

Ř + A + D + Y + ...

Ř + A + D + Y + ...

Jiří Bouchala



2. 2. 2016

ŠKOMAM

Outline:

Outline:

- o čem tato přednáška mohla být, ale nebude;

Outline:

- o čem tato přednáška mohla být, ale nebude;
- o čem tato přednáška taky je;

Outline:

- o čem tato přednáška mohla být, ale nebude;
- o čem tato přednáška taky je;
- pořádné vrávorání.

Ř + A + D + Y + ...

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Číselné řady a jejich konvergence.

- *n*-karet

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Číselné řady a jejich konvergence.

- n -karet ... $d = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \right)$,

Ř + A + D + Y + ...

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Číselné řady a jejich konvergence.

- n -karet ... $d = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \right)$,

nekonečně karet

Ř + A + D + Y + ...

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Číselné řady a jejich konvergence.

● n -karet ... $d = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \right)$,

nekonečně karet ... $d = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \right) = ?$

- n -karet ... $d = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \right)$,

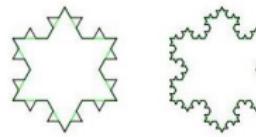
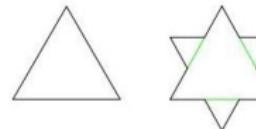
nekonečně karet ... $d = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \right) = ?$

- Kochova sněhová vločka

- n -karet ... $d = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \right)$,

nekonečně karet ... $d = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \right) = ?$

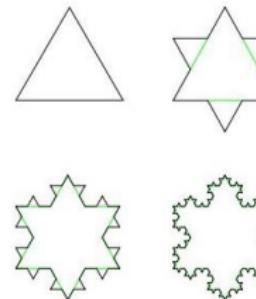
- Kochova sněhová vločka



- n -karet ... $d = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \right)$,

nekonečně karet ... $d = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \right) = ?$

- Kochova sněhová vločka

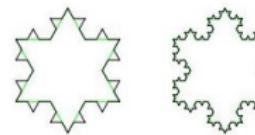
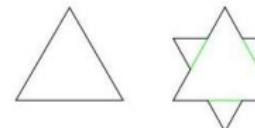


$$\text{obsah} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n \right) = \text{obsah } T_1 + \text{obsah } T_2 + \text{obsah } T_3 + \dots = ?$$

- n -karet ... $d = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \right)$,

nekonečně karet ... $d = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \right) = ?$

- Kochova sněhová vločka



$$\text{obsah} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n \right) = \text{obsah } T_1 + \text{obsah } T_2 + \text{obsah } T_3 + \dots = ?$$

Úloha C.

Vypočtěte obsah a délku hranice $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n \right)$.

Ř + A + D + Y + ...

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Číselné řady a jejich konvergence.

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\dots$

Ř + A + D + Y + ...

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Číselné řady a jejich konvergence.

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\dots$

$$\pi = 3, \textcolor{red}{1415}926\dots$$

Ř + A + D + Y + ...

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Číselné řady a jejich konvergence.

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\dots$

$\pi = 3, \textcolor{red}{1415}926\dots$ upálení Mistra Jana Husa,

Ř + A + D + Y + ...

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Číselné řady a jejich konvergence.

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\dots$

$\pi = 3, \textcolor{red}{1415}926\dots$ upálení Mistra Jana Husa,

$\pi = 3, 14\textcolor{red}{1592}6\dots$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\dots$

$\pi = 3, \textcolor{red}{1415}926\dots$ upálení Mistra Jana Husa,

$\pi = 3, 14\textcolor{red}{1592}6\dots$ narození Jana Amose Komenského,

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\dots$

$\pi = 3, \textcolor{red}{1415}926\dots$ upálení Mistra Jana Husa,

$\pi = 3, 14\textcolor{red}{1592}6\dots$ narození Jana Amose Komenského,

$\pi = 3, 14\textcolor{red}{1592}6\dots$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\dots$

$\pi = 3, \textcolor{red}{1415}926\dots$ upálení Mistra Jana Husa,

$\pi = 3, 14\textcolor{red}{1592}6\dots$ narození Jana Amose Komenského,

$\pi = 3, 14\textcolor{red}{1592}6\dots$ nástup Habsburků na český trůn,

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\dots$

$\pi = 3, \textcolor{red}{1415}926\dots$ upálení Mistra Jana Husa,

$\pi = 3, 14\textcolor{red}{1592}6\dots$ narození Jana Amose Komenského,

$\pi = 3, 14\textcolor{red}{1592}6\dots$ nástup Habsburků na český trůn,

$\pi = \textcolor{red}{3}, 1415926\dots$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\dots$

$\pi = 3, \textcolor{red}{1415}926\dots$ upálení Mistra Jana Husa,

$\pi = 3, 14\textcolor{red}{1592}6\dots$ narození Jana Amose Komenského,

$\pi = 3, 14\textcolor{red}{1592}6\dots$ nástup Habsburků na český trůn,

$\pi = \textcolor{red}{3}, 1415926\dots$ počet Krokových dcer

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\dots$

$\pi = 3, \textcolor{red}{1415}926\dots$ upálení Mistra Jana Husa,

$\pi = 3, 14\textcolor{red}{1592}6\dots$ narození Jana Amose Komenského,

$\pi = 3, 14\textcolor{red}{1592}6\dots$ nástup Habsburků na český trůn,

$\pi = \textcolor{red}{3}, 1415926\dots$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\dots$

$\pi = 3, \textcolor{red}{1415}926\dots$ upálení Mistra Jana Husa,

$\pi = 3, 1\textcolor{red}{4159}26\dots$ narození Jana Amose Komenského,

$\pi = 3, 14\textcolor{red}{1592}6\dots$ nástup Habsburků na český trůn,

$\pi = \textcolor{red}{3}, 1415926\dots$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

$\pi = 3, \textcolor{red}{14159}26\dots$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\dots$

$\pi = 3, \textcolor{red}{1415}926\dots$ upálení Mistra Jana Husa,

$\pi = 3, 1\textcolor{red}{4159}26\dots$ narození Jana Amose Komenského,

$\pi = 3, 14\textcolor{red}{1592}6\dots$ nástup Habsburků na český trůn,

$\pi = \textcolor{red}{3}, 1415926\dots$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

