

Spernerovo lemma

Michael Kubesa

michael.kubesa@vsb.cz

Katedra aplikované matematiky, Fakulta elektrotechniky a informatiky,
Vysoká škola báňská–Technická univerzita Ostrava

5.2.2015



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

1 Spernerovo lemma a princip sudosti

2 HRA

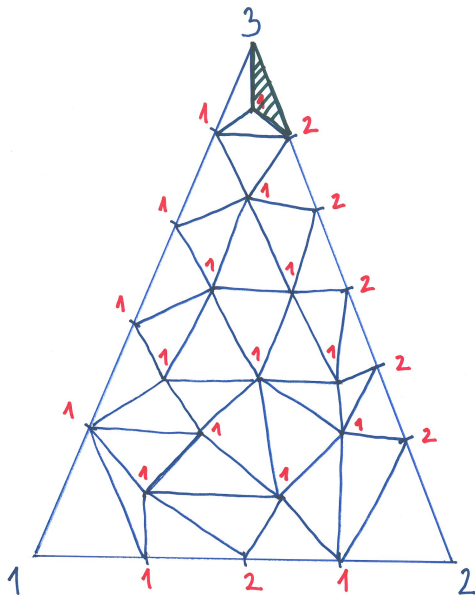
1 Spernerovo lemma a princip sudosti

2 HRA

Nakresleme do roviny velký trojúhelník s vrcholy 1, 2, 3 a rozdělme interiér trojúhelníka na konečný počet trojúhelníčků tak, že žádný trojúhelníček nesmí mít vrchol uvnitř strany jiného trojúhelníčku.

Nakresleme do roviny velký trojúhelník s vrcholy 1, 2, 3 a rozdělme interiér trojúhelníka na konečný počet trojúhelníčků tak, že žádný trojúhelníček nesmí mít vrchol uvnitř strany jiného trojúhelníčku.

Jinými slovy, každé dva trojúhelníčky mají buď společnou stranu, společný vrchol nebo jsou disjunktní. Takovému rozdělení části roviny na oblasti, budeme říkat **triangulace**(viz. obrázek).



Nyní očísľujme čísla 1, 2, 3 všechny vrcholy triangulace takto:

Nyní očísľujme čísla 1, 2, 3 všechny vrcholy triangulace takto:

- Na straně 1-2 nesmíme použít trojku.

Nyní očísľujme čísla 1, 2, 3 všechny vrcholy triangulace takto:

- Na straně 1-2 nesmíme použít trojku.
- Na straně 1-3 nesmíme použít dvojku.

Nyní očísľujme čísla 1, 2, 3 všechny vrcholy triangulace takto:

- Na straně 1-2 nesmíme použít trojku.
- Na straně 1-3 nesmíme použít dvojku.
- Na straně 2-3 nesmíme použít jedničku.

Nyní očísľujme čísla 1, 2, 3 všechny vrcholy triangulace takto:

- Na straně 1-2 nesmíme použít trojku.
- Na straně 1-3 nesmíme použít dvojku.
- Na straně 2-3 nesmíme použít jedničku.
- ostatní vrcholy můžeme očíslovat libovolně (viz obrázek).

Věta

(Spernerovo lemma) *Každá triangulace očíslovaná výše uvedeným způsobem musí obsahovat trojúhelníček jehož vrcholy mají čísla 1, 2, 3.*

Věta

(Spernerovo lemma) *Každá triangulace očíslovaná výše uvedeným způsobem musí obsahovat trojúhelníček jehož vrcholy mají čísla 1, 2, 3.*

Důkaz.

Ke každé takto očíslované triangulaci můžeme definovat graf G (viz tabule), přičemž:

Věta

(Spernerovo lemma) *Každá triangulace očíslovaná výše uvedeným způsobem musí obsahovat trojúhelníček jehož vrcholy mají čísla 1, 2, 3.*

Důkaz.

Ke každé takto očíslované triangulaci můžeme definovat graf G (viz tabule), přičemž:

- jeho vrcholy jsou oblasti triangulace, včetně vnější (tento vrchol označíme v)

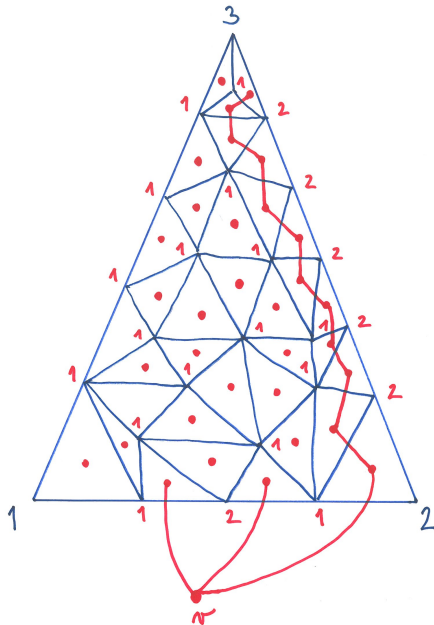
Věta

(Spernerovo lemma) *Každá triangulace očíslovaná výše uvedeným způsobem musí obsahovat trojúhelníček jehož vrcholy mají čísla 1, 2, 3.*

Důkaz.

