Chaos kolem nás

Marek Lampart

Katedra aplikované matematiky & IT4Innovations
Fakulta elektrotechniky a informatiky
VŠB – TU Ostrava

3. února 2016

Význam slova „Chaos“

chaos, -u m ⟨ ř ⟩

1. velký zmatek, nepořádek, neuspořádanost, změť: *ch. v dopravě; způsobit, vyvolat ch.*
2. *filoz., náb., mytol.* (podle starověkých představ) pův. prázdný prostor, znějící průrva, později neuspořádaná změť živlů před vznikem kosmu ve smyslu uspořádaného světa

V. Petráčková, J. Kraus za kolektiv, *Akademický slovník cizích slov*. Academia, Praha 1998

Chaos kolem nás ...

Dobrý voják Švejk [film]. Režie: Karel STEKLÝ. Československo, 1956.

Aplikace dynamických systémů

- V oblastech
  - akademická
  - výzkumná
  - inženýrství
- Vědní disciplíny
  - filozofie
  - umění
  - genetika
  - teologie
  - fyzika
  - chemie
  - biologie
  - ekonomie
  - politologie
  - ekologie
  - mechanika
  - elektrotechnika
  - geoinformatika
  - lingvistika
  - medicína
  - ⋮

Aplikace dynamických systémů

- V oblastech
  - akademická
  - výzkumná
  - inženýrství
- Vědní disciplíny
  - filozofie
  - umění
  - genetika
  - teologie
  - fyzika
  - chemie

- biologie
- ekonomie
- politologie
- ekologie
- mechanika
- elektrotechnika
- geoinformatika
- lingvistika
- medicína

⋮

Příklad - úročení vkladu

P_0 — počáteční hodnota vkladu, r — úroková míra

$$
\begin{aligned}
P_1 &= P_0 + rP_0 = (1+r)P_0\\
P_2 &= P_1 + rP_1 = (1+r)P_1 = (1+r)^2 P_0\\
P_3 &= P_2 + rP_2 = (1+r)P_2 = (1+r)^3 P_0\\
&\vdots\\
P_n &= (1+r)^n P_0
\end{aligned}
$$

Otázka: Za jak dlouho se zdvojnásobí počáteční vklad? (r=0,02)
Prémiová otázka (Škomam Cup): Jak se změní odpověď na předchozí otázku, budeme-li v našem modelu úročit v každém kroku pouze počáteční vklad?

Příklad - úročení vkladu

P_0 — počáteční hodnota vkladu, r — úroková míra

$$P_1 = P_0 + rP_0 = (1+r)P_0$$
$$P_2 = P_1 + rP_1 = (1+r)P_1 = (1+r)^2 P_0$$
$$P_3 = P_2 + rP_2 = (1+r)P_2 = (1+r)^3 P_0$$
$$\vdots$$
$$P_n = (1+r)^n P_0$$

Otázka: Za jak dlouho se zdvojnásobí počáteční vklad? (r=0,02)
Prémiová otázka (Škomam Cup): Jak se změní odpověď na předchozí otázku, budeme-li v našem modelu úročit v každém kroku pouze počáteční vklad?

Příklad - úročení vkladu

P_0 — počáteční hodnota vkladu, r — úroková míra

$$P_1 = P_0 + rP_0 = (1+r)P_0$$
$$P_2 = P_1 + rP_1 = (1+r)P_1 = (1+r)^2 P_0$$
$$P_3 = P_2 + rP_2 = (1+r)P_2 = (1+r)^3 P_0$$
$$\vdots$$
$$P_n = (1+r)^n P_0$$

Otázka: Za jak dlouho se zdvojnásobí počáteční vklad? (r=0,02)
Prémiová otázka (Škomam Cup): Jak se změní odpověď na předchozí otázku, budeme-li v našem modelu úročit v každém kroku pouze počáteční vklad?

Příklad - úročení vkladu

P_0 — počáteční hodnota vkladu, r — úroková míra

$$P_1 = P_0 + rP_0 = (1+r)P_0$$
$$P_2 = P_1 + rP_1 = (1+r)P_1 = (1+r)^2 P_0$$
$$P_3 = P_2 + rP_2 = (1+r)P_2 = (1+r)^3 P_0$$
$$\vdots$$
$$P_n = (1+r)^n P_0$$

Otázka: Za jak dlouho se zdvojnásobí počáteční vklad? (r=0,02)
Prémiová otázka (Škomam Cup): Jak se změní odpověď na předchozí otázku, budeme-li v našem modelu úročit v každém kroku pouze počáteční vklad?