$\pi = 3, \textcolor{red}{14159}26\dots$ Jiří z Poděbrad druhým rokem českým králem,

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\dots$

$\pi = 3, \textcolor{red}{1415}926\dots$ upálení Mistra Jana Husa,

$\pi = 3, 1\textcolor{red}{4159}26\dots$ narození Jana Amose Komenského,

$\pi = 3, 14\textcolor{red}{1592}6\dots$ nástup Habsburků na český trůn,

$\pi = \textcolor{red}{3}, 1415926\dots$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

$\pi = 3, \textcolor{red}{14159}26\dots$ Jiří z Poděbrad druhým rokem českým králem,

$\pi = 3, 1\textcolor{red}{415}926\dots$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\dots$

$\pi = 3, \textcolor{red}{1415}926\dots$ upálení Mistra Jana Husa,

$\pi = 3, 1\textcolor{red}{4159}26\dots$ narození Jana Amose Komenského,

$\pi = 3, 14\textcolor{red}{1592}6\dots$ nástup Habsburků na český trůn,

$\pi = \textcolor{red}{3}, 1415926\dots$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

$\pi = 3, \textcolor{red}{14159}26\dots$ Jiří z Poděbrad druhým rokem českým králem,

$\pi = 3, 1\textcolor{red}{415}926\dots$ stáří Karlovy univerzity v roce 1763,

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\dots$

$\pi = 3, \textcolor{red}{1415}926\dots$ upálení Mistra Jana Husa,

$\pi = 3, 1\textcolor{red}{4159}26\dots$ narození Jana Amose Komenského,

$\pi = 3, 14\textcolor{red}{1592}6\dots$ nástup Habsburků na český trůn,

$\pi = \textcolor{red}{3}, 1415926\dots$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

$\pi = 3, \textcolor{red}{14159}26\dots$ Jiří z Poděbrad druhým rokem českým králem,

$\pi = 3, 1\textcolor{red}{415}926\dots$ stáří Karlovy univerzity v roce 1763,

$\pi = 3, \textcolor{red}{141592}6\dots$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\dots$

$\pi = 3, \textcolor{red}{1415}926\dots$ upálení Mistra Jana Husa,

$\pi = 3, 1\textcolor{red}{4159}26\dots$ narození Jana Amose Komenského,

$\pi = 3, 14\textcolor{red}{1592}6\dots$ nástup Habsburků na český trůn,

$\pi = \textcolor{red}{3}, 1415926\dots$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

$\pi = 3, \textcolor{red}{14159}26\dots$ Jiří z Poděbrad druhým rokem českým králem,

$\pi = 3, 1\textcolor{red}{415}926\dots$ stáří Karlovy univerzity v roce 1763,

$\pi = 3, \textcolor{red}{141592}6\dots$ objevena Amerika, jejíž armáda osvobodila roku 1945 Plzeň

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\dots$

$\pi = 3, \textcolor{red}{1415}926\dots$ upálení Mistra Jana Husa,

$\pi = 3, 1\textcolor{red}{41592}6\dots$ narození Jana Amose Komenského,

$\pi = 3, 14\textcolor{red}{1592}6\dots$ nástup Habsburků na český trůn,

$\pi = \textcolor{red}{3}, 1415926\dots$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

$\pi = 3, \textcolor{red}{14159}26\dots$ Jiří z Poděbrad druhým rokem českým králem,

$\pi = 3, 1\textcolor{red}{415}926\dots$ stáří Karlovy univerzity v roce 1763,

$\pi = 3, \textcolor{red}{141592}6\dots$ objevena Amerika, jejíž armáda osvobodila roku 1945 Plzeň

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\dots = ?$

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\dots$

$\pi = 3, \textcolor{red}{1415}926\dots$ upálení Mistra Jana Husa,

$\pi = 3, 1\textcolor{red}{4159}26\dots$ narození Jana Amose Komenského,

$\pi = 3, 14\textcolor{red}{1592}6\dots$ nástup Habsburků na český trůn,

$\pi = \textcolor{red}{3}, 1415926\dots$ počet Krokových dcer (byly-li každé dvě různé),

$\pi = 3, \textcolor{red}{14159}26\dots$ Jiří z Poděbrad druhým rokem českým králem,

$\pi = 3, \textcolor{red}{1415}926\dots$ stáří Karlovy univerzity v roce 1763,

$\pi = 3, \textcolor{red}{141592}6\dots$ objevena Amerika, jejíž armáda osvobodila roku 1945 Plzeň

- $\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419717\dots = ?$

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000} + \frac{2}{1000000} + \frac{6}{10000000} + \dots$$

Ř + A + D + Y + ...

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Číselné řady a jejich konvergence.

• $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Číselné řady a jejich konvergence.

• $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

$$s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

Ř + A + D + Y + ...

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Číselné řady a jejich konvergence.

• $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

$$s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots$$

Ř + A + D + Y + ...

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Číselné řady a jejich konvergence.

• $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

$$s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$$

- $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

$$s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$$

$$s = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots$$

• $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

$$s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$$

$$s = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1 - 0 - 0 - 0 - \dots$$

• $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

$$s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$$

$$s = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1 - 0 - 0 - 0 - \dots = 1$$

Ř + A + D + Y + ...

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Číselné řady a jejich konvergence.

• $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

$$s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$$

$$s = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1 - 0 - 0 - 0 - \dots = 1$$

$$s = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots)$$

• $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

$$s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$$

$$s = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1 - 0 - 0 - 0 - \dots = 1$$

$$s = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - s$$

Ř + A + D + Y + ...

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Číselné řady a jejich konvergence.

• $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

$$s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$$

$$s = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1 - 0 - 0 - 0 - \dots = 1$$

$$s = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - s \Rightarrow s = \frac{1}{2}$$

• $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

$$s = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$$

$$s = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots = 1 - 0 - 0 - 0 - \dots = 1$$

$$s = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots) = 1 - s \Rightarrow s = \frac{1}{2}$$

$$s = ?$$

Ř + A + D + Y + ...

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Číselné řady a jejich konvergence.

Definice.

Řadou (reálných čísel) rozumíme výraz

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (1)$$

kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in \mathbb{R}$.

Ř + A + D + Y + ...

