problém (za 1000 liber).

Collatzův problém (Lothar Collatz (1910-1990)),
Kakutaniho problém, Ulamův problém, $3n+1$ problém

$$a_0 \in \mathbb{N}$$
$$a_{n+1} := \begin{cases} \frac{a_n}{2} & \text{je-li } a_n \text{ sudé} \\ 3a_n + 1 & \text{je-li } a_n \text{ liché} \end{cases}$$

1 :

1 : 4,

1 : 4,2

1 : 4, 2, 1

Bonus: Collatzova posloupnost

1 : 4, 2, **1**

2 :

Bonus: Collatzova posloupnost

1 : 4, 2, **1**

2 : **1**

Bonus: Collatzova posloupnost

1 : 4, 2, 1

2 : 1

3 :

Bonus: Collatzova posloupnost

1 : 4, 2, 1

2 : 1

3 : 10,

Bonus: Collatzova posloupnost

1 : 4, 2, **1**

2 : **1**

3 : 10, 5,

Bonus: Collatzova posloupnost

1 : 4, 2, **1**

2 : **1**

3 : 10, 5, 16,

Bonus: Collatzova posloupnost

1 : 4, 2, **1**

2 : **1**

3 : 10, 5, 16, 8,

Bonus: Collatzova posloupnost

1 : 4, 2, **1**

2 : **1**

3 : 10, 5, 16, 8, 4,

Bonus: Collatzova posloupnost

1 : 4, 2, **1**

2 : **1**

3 : 10, 5, 16, 8, 4, 2,

Bonus: Collatzova posloupnost

1 : 4, 2, **1**

2 : **1**

3 : 10, 5, 16, 8, 4, 2, **1**

Bonus: Collatzova posloupnost

1 : 4, 2, **1**

2 : **1**

3 : 10, 5, 16, 8, 4, 2, **1**

...

5 :

Bonus: Collatzova posloupnost

1 : 4, 2, **1**

2 : **1**

3 : 10, 5, 16, 8, 4, 2, **1**

...

5 : 16,

Bonus: Collatzova posloupnost

1 : 4, 2, **1**

2 : **1**

3 : 10, 5, 16, 8, 4, 2, **1**

...

5 : 16, 8, 4, 2, **1**

Bonus: Collatzova posloupnost

1 : 4, 2, **1**
2 : **1**
3 : 10, 5, 16, 8, 4, 2, **1**
...
5 : 16, 8, 4, 2, **1**
...
51 :

Bonus: Collatzova posloupnost

1 : 4, 2, **1**

2 : **1**

3 : 10, 5, 16, 8, 4, 2, **1**

...

5 : 16, 8, 4, 2, **1**

...

51 : 154, 77, 232, 116, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52,
26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, **1**

1 : 4, 2, 1

2 : 1

3 : 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

...

5 : 16, 8, 4, 2, 1

...

51 : 154, 77, 232, 116, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52,
26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

Otázka: Dorazíme vždy k číslu 1?

1 : 4, 2, 1

2 : 1

3 : 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

...

5 : 16, 8, 4, 2, 1

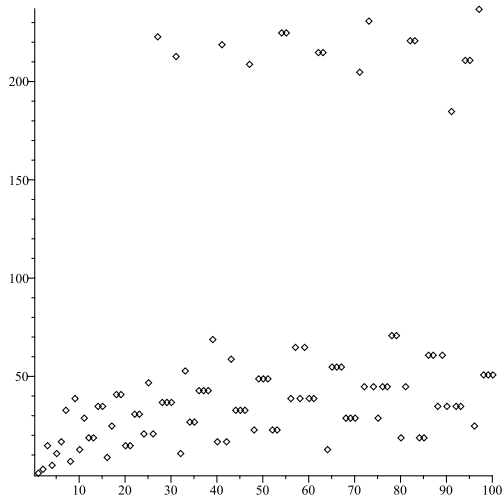
...