Příklad - úročení vkladu

P_0 — počáteční hodnota vkladu, r — úroková míra

$$P_1 = P_0 + rP_0 = (1+r)P_0$$
$$P_2 = P_1 + rP_1 = (1+r)P_1 = (1+r)^2 P_0$$
$$P_3 = P_2 + rP_2 = (1+r)P_2 = (1+r)^3 P_0$$
$$\vdots$$
$$P_n = (1+r)^n P_0$$

Otázka: Za jak dlouho se zdvojnásobí počáteční vklad? (r=0,02)
Prémiová otázka (Škomam Cup): Jak se změní odpověď na předchozí otázku, budeme-li v našem modelu úročit v každém kroku pouze počáteční vklad?

Příklad - úročení vkladu

P_0 — počáteční hodnota vkladu, r — úroková míra

$$P_1 = P_0 + rP_0 = (1+r)P_0$$
$$P_2 = P_1 + rP_1 = (1+r)P_1 = (1+r)^2 P_0$$
$$P_3 = P_2 + rP_2 = (1+r)P_2 = (1+r)^3 P_0$$
$$\vdots$$
$$P_n = (1+r)^n P_0$$

Otázka: Za jak dlouho se zdvojnásobí počáteční vklad? (r=0,02)
Prémiová otázka (Škomam Cup): Jak se změní odpověď na předchozí otázku, budeme-li v našem modelu úročit v každém kroku pouze počáteční vklad?

Příklad - úročení vkladu

P_0 — počáteční hodnota vkladu, r — úroková míra

$$P_1 = P_0 + rP_0 = (1+r)P_0$$
$$P_2 = P_1 + rP_1 = (1+r)P_1 = (1+r)^2 P_0$$
$$P_3 = P_2 + rP_2 = (1+r)P_2 = (1+r)^3 P_0$$
$$\vdots$$
$$P_n = (1+r)^n P_0$$

Otázka: Za jak dlouho se zdvojnásobí počáteční vklad? (r=0,02)
Prémiová otázka (Škomam Cup): Jak se změní odpověď na předchozí otázku, budeme-li v našem modelu úročit v každém kroku pouze počáteční vklad?

Příklad - úročení vkladu

P_0 — počáteční hodnota vkladu, r — úroková míra

$$P_1 = P_0 + rP_0 = (1+r)P_0$$
$$P_2 = P_1 + rP_1 = (1+r)P_1 = (1+r)^2 P_0$$
$$P_3 = P_2 + rP_2 = (1+r)P_2 = (1+r)^3 P_0$$
$$\vdots$$
$$P_n = (1+r)^n P_0$$

Otázka: Za jak dlouho se zdvojnásobí počáteční vklad? (r=0,02)
Prémiová otázka (Škomam Cup): Jak se změní odpověď na předchozí otázku, budeme-li v našem modelu úročit v každém kroku pouze počáteční vklad?

Příklad - úročení vkladu

P_0 — počáteční hodnota vkladu, r — úroková míra

$$P_1 = P_0 + rP_0 = (1+r)P_0$$
$$P_2 = P_1 + rP_1 = (1+r)P_1 = (1+r)^2 P_0$$
$$P_3 = P_2 + rP_2 = (1+r)P_2 = (1+r)^3 P_0$$
$$\vdots$$
$$P_n = (1+r)^n P_0$$

Otázka: Za jak dlouho se zdvojnásobí počáteční vklad? (r=0,02)
Prémiová otázka (Škomam Cup): Jak se změní odpověď na předchozí otázku, budeme-li v našem modelu úročit v každém kroku pouze počáteční vklad?