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Číselné řady a jejich konvergence.

Definice.

Řadou (reálných čísel) rozumíme výraz

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (1)$$

kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in \mathbb{R}$.

Číslo a_n nazýváme n -tým členem řady (1),

Ř + A + D + Y + ...

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Číselné řady a jejich konvergence.

Definice.

Řadou (reálných čísel) rozumíme výraz

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (1)$$

kde pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in \mathbb{R}$.

Číslo a_n nazýváme n -tým členem řady (1), posloupnost (s_n) definovanou předpisem

$$s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

nazýváme posloupností částečných součtů řady (1).

Ř + A + D + Y + ...

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Číselné řady a jejich konvergence.

Existuje-li

$$\lim s_n =: s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\},$$

nazýváme ji součtem řady (1) a píšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s;$$

Ř + A + D + Y + ...

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Číselné řady a jejich konvergence.

Existuje-li

$$\lim s_n =: s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\},$$

nazýváme ji součtem řady (1) a píšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s;$$

je-li navíc $s \in \mathbb{R}$, říkáme, že řada (1) konverguje.

Ř + A + D + Y + ...

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Číselné řady a jejich konvergence.

- Bud' $q \in (-1, 1)$. Pak pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$$

- Bud' $q \in (-1, 1)$. Pak pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$$

platí, že

$$s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

- Bud' $q \in (-1, 1)$. Pak pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$$

platí, že

$$s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} \rightarrow \frac{0 - 1}{q - 1} = \frac{1}{1 - q},$$

- Bud' $q \in (-1, 1)$. Pak pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$$

platí, že

$$s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} \rightarrow \frac{0 - 1}{q - 1} = \frac{1}{1 - q},$$

a proto

$$\textcolor{red}{s} = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1 - q}.$$

- Bud' $q \in (-1, 1)$. Pak pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

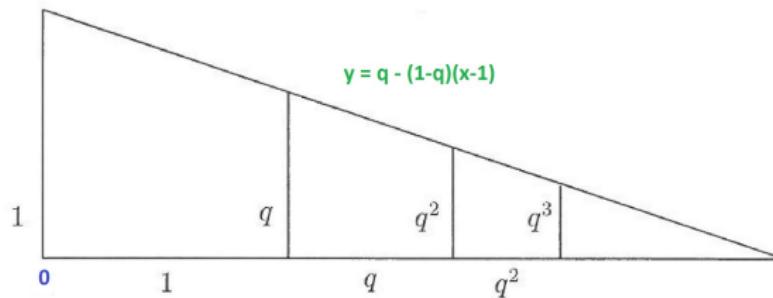
$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$$

platí, že

$$s_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} \rightarrow \frac{0 - 1}{q - 1} = \frac{1}{1 - q},$$

a proto

$$\textcolor{red}{s} = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1 - q}.$$



- Uvažujme řadu

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.$$

- Uvažujme řadu

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.$$

Pak posloupnost částečných součtů

$$(s_n) = 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$$

nemá limitu,

- Uvažujme řadu

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.$$

Pak posloupnost částečných součtů

$$(s_n) = 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$$

nemá limitu, a proto řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ nemá součet.

- Uvažujme řadu

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.$$

Pak posloupnost částečných součtů

$$(s_n) = 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$$

nemá limitu, a proto řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ nemá součet.

- Pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n$$

- Uvažujme řadu

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.$$

Pak posloupnost částečných součtů

$$(s_n) = 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$$

nemá limitu, a proto řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ nemá součet.

- Pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n$$

platí

$$s_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

- Uvažujme řadu

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.$$

Pak posloupnost částečných součtů

$$(s_n) = 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$$

nemá limitu, a proto řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ nemá součet.

- Pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n$$

platí

$$s_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1) \rightarrow \infty,$$

- Uvažujme řadu

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.$$

Pak posloupnost částečných součtů

$$(s_n) = 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$$

nemá limitu, a proto řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ nemá součet.

- Pro posloupnost (s_n) částečných součtů řady

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n$$

platí

$$s_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1) \rightarrow \infty,$$

a proto

$$\textcolor{red}{s} = \sum_{n=1}^{\infty} n = \infty.$$

Ř + A + D + Y + ...

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Harmonická řada.

- Uvažujme řadu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

- Uvažujme řadu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \frac{1}{2^k+3} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}}$$

- Uvažujme řadu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \frac{1}{2^k+3} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2^{k+1}} (2^{k+1} - 2^k) = \frac{1}{2},$$

Ř + A + D + Y + ...

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Harmonická řada.

• Uvažujme řadu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \frac{1}{2^k+3} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2^{k+1}} (2^{k+1} - 2^k) = \frac{1}{2},$$

je (Nicole Oresme, asi v r. 1350)

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{2}} + \dots$$

Ř + A + D + Y + ...

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Harmonická řada.

• Uvažujme řadu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \frac{1}{2^k+3} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2^{k+1}} (2^{k+1} - 2^k) = \frac{1}{2},$$

je (Nicole Oresme, asi v r. 1350)

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{2}} + \dots = \infty.$$

- Uvažujme řadu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \frac{1}{2^k+3} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2^{k+1}} (2^{k+1} - 2^k) = \frac{1}{2},$$

je (Nicole Oresme, asi v r. 1350)

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{2}} + \dots = \infty.$$

Jinak. Předpokládejme **sporem**, že

$$s_n \rightarrow s \in \mathbb{R}$$

- Uvažujme řadu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \frac{1}{2^k+3} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2^{k+1}} (2^{k+1} - 2^k) = \frac{1}{2},$$

je (Nicole Oresme, asi v r. 1350)

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{2}} + \dots = \infty.$$

Jinak. Předpokládejme **sporem**, že

$$s_n \rightarrow s \in \mathbb{R} \Rightarrow s_{2n} - s_n \rightarrow s - s = 0.$$

$\checkmark + A + D + Y + \dots$

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Harmonická řada.

• Uvažujme řadu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \frac{1}{2^k+3} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2^{k+1}} (2^{k+1} - 2^k) = \frac{1}{2},$$

je (Nicole Oresme, asi v r. 1350)

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{2}} + \dots = \infty.$$

Jinak. Předpokládejme **sporem**, že

$$s_n \rightarrow s \in \mathbb{R} \Rightarrow s_{2n} - s_n \rightarrow s - s = 0.$$

Současně ale

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$\check{R} + A + D + Y + \dots$

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Harmonická řada.