51 : 154, 77, 232, 116, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52,
26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

Otázka: Dorazíme vždy k číslu 1?
Počítačově ověřeno až do hodnoty

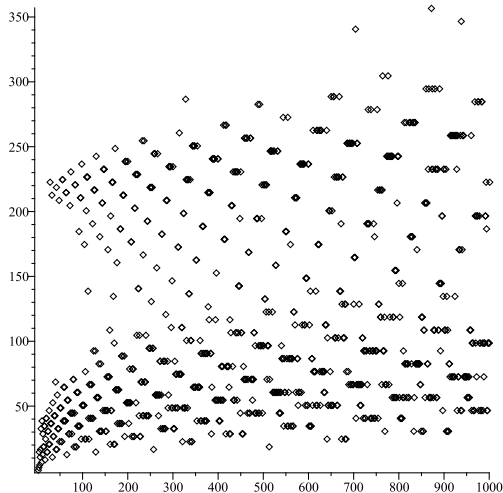
5 480 000 000 000 000 000

Bonus: Collatzova posloupnost



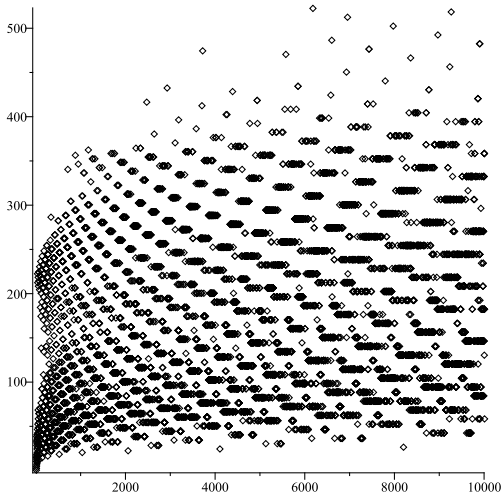
Počet kroků, po kterých se dosáhne hodnoty 1 při startu z hodnoty n

Bonus: Collatzova posloupnost



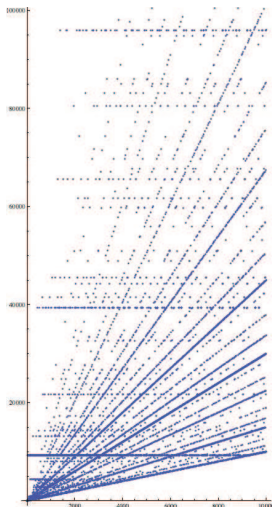
Počet kroků, po kterých se dosáhne hodnoty 1 při startu z hodnoty n

Bonus: Collatzova posloupnost



Počet kroků, po kterých se dosáhne hodnoty 1 při startu z hodnoty n

Bonus: Collatzova posloupnost



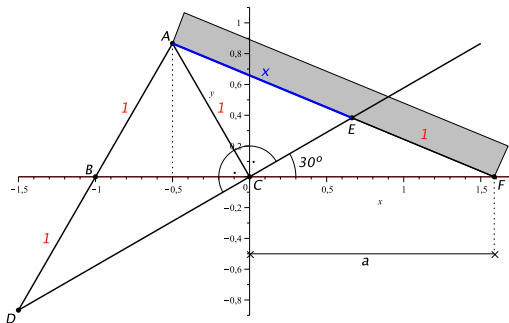
Největší číslo, kterého se dosáhne při startu z hodnoty n ,
než se poprvé dorazí k č. 1

Děkuji za pozornost podruhé.

Mirko Rokyta
KMA MFF Praha
Sokolovská 83
Praha 8 - Karlín

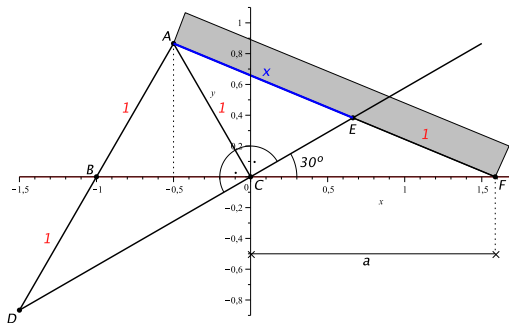
`mirko.rokyta@mff.cuni.cz`

Bonus: Důkaz duplikace



Jaká je vzdálenost $x = |AE|$, za podmínky, že $|EF| = 1$?