Ke každé takto očíslované triangulaci můžeme definovat graf G (viz tabule), přičemž:

- jeho vrcholy jsou oblasti triangulace, včetně vnější (tento vrchol označíme v)
- vrcholy jsou spojeny hranou právě tehdy, když jim odpovídající oblasti mají na hranici stranu 12 (viz obrázek).



Důkaz.

Z výše uvedeného plyne:

Důkaz.

Z výše uvedeného plyne:

- Ke každé triangulaci existuje graf G .

Důkaz.

Z výše uvedeného plyne:

- Ke každé triangulaci existuje graf G .
- vrcholy odpovídající trojúhelníkům, kterým chybí 1 nebo 2, mají stupeň nula.

Důkaz.

Z výše uvedeného plyne:

- Ke každé triangulaci existuje graf G .
- vrcholy odpovídající trojúhelníkům, kterým chybí 1 nebo 2, mají stupeň nula.
- trojúhelníčky, které obsahují 1 i 2 jsou 112, 122 a 123.

Důkaz.

Z výše uvedeného plyne:

- Ke každé triangulaci existuje graf G .
- vrcholy odpovídající trojúhelníkům, kterým chybí 1 nebo 2, mají stupeň nula.
- trojúhelníčky, které obsahují 1 i 2 jsou 112, 122 a 123.
- Vrcholy odpovídající prvním dvěma typům mají stupeň 2 a vrchol odpovídající třetímu typu má stupeň 1 (viz obrázek).

Důkaz.

Z výše uvedeného plyne:

- Ke každé triangulaci existuje graf G .
- vrcholy odpovídající trojúhelníkům, kterým chybí 1 nebo 2, mají stupeň nula.
- trojúhelníčky, které obsahují 1 i 2 jsou 112, 122 a 123.
- Vrcholy odpovídající prvním dvěma typům mají stupeň 2 a vrchol odpovídající třetímu typu má stupeň 1 (viz obrázek).
- vrchol v má lichý stupeň (viz obrázek).

Důkaz.

Z výše uvedeného plyne:

- Ke každé triangulaci existuje graf G .
- vrcholy odpovídající trojúhelníkům, kterým chybí 1 nebo 2, mají stupeň nula.
- trojúhelníčky, které obsahují 1 i 2 jsou 112, 122 a 123.
- Vrcholy odpovídající prvním dvěma typům mají stupeň 2 a vrchol odpovídající třetímu typu má stupeň 1 (viz obrázek).
- vrchol v má lichý stupeň (viz obrázek).

Představme si nyní, že máme správně očíslovanou triangulaci a neobsahuje trojúhelníček 123.

Důkaz.

Z výše uvedeného plyne:

- Ke každé triangulaci existuje graf G .
- vrcholy odpovídající trojúhelníčkům, kterým chybí 1 nebo 2, mají stupeň nula.
- trojúhelníčky, které obsahují 1 i 2 jsou 112, 122 a 123.
- Vrcholy odpovídající prvním dvěma typům mají stupeň 2 a vrchol odpovídající třetímu typu má stupeň 1 (viz obrázek).
- vrchol v má lichý stupeň (viz obrázek).

Představme si nyní, že máme správně očíslovanou triangulaci a neobsahuje trojúhelníček 123.

Potom má ovšem odpovídající graf G vrchol v lichého stupně a ostatní vrcholy jsou stupně nula nebo dva.

Důkaz.

Tedy součet všech stupňů vrcholů v takovém grafu je **liché číslo!**

Důkaz.

Tedy součet všech stupňů vrcholů v takovém grafu je **liché číslo!**

Což ovšem není možné, neboť v každém grafu je součet všech stupňů vrcholů roven dvojnásobku počtu hran (každá hrana grafu přináší do součtu všech stupňů dvojku).

Důkaz.

Tedy součet všech stupňů vrcholů v takovém grafu je **liché číslo!**

Což ovšem není možné, neboť v každém grafu je součet všech stupňů vrcholů roven dvojnásobku počtu hran (každá hrana grafu přináší do součtu všech stupňů dvojku).

Zjistili jsem tedy, že k triangulaci, která nemá trojúhelníček 123, neexistuje graf G , z čehož plyne, že neexistuje žádná taková triangulace.