• Uvažujme řadu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \frac{1}{2^k+3} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} \geq \frac{1}{2^{k+1}} (2^{k+1} - 2^k) = \frac{1}{2},$$

je (Nicole Oresme, asi v r. 1350)

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{2}} + \dots = \infty.$$

Jinak. Předpokládejme **sporem**, že

$$s_n \rightarrow s \in \mathbb{R} \Rightarrow s_{2n} - s_n \rightarrow s - s = 0.$$

Současně ale

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n}(2n - n) = \frac{1}{2},$$

a to je spor.

Ř + A + D + Y + ...

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Harmonická řada.

- Uvažujme řadu

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

- Uvažujme řadu

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ platí

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

- Uvažujme řadu

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ platí

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

je

$$\textcolor{red}{s_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 1 + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n-1)}$$

- Uvažujme řadu

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ platí

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

je

$$\begin{aligned}
 s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 1 + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n-1)} = \\
 &= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)
 \end{aligned}$$

- Uvažujme řadu

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ platí

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

je

$$\begin{aligned}
 \textcolor{red}{s_n} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 1 + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n-1)} = \\
 &= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 2 - \frac{1}{n},
 \end{aligned}$$

- Uvažujme řadu

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ platí

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

je

$$\begin{aligned}
 \textcolor{red}{s_n} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 1 + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n-1)} = \\
 &= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 2 - \frac{1}{n},
 \end{aligned}$$

a proto

$$2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$\check{R} + A + D + Y + \dots$

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Harmonická řada.

● Uvažujme řadu

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ platí

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

je

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 1 + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n-1)} = \\ &= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 2 - \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

a proto

$$2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

- Uvažujme řadu

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Pak, protože pro každé $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ platí

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

je

$$\begin{aligned} \textcolor{red}{s_n} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < 1 + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n-1)} = \\ &= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 2 - \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

a proto

$$2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \doteq 1,6449\dots .$$

Ř + A + D + Y + ...

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Harmonická řada.

- Uvažujme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

„ $6 \notin n$ “

Ř + A + D + Y + ...

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Harmonická řada.

- Uvažujme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

„ $6 \notin n$ “

Pak

$$s = \sum_{\substack{n=1 \\ „6 \notin n“}}^{\infty} \frac{1}{n} \leq 9 \cdot 1 + 9^2 \cdot \frac{1}{10} + 9^3 \cdot \frac{1}{100} + \dots =$$

- Uvažujme řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

„6 ∉ n“

Pak

$$\begin{aligned}
 s &= \sum_{\substack{n=1 \\ „6 \notin n“}}^{\infty} \frac{1}{n} \leq 9 \cdot 1 + 9^2 \cdot \frac{1}{10} + 9^3 \cdot \frac{1}{100} + \dots = \\
 &= 9 \cdot \left(1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10} \right)^2 + \left(\frac{9}{10} \right)^3 + \dots \right) = 90.
 \end{aligned}$$

Ř + A + D + Y + ...

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Harmonická řada.

- Nyní dokažme, že

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p}$$

Ř + A + D + Y + ...

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Harmonická řada.

- Nyní dokažme, že

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} = \infty.$$

- Nyní dokažme, že

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} = \infty.$$

Bud' n libovolné přirozené číslo a bud' p_1, p_2, \dots, p_k právě všechna prvočísla menší nebo rovna n . Pak zřejmě existuje $\alpha \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \dots + \frac{1}{p_1^\alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots + \frac{1}{p_2^\alpha}\right) \dots$$

$$\dots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \dots + \frac{1}{p_k^\alpha}\right) \leq$$

- Nyní dokažme, že

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} = \infty.$$

Bud' n libovolné přirozené číslo a bud' p_1, p_2, \dots, p_k právě všechna prvočísla menší nebo rovna n . Pak zřejmě existuje $\alpha \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \dots + \frac{1}{p_1^\alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots + \frac{1}{p_2^\alpha}\right) \dots$$

$$\dots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \dots + \frac{1}{p_k^\alpha}\right) \leq$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \dots\right) \leq$$

- Nyní dokažme, že

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} = \infty.$$

Bud' n libovolné přirozené číslo a bud' p_1, p_2, \dots, p_k právě všechna prvočísla menší nebo rovna n . Pak zřejmě existuje $\alpha \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \dots + \frac{1}{p_1^\alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots + \frac{1}{p_2^\alpha}\right) \dots$$

$$\dots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \dots + \frac{1}{p_k^\alpha}\right) \leq$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \dots\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}} \cdots \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$$

- Nyní dokažme, že

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} = \infty.$$

Bud' n libovolné přirozené číslo a bud' p_1, p_2, \dots, p_k právě všechna prvočísla menší nebo rovna n . Pak zřejmě existuje $\alpha \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \dots + \frac{1}{p_1^\alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots + \frac{1}{p_2^\alpha}\right) \dots$$

$$\dots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \dots + \frac{1}{p_k^\alpha}\right) \leq$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \dots\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}} \cdots \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} = \prod_{j=1}^k \left(\frac{p_j}{p_j - 1}\right)$$

- Nyní dokažme, že

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{N} \\ p \text{ je prvočíslo}}} \frac{1}{p} = \infty.$$

Bud' n libovolné přirozené číslo a bud' p_1, p_2, \dots, p_k právě všechna prvočísla menší nebo rovna n . Pak zřejmě existuje $\alpha \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \dots + \frac{1}{p_1^\alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots + \frac{1}{p_2^\alpha}\right) \dots$$

$$\dots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \dots + \frac{1}{p_k^\alpha}\right) \leq$$

$$\leq \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \dots\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}} \cdots \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} = \prod_{j=1}^k \left(\frac{p_j}{p_j - 1}\right) = \prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)$$

Ř + A + D + Y + ...

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Harmonická řada.

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)$$

Ř + A + D + Y + ...

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Harmonická řada.

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \leq \ln \left(\prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \right)$$

Ř + A + D + Y + ...

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Harmonická řada.

