Jak dosáhnout vrcholu - přednáška s drobným překvapením

Petr Beremlijski

ŠKOMAM
4. 2. 2015

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obsah

Lokální extrémy

- Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 **lokální maximum**, existuje-li prstencové okolí bodu x_0 takové, že pro všechna x z tohoto okolí platí

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Lokální extrémy

- Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 **lokální maximum**, existuje-li prstencové okolí bodu x_0 takové, že pro všechna x z tohoto okolí platí
$$f(x) \leq f(x_0).$$

- Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 **lokální minimum**, existuje-li prstencové okolí bodu x_0 takové, že pro všechna x z tohoto okolí platí
$$f(x) \geq f(x_0).$$

Globální extrémy

- Řekneme, že funkce f nabývá na množině $\Omega \subset D_f$ svého **maxima** v bodě x_0, je-li
$$x_0 \in \Omega \text{ a platí } f(x_0) = \max\{f(x) : x \in \Omega\}.$$

Globální extrémy

- Řekneme, že funkce f nabývá na množině $\Omega \subset D_f$ svého **maxima** v bodě x_0, je-li
$$x_0 \in \Omega \text{ a platí } f(x_0) = \max\{f(x) : x \in \Omega\}.$$

- Řekneme, že funkce f nabývá na množině $\Omega \subset D_f$ svého **minima** v bodě x_0, je-li
$$x_0 \in \Omega \text{ a platí } f(x_0) = \min\{f(x) : x \in \Omega\}.$$

Nutná podmínka existence lokálního extrému

- Má-li funkce f v x_0 lokální extrém, pak buď

$$f'(x_0) = 0,$$

Nutná podmínka existence lokálního extrému

- Má-li funkce f v x_0 lokální extrém, pak buď

$$f'(x_0) = 0,$$

nebo

$$f'(x_0) \text{ neexistuje.}$$

Optimalizační úloha

- **Optimalizační úlohou** rozumíme problém:

„Řešte úlohu $\min\limits_{x\in\Omega} f(x)$."

Optimalizační úloha

- **Optimalizační úlohou** rozumíme problém:

$$\text{„Řešte úlohu } \min_{x\in\Omega} f(x)\text{.“}$$

nebo

$$\text{„Řešte úlohu } \max_{x\in\Omega} f(x)\text{,“}$$

$$\text{kde } \Omega \subset D_f\,.$$

Optimalizační úloha

- **Optimalizační úlohou** rozumíme problém:

„Řešte úlohu $\min\limits_{x \in \Omega} f(x)$."

nebo

„Řešte úlohu $\max\limits_{x \in \Omega} f(x)$,"

kde $\Omega \subset D_f$.

- Protože platí

$$\arg\min_{x \in \Omega} f(x) = \arg\max_{x \in \Omega} \left(-f(x)\right),$$

omezíme se při zkoumání optimalizačních úloh pouze na první problém.

Výlet do minulosti

- první optimalizační úlohy – Didó (založení Kartága - 814 př. n. l.)

Výlet do minulosti

- první optimalizační úlohy – Didó (založení Kartága - 814 př. n. l.)
- „Nová stereometrie vinných sudů“ (1615) – Kepler (1571 - 1630)

Výlet do minulosti

- první optimalizační úlohy – Didó (založení Kartága - 814 př. n. l.)
- „Nová stereometrie vinných sudů“ (1615) – Kepler (1571 - 1630)
- lokalizace extrému – Fermat (1601 - 1665)

Výlet do minulosti

- první optimalizační úlohy – Didó (založení Kartága - 814 př. n. l.)
- „Nová stereometrie vinných sudů“ (1615) – Kepler (1571 - 1630)
- lokalizace extrému – Fermat (1601 - 1665)
- diferenciální kalkul - Newton (1643 - 1727), Leibniz (1646 - 1716)