Důkaz.

Tedy součet všech stupňů vrcholů v takovém grafu je **liché číslo!**

Což ovšem není možné, neboť v každém grafu je součet všech stupňů vrcholů roven dvojnásobku počtu hran (každá hrana grafu přináší do součtu všech stupňů dvojku).

Zjistili jsem tedy, že k triangulaci, která nemá trojúhelníček 123, neexistuje graf G , z čehož plyne, že neexistuje žádná taková triangulace.

(existuje triangulace $\Rightarrow$ existuje graf) **je to samé, jako** (neexistuje graf $\Rightarrow$ neexistuje triangulace).

Důkaz.

Tedy součet všech stupňů vrcholů v takovém grafu je **liché číslo!**

Což ovšem není možné, neboť v každém grafu je součet všech stupňů vrcholů roven dvojnásobku počtu hran (každá hrana grafu přináší do součtu všech stupňů dvojku).

Zjistili jsem tedy, že k triangulaci, která nemá trojúhelníček 123, neexistuje graf G , z čehož plyne, že neexistuje žádná taková triangulace.

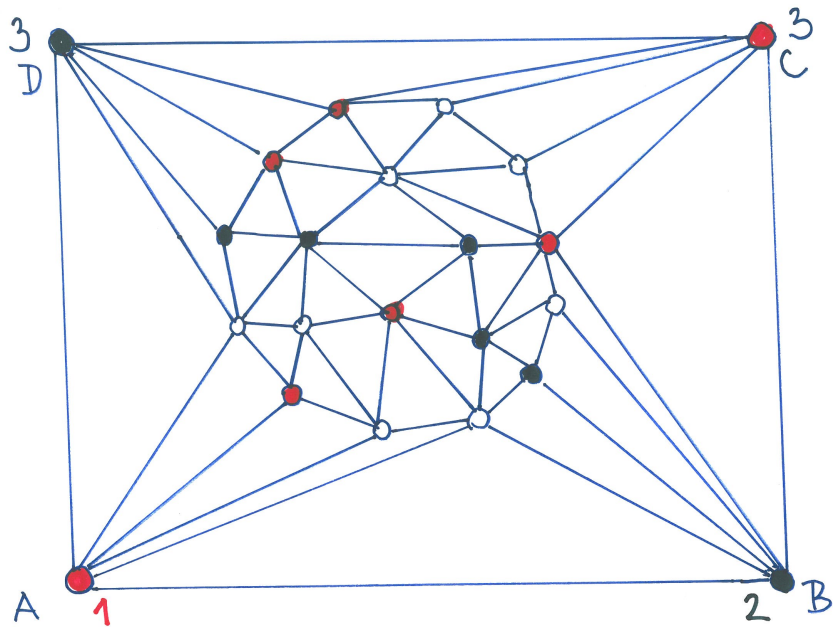
(existuje triangulace $\Rightarrow$ existuje graf) **je to samé, jako** (neexistuje graf $\Rightarrow$ neexistuje triangulace).

Proto **každá triangulace musí obsahovat trojúhelníček 123.**



1 Spernerovo lemma a princip sudosti

2 HRA



Věta

HRA nemůže skončit remízou.

Věta

HRA nemůže skončit remízou.

Důkaz.

Hrací pole v HŘE je vlastně triangulace obdélníku. Představme si, že hra skončila remízou. Potom jsou všechna pole obsazena buď prvním či druhým hráčem, ovšem nikdo nevytvořil cestu mezi protilehlými rohy.

Věta

HRA nemůže skončit remízou.

Důkaz.

Hrací pole v HŘE je vlastně triangulace obdélníku. Představme si, že hra skončila remízou. Potom jsou všechna pole obsazena buď prvním či druhým hráčem, ovšem nikdo nevytvořil cestu mezi protilehlými rohy.

Označme:

- P -množinu všech polí (vrcholů), které získal 1. hráč.

Věta

HRA nemůže skončit remízou.

Důkaz.

Hrací pole v HŘE je vlastně triangulace obdélníku. Představme si, že hra skončila remízou. Potom jsou všechna pole obsazena buď prvním či druhým hráčem, ovšem nikdo nevytvořil cestu mezi protilehlými rohy.

Označme:

- P -množinu všech polí (vrcholů), které získal 1. hráč.
- D -množinu všech polí (vrcholů), které získal 2. hráč.

Věta

HRA nemůže skončit remízou.

Důkaz.

Hrací pole v HŘE je vlastně triangulace obdélníku. Představme si, že hra skončila remízou. Potom jsou všechna pole obsazena buď prvním či druhým hráčem, ovšem nikdo nevytvořil cestu mezi protilehlými rohy.