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \leq \ln \left(\prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \right) = \sum_{j=1}^k \ln \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)$$

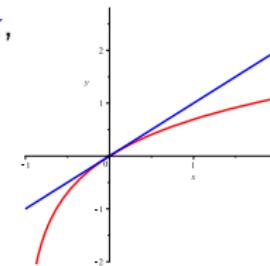
Ř + A + D + Y + ...

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Harmonická řada.

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \leq \ln \left(\prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \right) = \sum_{j=1}^k \ln \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)$$

Nyní si všimněme, že pro každé $x > -1$ je $\ln(1+x) \leq x$,

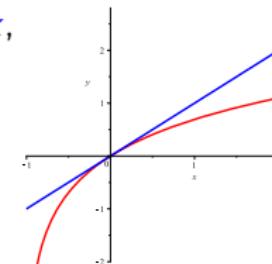


Ř + A + D + Y + ...

└ O čem tato přednáška taky je.
└ Harmonická řada.

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \leq \ln \left(\prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \right) = \sum_{j=1}^k \ln \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)$$

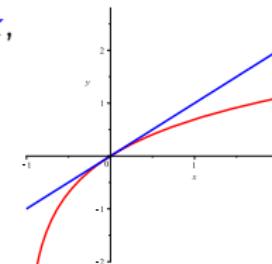
Nyní si všimněme, že pro každé $x > -1$ je $\ln(1+x) \leq x$,



a proto $\ln \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \leq \sum_{j=1}^k \frac{1}{p_j - 1}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} &\leq \prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \ln \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) &\leq \ln \left(\prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \right) = \sum_{j=1}^k \ln \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \end{aligned}$$

Nyní si všimněme, že pro každé $x > -1$ je $\ln(1+x) \leq x$,



a proto $\ln \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \leq \sum_{j=1}^k \frac{1}{p_j - 1} \leq 2 \sum_{j=1}^k \frac{1}{p_j}$.

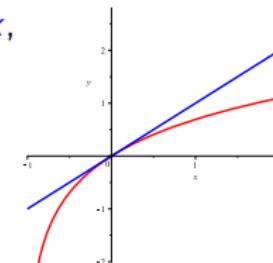
$\check{R} + A + D + Y + \dots$

- └ O čem tato přednáška taky je.
- └ Harmonická řada.

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \leq \ln \left(\prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \right) = \sum_{j=1}^k \ln \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)$$

Nyní si všimněme, že pro každé $x > -1$ je $\ln(1+x) \leq x$,



a proto $\ln \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \leq \sum_{j=1}^k \frac{1}{p_j - 1} \leq 2 \sum_{j=1}^k \frac{1}{p_j}$.

Odtud již snadno plyne

$$\sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{1}{p} \geq \lim \left[\frac{1}{2} \ln \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \right]$$

p je prvočíslo

Ř + A + D + Y + ...

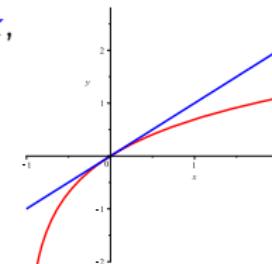
└ O čem tato přednáška taky je.

└ Harmonická řada.

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \leq \prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \leq \ln \left(\prod_{j=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right) \right) = \sum_{j=1}^k \ln \left(1 + \frac{1}{p_j - 1}\right)$$

Nyní si všimněme, že pro každé $x > -1$ je $\ln(1+x) \leq x$,



a proto $\ln \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \leq \sum_{j=1}^k \frac{1}{p_j - 1} \leq 2 \sum_{j=1}^k \frac{1}{p_j}$.

Odtud již snadno plyne

$$\sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{1}{p} \geq \lim \left[\frac{1}{2} \ln \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right) \right] = \infty.$$

p je prvočíslo

Ř + A + D + Y + ...

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Harmonická řada.

Věta.

Posloupnost

$$c_n := \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \ln n$$

je konvergentní,

Ř + A + D + Y + ...

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Harmonická řada.

Věta.

Posloupnost

$$c_n := \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \ln n$$

je konvergentní, tzn. že existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim c_n = c$.

Ř + A + D + Y + ...

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Harmonická řada.

Věta.

Posloupnost

$$c_n := \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \ln n$$

je konvergentní, tzn. že existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim c_n = c$.

$$\left(c \doteq 0,57721566490153286060651209008240243104215933593992 \dots \atop \dots \text{ Eulerova konstanta} \right)$$

R + A + D + Y + ...

└ O čem tato přednáška taky je.
└ Harmonická řada.

Věta.

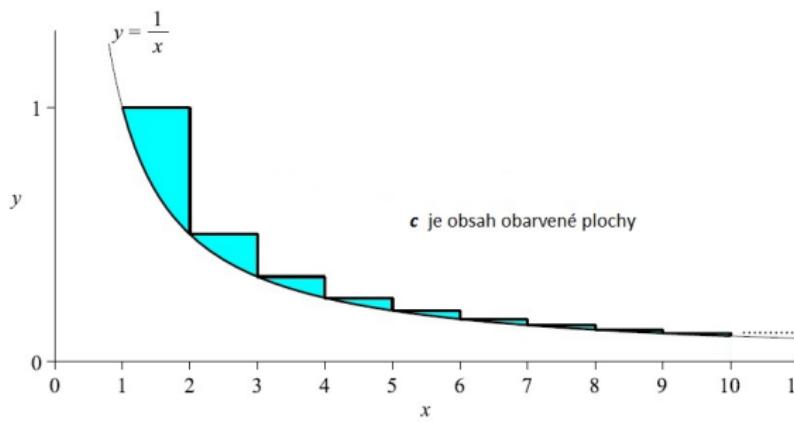
Posloupnost

$$c_n := \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \ln n$$

je konvergentní, tzn. že existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim c_n = c$.

$$\left(c \doteq 0,57721566490153286060651209008240243104215933593992 \dots \right)$$

... Eulerova konstanta



Ř + A + D + Y + ...

└ O čem tato přednáška taky je.

└ Leibnizova řada.