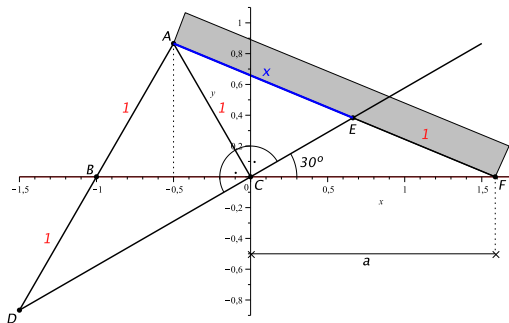
Bonus: Důkaz duplikace



Jaká je vzdálenost $x = |AE|$, za podmínky, že $|EF| = 1$?

$$A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right],$$

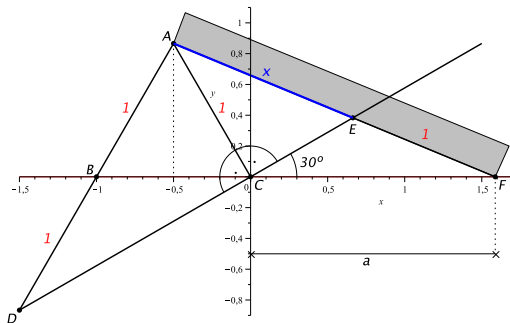
Bonus: Důkaz duplikace



Jaká je vzdálenost $x = |AE|$, za podmínky, že $|EF| = 1$?

$$A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right], F = [a, 0],$$

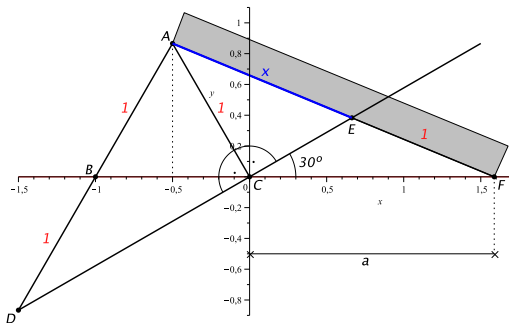
Bonus: Důkaz duplikace



Jaká je vzdálenost $x = |AE|$, za podmínky, že $|EF| = 1$?

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, F = [a, 0], D = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix},$$

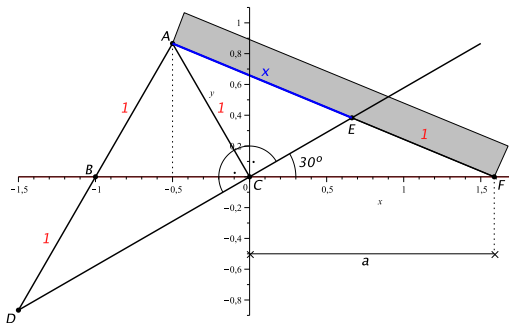
Bonus: Důkaz duplikace



Jaká je vzdálenost $x = |AE|$, za podmínky, že $|EF| = 1$?

$$A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right], F = [a, 0], D = \left[-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right], C = [0, 0]$$

Bonus: Důkaz duplikace



Jaká je vzdálenost $x = |AE|$, za podmínky, že $|EF| = 1$?

$$A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right], F = [a, 0], D = \left[-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right], C = [0, 0]$$

$$\dots \implies E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right]$$

Bonus: Důkaz duplikace

Pokud $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} \frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)} \end{bmatrix}$,

Bonus: Důkaz duplikace

Pokud $A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, $E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right]$, pak

$$|AE|^2 = \left(\frac{3a}{2(a+2)} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dots$$