Označme:

- P -množinu všech polí (vrcholů), které získal 1. hráč.
- D -množinu všech polí (vrcholů), které získal 2. hráč.

Očíslujme nyní vrcholy hracího pole čísly 1, 2, 3 takto:

Věta

HRA nemůže skončit remízou.

Důkaz.

Hrací pole v HŘE je vlastně triangulace obdélníku. Představme si, že hra skončila remízou. Potom jsou všechna pole obsazena buď prvním či druhým hráčem, ovšem nikdo nevytvořil cestu mezi protilehlými rohy.

Označme:

- P -množinu všech polí (vrcholů), které získal 1. hráč.
- D -množinu všech polí (vrcholů), které získal 2. hráč.

Očíslujme nyní vrcholy hracího pole čísly 1, 2, 3 takto:

- Vrchol $A \in P$ je označen 1 a vrchol $B \in D$ je označen 2.

Věta

HRA nemůže skončit remízou.

Důkaz.

Hrací pole v HŘE je vlastně triangulace obdélníku. Představme si, že hra skončila remízou. Potom jsou všechna pole obsazena buď prvním či druhým hráčem, ovšem nikdo nevytvořil cestu mezi protilehlými rohy.

Označme:

- P -množinu všech polí (vrcholů), které získal 1. hráč.
- D -množinu všech polí (vrcholů), které získal 2. hráč.

Očíslujme nyní vrcholy hracího pole čísly 1, 2, 3 takto:

- Vrchol $A \in P$ je označen 1 a vrchol $B \in D$ je označen 2.
- Každý vrchol, do nějž vede cesta z vrcholu A a všechny vrcholy cesty jsou z P , označíme 1.

Věta

HRA nemůže skončit remízou.

Důkaz.

Hrací pole v HŘE je vlastně triangulace obdélníku. Představme si, že hra skončila remízou. Potom jsou všechna pole obsazena buď prvním či druhým hráčem, ovšem nikdo nevytvořil cestu mezi protilehlými rohy.

Označme:

- P -množinu všech polí (vrcholů), které získal 1. hráč.
- D -množinu všech polí (vrcholů), které získal 2. hráč.

Očíslujme nyní vrcholy hracího pole čísly 1, 2, 3 takto:

- Vrchol $A \in P$ je označen 1 a vrchol $B \in D$ je označen 2.
- Každý vrchol, do nějž vede cesta z vrcholu A a všechny vrcholy cesty jsou z P , označíme 1.
- Každý vrchol, do nějž vede cesta z vrcholu B a všechny vrcholy cesty jsou z D , označíme 2.

Důkaz.

- Ostatní vrcholy jsou označeny 3.

Důkaz.

- Ostatní vrcholy jsou označeny 3.

Je zřejmé, že:

- vrcholy C a D musí být označeny 3.

Důkaz.

- Ostatní vrcholy jsou označeny 3.

Je zřejmé, že:

- vrcholy C a D musí být označeny 3.
- hrací pole lze "deformovat" na trojúhelník, který má očíslovány vrcholy dle předpisu ze Spernerova lemmatu (viz tabule).

Důkaz.

- Ostatní vrcholy jsou označeny 3.

Je zřejmé, že:

- vrcholy C a D musí být označeny 3.
- hrací pole lze "deformovat" na trojúhelník, který má očíslovány vrcholy dle předpisu ze Spernerova lemmatu (viz tabule).

Triangulace tedy **MUSÍ OBSAHOVAT $\triangle 123$!**

Důkaz.

- Ostatní vrcholy jsou označeny 3.

Je zřejmé, že:

- vrcholy C a D musí být označeny 3.
- hrací pole lze "deformovat" na trojúhelník, který má očíslovány vrcholy dle předpisu ze Spernerova lemmatu (viz tabule).

Triangulace tedy **MUSÍ OBSAHOVAT $\triangle 123$!**

To však není možné, neboť... (viz tabule)

Remíza ve HŘE tudíž není možná, neboť vede ke SPORU!



Děkuji za pozornost!

Děkuji za pozornost!

Nezapomeň na otázku troubo!!! Míněn Kubesa.

Děkuji za pozornost!

Nezapomeň na otázku troubo!!! Míněn Kubesa.

Otázka: V rovině je 7 bodů, žádné 3 neleží v přímce. Tvoříte trojúhelníky, které mají vrcholy v zadaných bodech.

Děkuji za pozornost!

Nezapomeň na otázku troubo!!! Míněň Kubesa.

Otázka: V rovině je 7 bodů, žádné 3 neleží v přímce. Tvoříte trojúhelníky, které mají vrcholy v zadaných bodech.

Kolik různých trojúhelníků umíte vytvořit? Dva $\triangle$ považujeme za různé, pokud se liší v alespoň jednom vrcholu.