Příklad - úročení vkladu

P_0 — počáteční hodnota vkladu, r — úroková míra

$$P_1 = P_0 + rP_0 = (1+r)P_0$$
$$P_2 = P_1 + rP_1 = (1+r)P_1 = (1+r)^2 P_0$$
$$P_3 = P_2 + rP_2 = (1+r)P_2 = (1+r)^3 P_0$$
$$\vdots$$
$$P_n = (1+r)^n P_0$$

Otázka: Za jak dlouho se zdvojnásobí počáteční vklad? (r=0,02)
Prémiová otázka (Škomam Cup): Jak se změní odpověď na předchozí otázku, budeme-li v našem modelu úročit v každém kroku pouze počáteční vklad?

Příklad - úročení vkladu

P_0 — počáteční hodnota vkladu, r — úroková míra

$$P_1 = P_0 + rP_0 = (1+r)P_0$$
$$P_2 = P_1 + rP_1 = (1+r)P_1 = (1+r)^2 P_0$$
$$P_3 = P_2 + rP_2 = (1+r)P_2 = (1+r)^3 P_0$$
$$\vdots$$
$$P_n = (1+r)^n P_0$$

Otázka: Za jak dlouho se zdvojnásobí počáteční vklad? (r=0,02)
Prémiová otázka (Škomam Cup): Jak se změní odpověď na předchozí otázku, budeme-li v našem modelu úročit v každém kroku pouze počáteční vklad?

Příklad - úročení vkladu

P_0 — počáteční hodnota vkladu, r — úroková míra

$$P_1 = P_0 + rP_0 = (1+r)P_0$$
$$P_2 = P_1 + rP_1 = (1+r)P_1 = (1+r)^2 P_0$$
$$P_3 = P_2 + rP_2 = (1+r)P_2 = (1+r)^3 P_0$$
$$\vdots$$
$$P_n = (1+r)^n P_0$$

Otázka: Za jak dlouho se zdvojnásobí počáteční vklad? (r=0,02)
Prémiová otázka (Škomam Cup): Jak se změní odpověď na předchozí otázku, budeme-li v našem modelu úročit v každém kroku pouze počáteční vklad?

Příklad - úročení vkladu

P_0 — počáteční hodnota vkladu, r — úroková míra

$$P_1 = P_0 + rP_0 = (1+r)P_0$$
$$P_2 = P_1 + rP_1 = (1+r)P_1 = (1+r)^2 P_0$$
$$P_3 = P_2 + rP_2 = (1+r)P_2 = (1+r)^3 P_0$$
$$\vdots$$
$$P_n = (1+r)^n P_0$$

Otázka: Za jak dlouho se zdvojnásobí počáteční vklad? (r=0,02)
Prémiová otázka (Škomam Cup): Jak se změní odpověď na předchozí otázku, budeme-li v našem modelu úročit v každém kroku pouze počáteční vklad?

Příklad - úročení vkladu

P_0 — počáteční hodnota vkladu, r — úroková míra

$$
\begin{aligned}
P_1 &= P_0 + rP_0 = (1+r)P_0 \\
P_2 &= P_1 + rP_1 = (1+r)P_1 = (1+r)^2 P_0 \\
P_3 &= P_2 + rP_2 = (1+r)P_2 = (1+r)^3 P_0 \\
&\vdots \\
P_n &= (1+r)^n P_0
\end{aligned}
$$

Otázka: Za jak dlouho se zdvojnásobí počáteční vklad? (r=0,02)
Prémiová otázka (Škomam Cup): Jak se změní odpověď na předchozí otázku, budeme-li v našem modelu úročit v každém kroku pouze počáteční vklad?

Příklad - úročení vkladu

P_0 — počáteční hodnota vkladu, r — úroková míra

$$
\begin{aligned}
P_1 &= P_0 + rP_0 = (1+r)P_0\\
P_2 &= P_1 + rP_1 = (1+r)P_1 = (1+r)^2 P_0\\
P_3 &= P_2 + rP_2 = (1+r)P_2 = (1+r)^3 P_0\\
&\vdots\\
P_n &= (1+r)^n P_0
\end{aligned}
$$

Otázka: Za jak dlouho se zdvojnásobí počáteční vklad? (r=0,02)

Prémiová otázka (Škomam Cup): Jak se změní odpověď na předchozí otázku, budeme-li v našem modelu úročit v každém kroku pouze počáteční vklad?