Bonus: Důkaz duplikace

Pokud $A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, $E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right]$, pak

$$|AE|^2 = \left(\frac{3a}{2(a+2)} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dots = \frac{4(a^2+a+1)}{(a+2)^2}$$

Bonus: Důkaz duplikace

Pokud $A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, $E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right]$, pak

$$|AE|^2 = \left(\frac{3a}{2(a+2)} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dots = \frac{4(a^2+a+1)}{(a+2)^2}$$

Podobně pokud $E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right]$, $F = [a, 0]$,

Bonus: Důkaz duplikace

Pokud $A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, $E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right]$, pak

$$|AE|^2 = \left(\frac{3a}{2(a+2)} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dots = \frac{4(a^2+a+1)}{(a+2)^2}$$

Podobně pokud $E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right]$, $F = [a, 0]$, tak

$$|EF|^2 = \left(\frac{3a}{2(a+2)} - a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right)^2$$

Bonus: Důkaz duplikace

Pokud $A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, $E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right]$, pak

$$|AE|^2 = \left(\frac{3a}{2(a+2)} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dots = \frac{4(a^2+a+1)}{(a+2)^2}$$

Podobně pokud $E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right]$, $F = [a, 0]$, tak

$$|EF|^2 = \left(\frac{3a}{2(a+2)} - a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right)^2 = 1$$

Bonus: Důkaz duplikace

Pokud $A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, $E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right]$, pak

$$|AE|^2 = \left(\frac{3a}{2(a+2)} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dots = \frac{4(a^2+a+1)}{(a+2)^2}$$

Podobně pokud $E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right]$, $F = [a, 0]$, tak

$$|EF|^2 = \left(\frac{3a}{2(a+2)} - a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right)^2 = 1$$

odkud plyne

Bonus: Důkaz duplikace

Pokud $A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, $E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right]$, pak

$$|AE|^2 = \left(\frac{3a}{2(a+2)} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dots = \frac{4(a^2+a+1)}{(a+2)^2}$$

Podobně pokud $E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right]$, $F = [a, 0]$, tak

$$|EF|^2 = \left(\frac{3a}{2(a+2)} - a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right)^2 = 1$$

odkud plyne

$$a^2(a^2 + a + 1) = (a + 2)^2$$

Bonus: Důkaz duplikace

Pokud $A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, $E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right]$, pak

$$|AE|^2 = \left(\frac{3a}{2(a+2)} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dots = \frac{4(a^2+a+1)}{(a+2)^2}$$

Podobně pokud $E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right]$, $F = [a, 0]$, tak

$$|EF|^2 = \left(\frac{3a}{2(a+2)} - a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right)^2 = 1$$

odkud plyne

$$a^2(a^2 + a + 1) = (a + 2)^2$$

Pak ovšem $|AE|^2 = \frac{4(a^2+a+1)}{(a+2)^2} =$

Bonus: Důkaz duplikace

Pokud $A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, $E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right]$, pak

$$|AE|^2 = \left(\frac{3a}{2(a+2)} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dots = \frac{4(a^2+a+1)}{(a+2)^2}$$

Podobně pokud $E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right]$, $F = [a, 0]$, tak

$$|EF|^2 = \left(\frac{3a}{2(a+2)} - a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right)^2 = 1$$

odkud plyne

$$a^2(a^2 + a + 1) = (a + 2)^2$$

Pak ovšem $|AE|^2 = \frac{4(a^2+a+1)}{(a+2)^2} = \frac{4}{a^2}$

Bonus: Důkaz duplikace

Pokud $A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, $E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right]$, pak

$$|AE|^2 = \left(\frac{3a}{2(a+2)} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dots = \frac{4(a^2+a+1)}{(a+2)^2}$$

Podobně pokud $E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right]$, $F = [a, 0]$, tak

$$|EF|^2 = \left(\frac{3a}{2(a+2)} - a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right)^2 = 1$$

odkud plyne

$$a^2(a^2 + a + 1) = (a + 2)^2$$

Pak ovšem $|AE|^2 = \frac{4(a^2+a+1)}{(a+2)^2} = \frac{4}{a^2} \implies |AE| = \frac{2}{a}$.