- Určeme součet (konvergentní) řady

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

- Určeme součet (konvergentní) řady

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$s_{2n} = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$$

- Určeme součet (konvergentní) řady

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$\begin{aligned}s_{2n} &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n}\right)\end{aligned}$$

- Určeme součet (konvergentní) řady

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$\begin{aligned}
 s_{2n} &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)
 \end{aligned}$$

- Určeme součet (konvergentní) řady

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$\begin{aligned}
 s_{2n} &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \\
 c_n &:= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \ln n
 \end{aligned}$$

- Určeme součet (konvergentní) řady

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$\begin{aligned}
 s_{2n} &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \\
 &= (c_{2n} + \ln(2n)) - (c_n + \ln n)
 \end{aligned}$$

- Určeme součet (konvergentní) řady

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$\begin{aligned}
 s_{2n} &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \\
 &= (c_{2n} + \ln(2n)) - (c_n + \ln n) = c_{2n} - c_n + \ln 2,
 \end{aligned}$$

- Určeme součet (konvergentní) řady

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$\begin{aligned} s_{2n} &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \\ &= (c_{2n} + \ln(2n)) - (c_n + \ln n) = c_{2n} - c_n + \ln 2, \end{aligned}$$

a proto ($c_n \rightarrow c \in \mathbb{R}$):

$$s_{2n} \rightarrow c - c + \ln 2 = \ln 2$$

- Určeme součet (konvergentní) řady

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$\begin{aligned} s_{2n} &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \\ &= (c_{2n} + \ln(2n)) - (c_n + \ln n) = c_{2n} - c_n + \ln 2, \end{aligned}$$

a proto ($c_n \rightarrow c \in \mathbb{R}$):

$$s_{2n} \rightarrow c - c + \ln 2 = \ln 2$$

$$s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{2n+1} \rightarrow \ln 2 + 0 = \ln 2$$

- Určeme součet (konvergentní) řady

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$\begin{aligned} s_{2n} &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \\ &= (c_{2n} + \ln(2n)) - (c_n + \ln n) = c_{2n} - c_n + \ln 2, \end{aligned}$$

a proto ($c_n \rightarrow c \in \mathbb{R}$):

$$\left. \begin{array}{l} s_{2n} \rightarrow c - c + \ln 2 = \ln 2 \\ s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{2n+1} \rightarrow \ln 2 + 0 = \ln 2 \end{array} \right\} \Rightarrow s_n \rightarrow \ln 2$$

- Určeme součet (konvergentní) řady

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

$$\begin{aligned} s_{2n} &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) = \\ &= (c_{2n} + \ln(2n)) - (c_n + \ln n) = c_{2n} - c_n + \ln 2, \end{aligned}$$

a proto ($c_n \rightarrow c \in \mathbb{R}$):

$$\left. \begin{array}{l} s_{2n} \rightarrow c - c + \ln 2 = \ln 2 \\ s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{2n+1} \rightarrow \ln 2 + 0 = \ln 2 \end{array} \right\} \Rightarrow s_n \rightarrow \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Ř + A + D + Y + ...

└ O přerovnávání řad.

- Zjistili jsme, že

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = \ln 2 \doteq 0,6931471806.$$

- Zjistili jsme, že

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = \ln 2 \doteq 0,6931471806.$$

- Podobnou technikou lze dokázat, že

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

- Zjistili jsme, že

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = \ln 2 \doteq 0,6931471806.$$

- Podobnou technikou lze dokázat, že

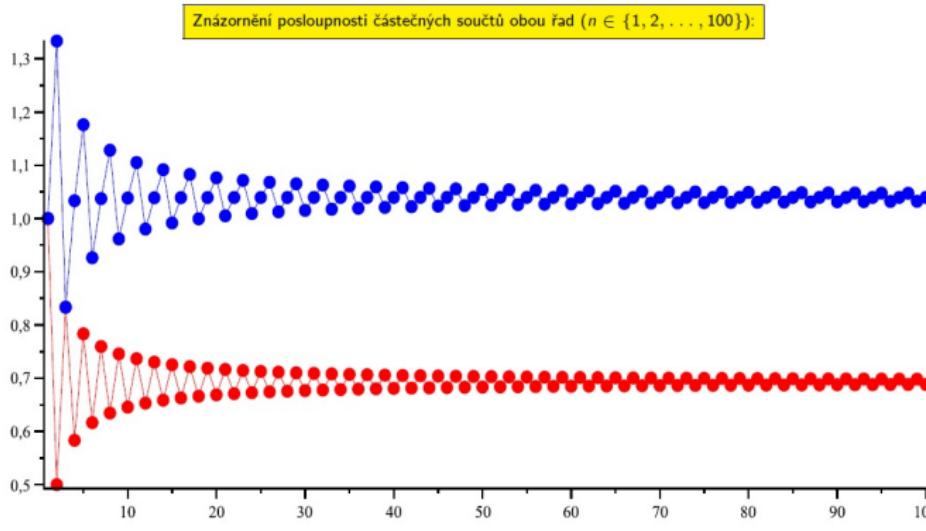
$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots = \frac{3}{2} \ln 2 \doteq 1.039720771.$$

- Zjistili jsme, že

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = \ln 2 \doteq 0,6931471806.$$

- Podobnou technikou lze dokázat, že

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots = \frac{3}{2} \ln 2 \doteq 1.039720771.$$



$\check{R} + A + D + Y + \dots$

└ O přerovnávání řad.

└ Neabsolutně konvergentní řady.

Věta.

Nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty.$$

$\check{R} + A + D + Y + \dots$

└ O přerovnávání řad.

└ Neabsolutně konvergentní řady.

Věta.

Nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty.$$

Pak

- pro každé $s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ existuje bijekce $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taková, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = s;$$

$\check{R} + A + D + Y + \dots$

└ O přerovnávání řad.

└ Neabsolutně konvergentní řady.

Věta.

Nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty.$$

Pak

- pro každé $s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ existuje bijekce $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taková, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = s;$$

- existuje bijekce $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taková, že součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)}$ neexistuje.

$\check{R} + A + D + Y + \dots$

└ O přerovnávání řad.

└ Neabsolutně konvergentní řady.

Věta.

Nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty.$$

Pak

- pro každé $s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ existuje bijekce $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taková, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} = s;$$

- existuje bijekce $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taková, že součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi(n)}$ neexistuje.

(Vhodným přerovnáním neabsolutně konvergentní řady lze získat jakýkoliv výsledek.)