Příklad - úročení vkladu

P_0 — počáteční hodnota vkladu, r — úroková míra

$$
\begin{aligned}
P_1 &= P_0 + rP_0 = (1+r)P_0 \\
P_2 &= P_1 + rP_1 = (1+r)P_1 = (1+r)^2 P_0 \\
P_3 &= P_2 + rP_2 = (1+r)P_2 = (1+r)^3 P_0 \\
&\vdots \\
P_n &= (1+r)^n P_0
\end{aligned}
$$

Otázka: Za jak dlouho se zdvojnásobí počáteční vklad? (r=0,02)
Prémiová otázka (Škomam Cup): Jak se změní odpověď na předchozí otázku, budeme-li v našem modelu úročit v každém kroku pouze počáteční vklad?

Diferenční rovnice a iterace

Proces, ve kterém jeho předchozí stav ovlivňuje následující, se popisuje pomocí diferenčních rovnic:

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Tato rovnice popisuje, jak se nějaká operace provádí opakovaně po sobě. Tomu budeme říkat *iterace*.

Definice

Nechť $f : X \to X$ je spojité zobrazení na kompaktním metrickém prostoru X. Pak

$$f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n-\text{kráte}}(x) = \underbrace{f(f(f \cdots f}_{n-\text{kráte}}(x))\cdots)$$

se nazývá *n*-**tá iterace bodu** x **zobrazením** f, kde $n \in \mathbb{N}$.

Diferenční rovnice a iterace

Proces, ve kterém jeho předchozí stav ovlivňuje následující, se popisuje pomocí diferenčních rovnic:

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Tato rovnice popisuje, jak se nějaká operace provádí opakovaně po sobě. Tomu budeme říkat *iterace*.

Definice

Nechť $f : X \to X$ je spojité zobrazení na kompaktním metrickém prostoru X. Pak

$$f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n-\text{kráte}}(x) = \underbrace{f(f(f \cdots f(x))}_{n-\text{kráte}} \cdots)$$

se nazývá n-**tá iterace bodu** x **zobrazením** f, kde $n \in \mathbb{N}$.

Diferenční rovnice a iterace

Proces, ve kterém jeho předchozí stav ovlivňuje následující, se popisuje pomocí diferenčních rovnic:

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Tato rovnice popisuje, jak se nějaká operace provádí opakovaně po sobě. Tomu budeme říkat *iterace*.

Definice

Nechť $f : X \to X$ je spojité zobrazení na kompaktním metrickém prostoru X. Pak

$$f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n-\text{kráte}}(x) = \underbrace{f(f(f \cdots f}_{n-\text{kráte}}(x))\cdots)$$

se nazývá ***n*-tá iterace bodu x zobrazením f**, kde $n \in \mathbb{N}$.

Dynamický systém

Definice

Nechť $f : X \to X$ je spojité zobrazení na kompaktním metrickém prostoru X. Pak uspořádaná dvojice

$$(X, f)$$

se nazývá **(diskrétní) dynamický systém.**

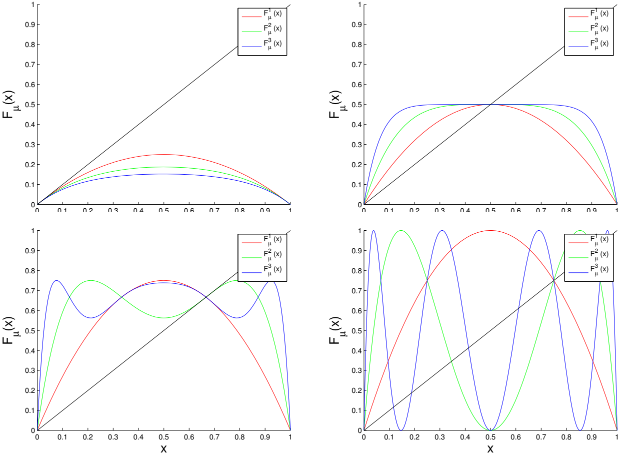
Generický příklad - Systém logistických zobrazení

$$F_\mu(x) : [0,1] \to [0,1] \qquad F_\mu(x) = \mu x(1-x)$$

R.M. May. *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, Nature, **261**(1976) s. 459–467.