Bonus: Důkaz duplikace

Pokud $A = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, $E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right]$, pak

$$|AE|^2 = \left(\frac{3a}{2(a+2)} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dots = \frac{4(a^2+a+1)}{(a+2)^2}$$

Podobně pokud $E = \left[\frac{3a}{2(a+2)}, \frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right]$, $F = [a, 0]$, tak

$$|EF|^2 = \left(\frac{3a}{2(a+2)} - a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2(a+2)}\right)^2 = 1$$

odkud plyne

$$a^2(a^2 + a + 1) = (a + 2)^2$$

Pak ovšem $|AE|^2 = \frac{4(a^2+a+1)}{(a+2)^2} = \frac{4}{a^2} \implies |AE| = \frac{2}{a}$.

Tedy $x = \frac{2}{a}$, kde $a > 0$ splňuje: $a^2(a^2+a+1) = (a+2)^2$.

Opíšeme závěr z minulé strany:

$$x = \frac{2}{a}, \text{ kde } a > 0 \text{ splňuje:}$$

Opíšeme závěr z minulé strany:

$$\boxed{x = \frac{2}{a}}, \text{ kde } a > 0 \text{ splňuje:}$$

$$a^2(a^2 + a + 1) = (a + 2)^2$$

Opíšeme závěr z minulé strany:

$$\boxed{x = \frac{2}{a}}, \text{ kde } a > 0 \text{ splňuje:}$$

$$a^2(a^2 + a + 1) = (a + 2)^2 \quad / : a^2 > 0$$

Opíšeme závěr z minulé strany:

$$\boxed{x = \frac{2}{a}}, \text{ kde } a > 0 \text{ splňuje:}$$

$$a^2(a^2 + a + 1) = (a + 2)^2 \quad / : a^2 > 0$$

$$a^2 + a + 1 = \left(1 + \frac{2}{a}\right)^2$$

Opíšeme závěr z minulé strany:

$$\boxed{x = \frac{2}{a}}, \text{ kde } a > 0 \text{ splňuje:}$$

$$\begin{aligned} a^2(a^2 + a + 1) &= (a + 2)^2 & / : a^2 > 0 \\ a^2 + a + 1 &= \left(1 + \frac{2}{a}\right)^2 = 1 + \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2} \end{aligned}$$

Opíšeme závěr z minulé strany:

$$\boxed{x = \frac{2}{a}}, \text{ kde } a > 0 \text{ splňuje:}$$

$$a^2(a^2 + a + 1) = (a + 2)^2 \quad / : a^2 > 0$$

$$a^2 + a + 1 = \left(1 + \frac{2}{a}\right)^2 = 1 + \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2}$$

$$a^2 + a = \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2}$$

Opíšeme závěr z minulé strany:

$$\boxed{x = \frac{2}{a}}, \text{ kde } a > 0 \text{ splňuje:}$$

$$a^2(a^2 + a + 1) = (a + 2)^2 \quad / : a^2 > 0$$

$$a^2 + a + 1 = \left(1 + \frac{2}{a}\right)^2 = 1 + \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2}$$

$$a^2 + a = \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2} = \frac{4}{a^3}(a^2 + a)$$

Opíšeme závěr z minulé strany:

$$\boxed{x = \frac{2}{a}}, \text{ kde } a > 0 \text{ splňuje:}$$

$$a^2(a^2 + a + 1) = (a + 2)^2 \quad / : a^2 > 0$$

$$a^2 + a + 1 = \left(1 + \frac{2}{a}\right)^2 = 1 + \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2}$$

$$a^2 + a = \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2} = \frac{4}{a^3}(a^2 + a) \quad / : (a^2 + a) > 0$$