Klasifikace optimalizačních úloh

- **Optimalizační úloha bez omezení**:

$$\min_{x \in D_f} f(x)$$

Klasifikace optimalizačních úloh

- **Optimalizační úloha bez omezení**:

$$\min_{x \in D_f} f(x)$$

- **Optimalizační úloha s omezeními**:

$$\min_{x \in \Omega} f(x)$$

Příklady optimalizačních úloh

- **Optimalizační úloha bez omezení** (kulička o hmotnosti m volně zavěšená na pružině):

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} x_1^2 + x_2^2 + m x_2$$

Příklady optimalizačních úloh

- **Optimalizační úloha bez omezení** (kulička o hmotnosti m volně zavěšená na pružině):

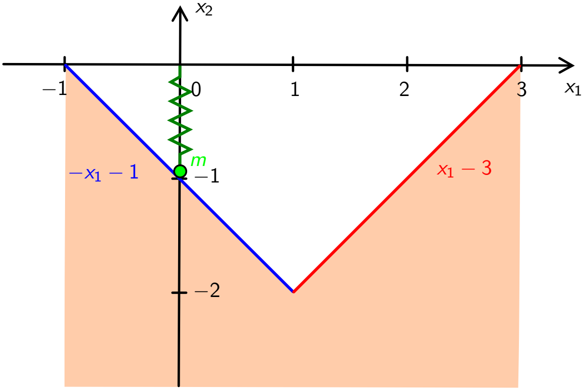
$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} x_1^2 + x_2^2 + mx_2$$

- **Optimalizační úloha s omezeními** (kulička o hmotnosti m zavěšená na pružině, která visí nad překážkou):

$$\min_{x\in\Omega} x_1^2 + x_2^2 + mx_2,$$

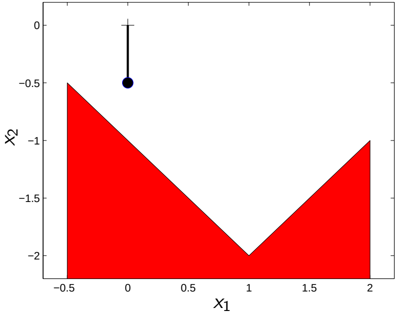
$$\text{kde } \Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 + 1 \geq 0, \; -x_1 + x_2 + 3 \geq 0\}.$$

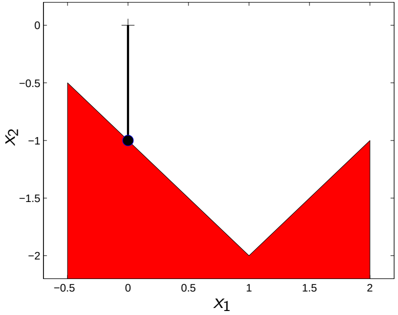
Optimalizační úloha s omezeními



Obrázek: Příklad rovnovážného stavu kuličky na pružině (úloha s omezením)

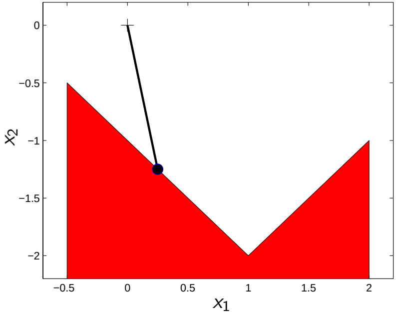
Optimalizační úloha s omezeními

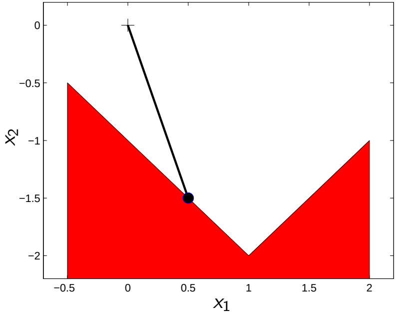




Obrázek: Rovnovážné polohy kuličky o hmotnosti $m=1$ (vlevo) a $m=2$ (vpravo) zavěšené nad překážkou