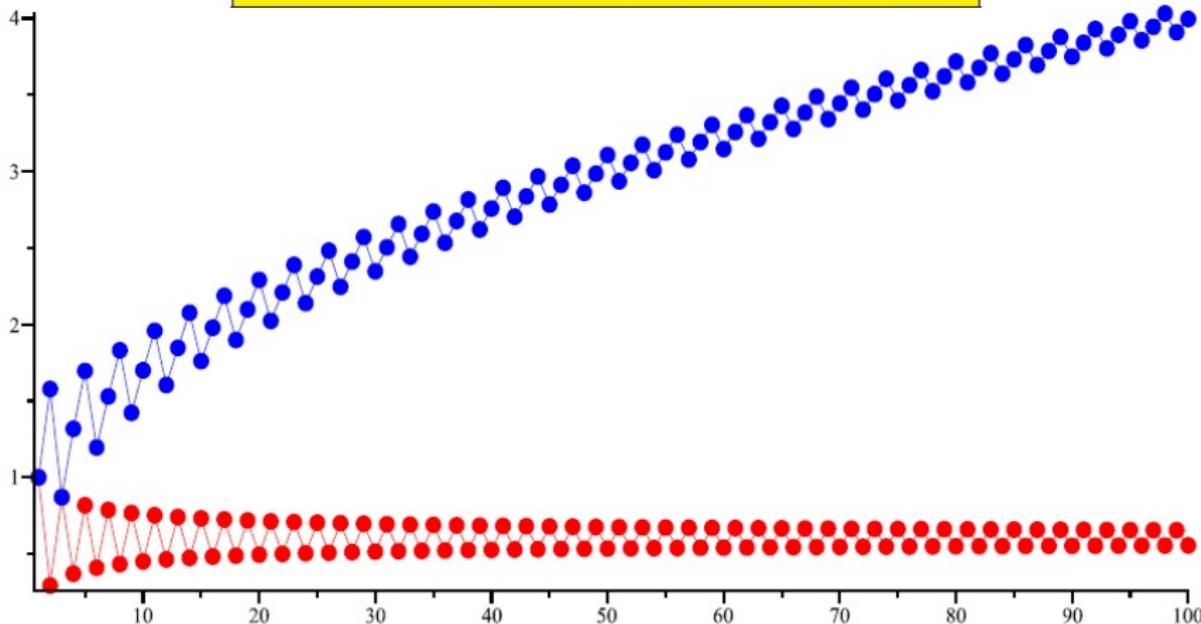
R + A + D + Y + ...

└ O přerovnávání řad.

— Další hezké příklady Petra Vodstrčila.

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \dots \neq 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \dots$$

Znázornění posloupnosti částečných součtů obou řad ($n \in \{1, 2, \dots, 100\}$)



Ř + A + D + Y + ...

└ O přerovnávání řad.

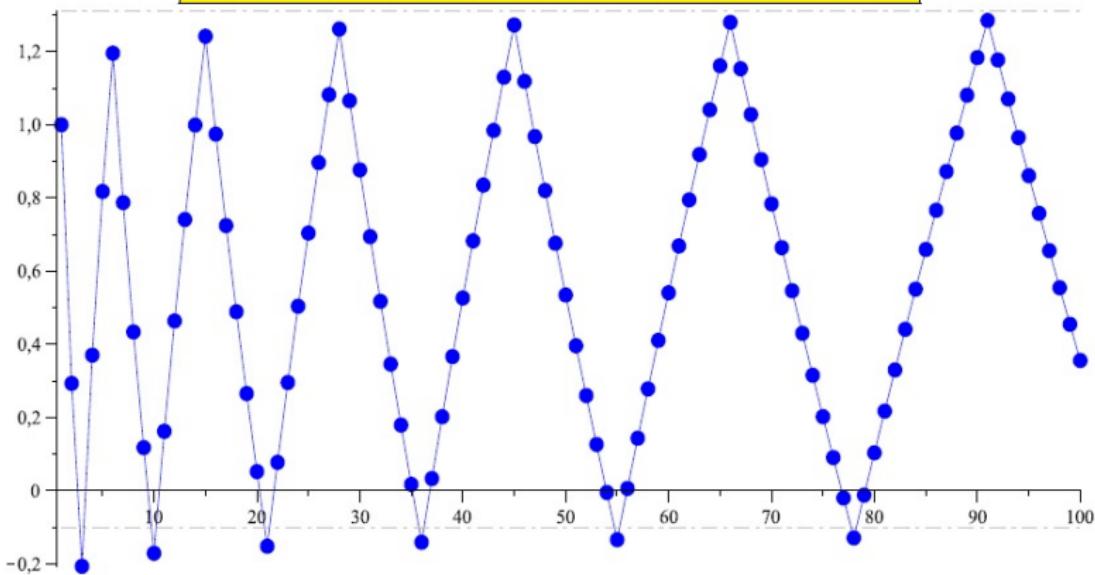
└ Další hezké příklady Petra Vodstrčila.

(další přerovnání řady

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{9}} - \frac{1}{\sqrt{10}} + \dots$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{17}} - \dots$$

Znázornění posloupnosti částečných součtů přerovnané řady ($n \in \{1, 2, \dots, 100\}$):



$\check{R} + A + D + Y + \dots$

└ O pěrovánávání řad.

└ Absolutně konvergentní řady.

Věta.

Nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \in \mathbb{R}$$

$\check{R} + A + D + Y + \dots$

└ O přerovnávání řad.

└ Absolutně konvergentní řady.

Věta.

Nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \in \mathbb{R}$$

a bud'

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ bijekce.}$$

$\check{R} + A + D + Y + \dots$

└ O přerovnávání řad.

└ Absolutně konvergentní řady.

Věta.

Nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \in \mathbb{R}$$

a bud'

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ bijekce.}$$

Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$$

$\check{R} + A + D + Y + \dots$

└ O přerovnávání řad.

└ Absolutně konvergentní řady.

Věta.

Nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \in \mathbb{R}$$

a bud'

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ bijekce.}$$

Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} \in \mathbb{R}.$$

$\check{R} + A + D + Y + \dots$

└ O pěrovánávání řad.

└ Absolutně konvergentní řady.

Věta.

Nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \in \mathbb{R}$$

a bud'

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ bijekce.}$$

Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)} \in \mathbb{R}.$$

(Součet absolutně konvergentní řady a řady vzniklé jejím přerovnáním je stejný.)

Ř + A + D + Y + ...

└ O přerovnávání řad.

└ Absolutně konvergentní řady.

• $(\frac{9}{10})^1 - (\frac{9}{10})^2 + (\frac{9}{10})^3 - (\frac{9}{10})^4 + (\frac{9}{10})^5 - (\frac{9}{10})^6 + \dots$

Ř + A + D + Y + ...

└ O přerovnávání řad.

└ Absolutně konvergentní řady.

• $\left(\frac{9}{10}\right)^1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 - \left(\frac{9}{10}\right)^6 + \dots = \frac{9}{19} \doteq 0,4736842105$

R + A + D + Y + ...

└ O přerovnávání řad.

└ Absolutně konvergentní řady.

$$\bullet \quad \left(\frac{9}{10}\right)^1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 - \left(\frac{9}{10}\right)^6 + \dots = \frac{9}{19} \doteq 0,4736842105$$

$$\left(\frac{9}{10}\right)^1 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 + \left(\frac{9}{10}\right)^7 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \dots$$

$\check{R} + A + D + Y + \dots$

└ O přerovnávání řad.

└ Absolutně konvergentní řady.

$$\bullet \quad \left(\frac{9}{10}\right)^1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 - \left(\frac{9}{10}\right)^6 + \dots = \frac{9}{19} \doteq 0,4736842105$$

$$\left(\frac{9}{10}\right)^1 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 + \left(\frac{9}{10}\right)^7 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \dots = \frac{9}{19}$$

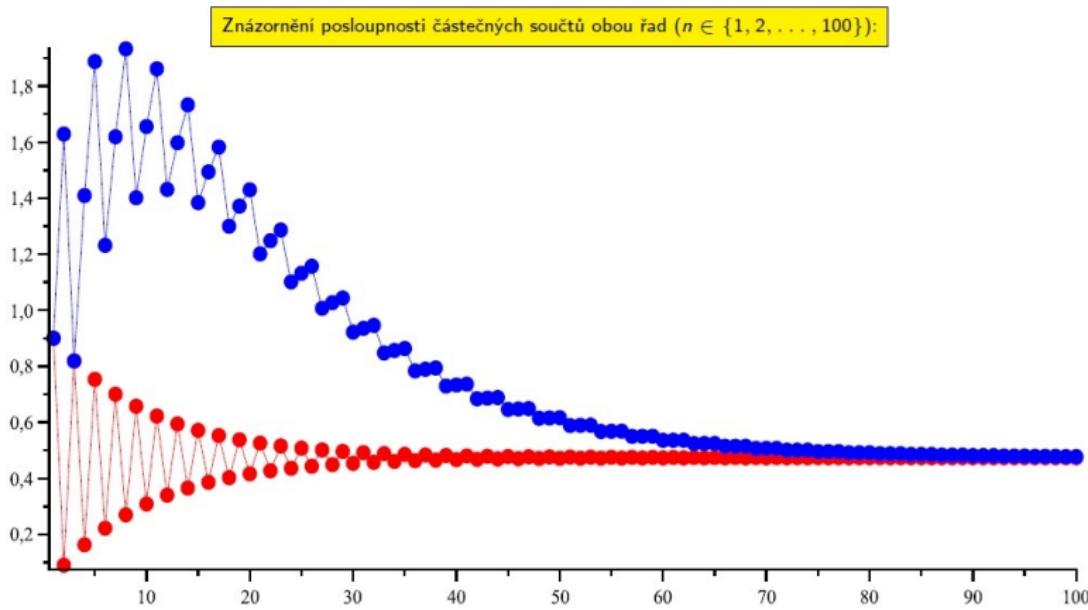
R + A + D + Y + ..

└ O přerovnávání řad.

Absolutně konvergentní řady.

$$\bullet \left(\frac{9}{10}\right)^1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 - \left(\frac{9}{10}\right)^6 + \dots = \frac{9}{19} \doteq 0,4736842105$$

$$\left(\frac{9}{10}\right)^1 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 - \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^5 + \left(\frac{9}{10}\right)^7 - \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \dots = \frac{9}{19}$$



Literatura a zdroje



J. Veselý

Matematická analýza pro učitele

Matfyzpress, Praha 1997

Literatura a zdroje

 J. Veselý

Matematická analýza pro učitele

Matfyzpress, Praha 1997

 E. Calda, HgS

Základy patamatematiky

Prometheus, Praha 2005

Literatura a zdroje

 J. Veselý

Matematická analýza pro učitele

Matfyzpress, Praha 1997

 E. Calda, HgS

Základy patamatematiky

Prometheus, Praha 2005

 J. Bouchala, P. Vodstrčil

O přerovnávání řad

<http://am.vsb.cz/osma>

Literatura a zdroje

 J. Veselý

Matematická analýza pro učitele

Matfyzpress, Praha 1997

 E. Calda, HgS

Základy patamatematiky

Prometheus, Praha 2005

 J. Bouchala, P. Vodstrčil

O přerovnávání řad

<http://am.vsb.cz/osma>

 P. Vodstrčil

... ten, co umí (nejen) s Maplem

Katedra aplikované matematiky (už nějaký čas)

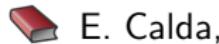
Literatura a zdroje



J. Veselý

Matematická analýza pro učitele

Matfyzpress, Praha 1997



E. Calda, HgS

Základy patamatematiky

Prometheus, Praha 2005



J. Bouchala, P. Vodstrčil

O přerovnávání řad

<http://am.vsb.cz/osma>



P. Vodstrčil

... ten, co umí (nejen) s Maplem

Katedra aplikované matematiky (už nějaký čas)

Děkuji vám za pozornost!

Literatura a zdroje



J. Veselý

Matematická analýza pro učitele

Matfyzpress, Praha 1997



E. Calda, HgS

Základy patamatematiky

Prometheus, Praha 2005



J. Bouchala, P. Vodstrčil

O přerovnávání řad

<http://am.vsb.cz/osma>

Děkuji vám za pozornost!



P. Vodstrčil

... ten, co umí (nejen) s Maplem

Katedra aplikované matematiky (už nějaký čas)