Opíšeme závěr z minulé strany:

$$\boxed{x = \frac{2}{a}}, \text{ kde } a > 0 \text{ splňuje:}$$

$$a^2(a^2 + a + 1) = (a + 2)^2 \quad / : a^2 > 0$$

$$a^2 + a + 1 = \left(1 + \frac{2}{a}\right)^2 = 1 + \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2}$$

$$a^2 + a = \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2} = \frac{4}{a^3}(a^2 + a) \quad / : (a^2 + a) > 0$$

$$1 = \frac{4}{a^3}$$

Opíšeme závěr z minulé strany:

$$\boxed{x = \frac{2}{a}}, \text{ kde } a > 0 \text{ splňuje:}$$

$$a^2(a^2 + a + 1) = (a + 2)^2 \quad / : a^2 > 0$$

$$a^2 + a + 1 = \left(1 + \frac{2}{a}\right)^2 = 1 + \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2}$$

$$a^2 + a = \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2} = \frac{4}{a^3}(a^2 + a) \quad / : (a^2 + a) > 0$$

$$1 = \frac{4}{a^3}$$

$$\text{Odtud } a = \sqrt[3]{4}$$

Opíšeme závěr z minulé strany:

$$x = \frac{2}{a}, \text{ kde } a > 0 \text{ splňuje:}$$

$$a^2(a^2 + a + 1) = (a + 2)^2 \quad / : a^2 > 0$$

$$a^2 + a + 1 = \left(1 + \frac{2}{a}\right)^2 = 1 + \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2}$$

$$a^2 + a = \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2} = \frac{4}{a^3}(a^2 + a) \quad / : (a^2 + a) > 0$$

$$1 = \frac{4}{a^3}$$

$$\text{Odtud } a = \sqrt[3]{4} \text{ a tedy } x = \frac{2}{a}$$

Opíšeme závěr z minulé strany:

$$x = \frac{2}{a}, \text{ kde } a > 0 \text{ splňuje:}$$

$$a^2(a^2 + a + 1) = (a + 2)^2 \quad / : a^2 > 0$$

$$a^2 + a + 1 = \left(1 + \frac{2}{a}\right)^2 = 1 + \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2}$$

$$a^2 + a = \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2} = \frac{4}{a^3}(a^2 + a) \quad / : (a^2 + a) > 0$$

$$1 = \frac{4}{a^3}$$

$$\text{Odtud } a = \sqrt[3]{4} \text{ a tedy } x = \frac{2}{a} = \frac{2}{\sqrt[3]{4}}$$

Opíšeme závěr z minulé strany:

$$x = \frac{2}{a}, \text{ kde } a > 0 \text{ splňuje:}$$

$$a^2(a^2 + a + 1) = (a + 2)^2 \quad / : a^2 > 0$$

$$a^2 + a + 1 = \left(1 + \frac{2}{a}\right)^2 = 1 + \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2}$$

$$a^2 + a = \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2} = \frac{4}{a^3}(a^2 + a) \quad / : (a^2 + a) > 0$$

$$1 = \frac{4}{a^3}$$

$$\text{Odtud } a = \sqrt[3]{4} \quad \text{a tedy } x = \frac{2}{a} = \frac{2}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{8}{4}}$$

Opíšeme závěr z minulé strany:

$$x = \frac{2}{a}, \text{ kde } a > 0 \text{ splňuje:}$$

$$a^2(a^2 + a + 1) = (a + 2)^2 \quad / : a^2 > 0$$

$$a^2 + a + 1 = \left(1 + \frac{2}{a}\right)^2 = 1 + \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2}$$

$$a^2 + a = \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2} = \frac{4}{a^3}(a^2 + a) \quad / : (a^2 + a) > 0$$

$$1 = \frac{4}{a^3}$$

$$\text{Odtud } a = \sqrt[3]{4} \text{ a tedy } x = \frac{2}{a} = \frac{2}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{8}{4}} = \sqrt[3]{2}.$$

Děkuji za pozornost potřetí (*po třetí odmocnině ze dvou*).

Mirko Rokyta
KMA MFF Praha
Sokolovská 83
Praha 8 - Karlín

`mirko.rokyta@mff.cuni.cz`