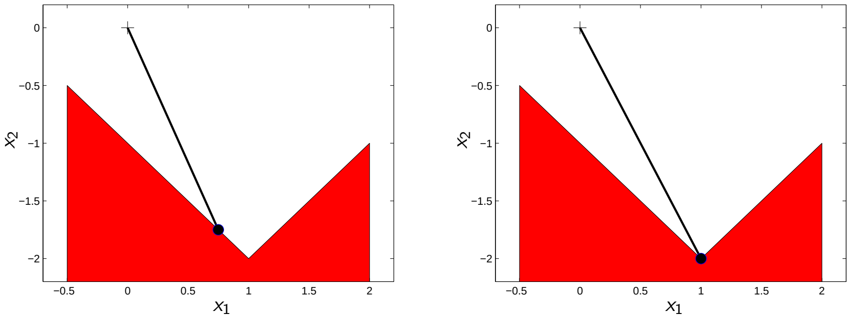
Optimalizační úloha s omezeními





Obrázek: Rovnovážné polohy kuličky o hmotnosti $m=3$ (vlevo) a $m=4$ (vpravo) zavěšené nad překážkou

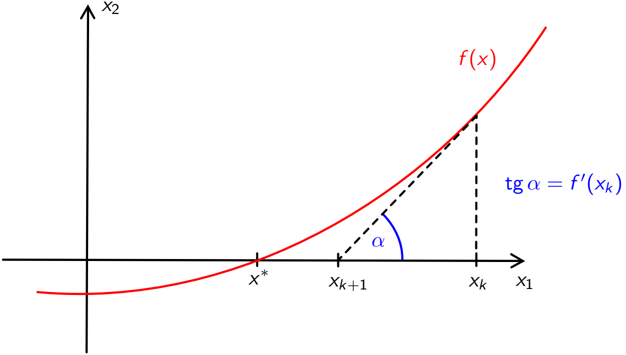
Optimalizační úloha s omezeními



Obrázek: Rovnovážné polohy kuličky o hmotnosti $m=5$ (vlevo) a $m=10$ (vpravo) zavěšené nad překážkou

Řešení rovnice $f(x) = 0$

Newtonova metoda pro řešení rovnice $f(x) = 0$:



Obrázek: Newtonova metoda

Řešení rovnice $f(x) = 0$

- Z předchozího obrázku odvodíme

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}}.$$

Řešení rovnice $f(x) = 0$

- Z předchozího obrázku odvodíme

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}}.$$

- Tuto rovnici upravíme do tvaru

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.}$$

Řešení rovnice $f(x) = 0$

- Z předchozího obrázku odvodíme

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}}.$$

- Tuto rovnici upravíme do tvaru

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.}$$

- Opakováním tohoto iteračního předpisu získáme posloupnost (x_k) „blížící" se řešení x^* rovnice $f(x) = 0$.

Řešení optimalizační úlohy bez omezení

- Předchozí postup použijme pro úlohu

$$\min_{x \in D_f} f(x),$$

kde f je dvojnásobně spojitě diferencovatelná na D_f.

Řešení optimalizační úlohy bez omezení

- Předchozí postup použijme pro úlohu

$$\min_{x \in D_f} f(x),$$

kde f je dvojnásobně spojitě diferencovatelná na D_f.

- A to tak, že vyřešíme rovnici $f'(x) = 0$.

Řešení optimalizační úlohy bez omezení

- Předchozí postup použijme pro úlohu

$$\min_{x \in D_f} f(x),$$

kde f je dvojnásobně spojitě diferencovatelná na D_f.

- A to tak, že vyřešíme rovnici $f'(x) = 0$.

- Tím získáme iterační předpis, kterému se opět říká **Newtonova metoda**:

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}.}$$

A to je vše...

Děkuji vám za pozornost ...