Generický příklad - Systém logistických zobrazení

$$F_\mu(x) : [0,1] \to [0,1] \qquad F_\mu(x) = \mu x(1-x)$$



Periodicita

Definice

Buď (X, f) dynamický systém. Bod $x \in X$ se nazývá **pevný**, jestliže

$$f(x) = x.$$

Bod $x \in X$ se nazývá **periodický s periodou** n, jestliže

$$f^n(x) = x$$

a $f^m(x) \neq x$ pro každé $0 < m < n$.

Generický příklad - Systém logistických zobrazení

Věta

Pro $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ definované na $[0,1]$ platí:

1. $F_\mu(0) = 0$ a $F_\mu(p_\mu) = p_\mu$, kde $p_\mu = (\mu - 1)/\mu$,
2. pokud je $1 < \mu \leq 4$, pak $0 < p_\mu < 1$,
3. pokud je $\mu = 1$, pak $\mathrm{Fix}(F_1) = \{0\}$,
4. pokud je $0 < \mu < 1$, pak $p_\mu \notin [0,1]$.

Generický příklad - Systém logistických zobrazení

Věta

Pro $0 < \mu < 1$ a každé $x \in [0,1]$ platí: $\lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x) = 0$.

Věta

Buď $\mu > 1$, pak

1. je-li $x < 0$, pak $\lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x) = -\infty$,
2. je-li $x > 1$, pak $\lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x) = -\infty$.

Věta

Buď $1 < \mu < 3$ a $0 < x < 1$, pak $\lim_{n\to\infty} F_\mu^n(x) = p_\mu$.

Periodicita

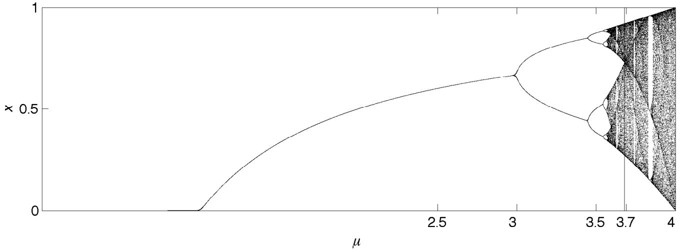
Věta

Buď $([0,1], f)$ dynamický systém mající 3-periodický bod. Potom f má periodické body period všech řádů.

A.N. Šarkovskij. *O ciklach i strukture nepreryvnogo preobrazovanija*. Ukrain. Mat. Žurnal 17.3 (1965), s. 104–111.

Generický příklad - Systém logistických zobrazení

Bifurkační diagram



Chaos ve smyslu Devaneyho

Definice

Dynamický systém (X, f) je **citlivý na počáteční podmínky**, pokud existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ a okolí $B(x, \epsilon)$ najdeme $y \in B(x, \epsilon)$ a $n \in \mathbb{N}$ tak, že

$$d(f^n(x), f^n(y)) > \delta.$$

Chaos ve smyslu Devaneyho

Definice

Nechť (X, f) je dynamický systém. Řekneme, že f je **chaotické ve smyslu Devaneyho**, jestliže:

1. f je topologicky tranzitivní, tj. f má orbitu, která je v X hustá;
2. f má na X citlivou závislost na počátečních podmínkách;
3. periodické body zobrazení f jsou v X husté.

R.L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. 2nd.Menlo Park, CA: Addison-Wesley, 1989.

Chaos ve smyslu Liho a Yorka

Definice

Nechť (X, f) je dynamický systém. Řekneme, že f je **chaotické ve smyslu Liho a Yorka**, jestliže existuje nespočetná podmnožina $S \subset X$ (z anglického „scrambled" set, tj. promíchaná) taková, že pro všechna $x, y \in S$ od sebe různá (tj. $x \neq y$) jsou splněny následující dvě podmínky:

1. $\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0$.
2. $\liminf_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0$.

T.-Y. Li a J. A. Yorke. *Period three implies chaos*. Amer. Math. Monthly, **82** (1975), s. 985–992.

Chaos ve smyslu Liho a Yorka

Věta

Buď $([0,1], f)$ dynamický systém mající 3-periodický bod. Potom je f chaotické ve smyslu Liho a Yorka.

T.-Y. Li a J. A. Yorke. *Period three implies chaos*. Amer. Math. Monthly, **82** (1975), s. 985–992.

Děkuji za pozornost