Princip inkluze a exkluze by mohl být prča, ale není.

Michael Kubesa

michael.kubesa@vsb.cz

Katedra aplikované matematiky, Fakulta elektrotechniky a informatiky,
Vysoká škola báňská–Technická univerzita Ostrava

21.1.2014

1. Příklad s Facebookem a opakování kombinatoriky

2. Sedm statečných

- Chceme vědět kolika způsoby můžeme uspořádat prvky množiny M, kde $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

- Chceme vědět kolika způsoby můžeme uspořádat prvky množiny M, kde $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Řešením je **počet permutací** $P(5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$.

- Chceme vědět kolika způsoby můžeme uspořádat prvky množiny M, kde $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Řešením je **počet permutací** $P(5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$.
- Obecně: $P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$, je-li $M = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

- Chceme vědět kolika způsoby můžeme uspořádat prvky množiny M, kde $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Řešením je **počet permutací** $P(5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$.
- Obecně: $P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$, je-li $M = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

- Chceme vědět kolika způsoby můžeme vybrat z množiny M tři prvky bez ohledu na pořadí.

- Chceme vědět kolika způsoby můžeme uspořádat prvky množiny M, kde $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Řešením je **počet permutací** $P(5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$.
- Obecně: $P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$, je-li $M = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

- Chceme vědět kolika způsoby můžeme vybrat z množiny M tři prvky bez ohledu na pořadí.
- Řešením je **počet kombinací** $C(5,3) = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$.

- Chceme vědět kolika způsoby můžeme uspořádat prvky množiny M, kde $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Řešením je **počet permutací** $P(5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$.
- Obecně: $P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$, je-li $M = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

- Chceme vědět kolika způsoby můžeme vybrat z množiny M tři prvky bez ohledu na pořadí.
- Řešením je **počet kombinací** $C(5,3) = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$.
- Obecně: $C(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, je-li $n \geq k$.

Příklad

Sociální síť FACEBOOK; řada obskurních klubů, jako například

Příklad

Sociální síť FACEBOOK; řada obskurních klubů, jako například

- *Klub těch, kteří spí s knoflíčky na peřině u brady. (B)*

Příklad

Sociální síť FACEBOOK; řada obskurních klubů, jako například

- *Klub těch, kteří spí s knoflíčky na peřině u brady. (B)*
- *Klub těch, co drží vidličku v pravé ruce. (V)*

Příklad

Sociální síť FACEBOOK; řada obskurních klubů, jako například

- *Klub těch, kteří spí s knoflíčky na peřině u brady. (B)*
- *Klub těch, co drží vidličku v pravé ruce. (V)*
- *Klub těch, co si češou pěšinku vlevo. (P)*

Příklad

Sociální síť FACEBOOK; řada obskurních klubů, jako například

- *Klub těch, kteří spí s knoflíčky na peřině u brady. (B)*
- *Klub těch, co drží vidličku v pravé ruce. (V)*
- *Klub těch, co si češou pěšinku vlevo. (P)*

Příklad

Sociální síť FACEBOOK; řada obskurních klubů, jako například

- *Klub těch, kteří spí s knoflíčky na peřině u brady. (B)*
- *Klub těch, co drží vidličku v pravé ruce. (V)*
- *Klub těch, co si češou pěšinku vlevo. (P)*

Zjištění:

- *V klubu B je 5 přátel.*
- *V klubu V je 6 přátel.*
- *V klubu P je 8 přátel.*

Příklad

Sociální síť FACEBOOK; řada obskurních klubů, jako například

- *Klub těch, kteří spí s knoflíčky na peřině u brady. (B)*
- *Klub těch, co drží vidličku v pravé ruce. (V)*
- *Klub těch, co si češou pěšinku vlevo. (P)*

Zjištění:

- *V klubu B je 5 přátel.*
- *V klubu V je 6 přátel.*
- *V klubu P je 8 přátel.*
- *V klubech B a V jsou 2 přátelé.*
- *V klubech B a P jsou 3 přátelé.*
- *V klubech V a P jsou 4 přátelé.*

Příklad

Sociální síť FACEBOOK; řada obskurních klubů, jako například

- *Klub těch, kteří spí s knoflíčky na peřině u brady. (B)*
- *Klub těch, co drží vidličku v pravé ruce. (V)*
- *Klub těch, co si češou pěšinku vlevo. (P)*

Zjištění:

- *V klubu B je 5 přátel.*
- *V klubu V je 6 přátel.*
- *V klubu P je 8 přátel.*
- *V klubech B a V jsou 2 přátelé.*
- *V klubech B a P jsou 3 přátelé.*
- *V klubech V a P jsou 4 přátelé.*
- *Ve všech třech klubech je jeden přítel.*

Příklad

Sociální síť FACEBOOK; řada obskurních klubů, jako například

- *Klub těch, kteří spí s knoflíčky na peřině u brady. (B)*
- *Klub těch, co drží vidličku v pravé ruce. (V)*
- *Klub těch, co si češou pěšinku vlevo. (P)*

Zjištění:

- *V klubu B je 5 přátel.*
- *V klubu V je 6 přátel.*
- *V klubu P je 8 přátel.*
- *V klubech B a V jsou 2 přátelé.*
- *V klubech B a P jsou 3 přátelé.*
- *V klubech V a P jsou 4 přátelé.*
- *Ve všech třech klubech je jeden přítel.*

Kolik přátel je v alespoň jednom klubu? (viz tabule [11])

Příklad lze spočítat i jinak. Všimněme si, že v následujícím vzorci je každý prvek ze sjednocení $B \cup V \cup P$ započítán právě jednou.

$$|B \cup V \cup P| = |B| + |V| + |P| - |B \cap V| - |B \cap P| - |V \cap P| + |B \cap V \cap P|.$$

Příklad lze spočítat i jinak. Všimněme si, že v následujícím vzorci je každý prvek ze sjednocení $B \cup V \cup P$ započítán právě jednou.

$$|B \cup V \cup P| = |B| + |V| + |P| - |B \cap V| - |B \cap P| - |V \cap P| + |B \cap V \cap P|.$$

Ze zadání víme, že

$$|B| = 5, |V| = 6, |P| = 8, |B \cap V| = 2, |B \cap P| = 3, |V \cap P| = 4, |B \cap V \cap P| = 1,$$

Příklad lze spočítat i jinak. Všimněme si, že v následujícím vzorci je každý prvek ze sjednocení $B \cup V \cup P$ započítán právě jednou.

$$|B \cup V \cup P| = |B| + |V| + |P| - |B \cap V| - |B \cap P| - |V \cap P| + |B \cap V \cap P|.$$

Ze zadání víme, že

$$|B| = 5, |V| = 6, |P| = 8, |B \cap V| = 2, |B \cap P| = 3, |V \cap P| = 4, |B \cap V \cap P| = 1,$$

proto

$$|B \cup V \cup P| = |B| + |V| + |P| - |B \cap V| - |B \cap P| - |V \cap P| + |B \cap V \cap P| =$$

$$= 5 + 6 + 8 - 2 - 3 - 4 + 1 = 11.$$

Tento postup se dá zobecnit:

Věta

Princip inkluze a exkluze *říká, že* **počet prvků ve sjednocení** n **množin** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *(A_i jsou množiny konečné), spočítáme tak, že určíme mohutnosti veškerých průniku množin (včetně mohutností jednotlivých množin) a sečteme je s tím, že před mohutností, kde je v průniku* **lichý počet** *množin bude* **plus** *a před mohutností, kde je v průniku* **sudý počet** *množin bude* **minus***. Což se dá symbolicky zapsat takto:*

Věta

Princip inkluze a exkluze *říká, že* **počet prvků ve sjednocení** n **množin** $A_1, A_2, \dots, A_n$ *(A_i jsou množiny konečné), spočítáme tak, že určíme mohutnosti veškerých průniku množin (včetně mohutností jednotlivých množin) a sečteme je s tím, že před mohutností, kde je v průniku* **lichý počet** *množin bude* **plus** *a před mohutností, kde je v průniku* **sudý počet** *množin bude* **minus***. Což se dá symbolicky zapsat takto:*

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1,2,\dots,n\}} (-1)^{|J|+1} |\bigcap_{j \in J} A_j|.$$

Věta

Princip inkluze a exkluze *říká, že* **počet prvků ve sjednocení** n **množin** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *(A_i jsou množiny konečné), spočítáme tak, že určíme mohutnosti veškerých průniku množin (včetně mohutností jednotlivých množin) a sečteme je s tím, že před mohutností, kde je v průniku* **lichý počet** *množin bude* **plus** *a před mohutností, kde je v průniku* **sudý počet** *množin bude* **minus***. Což se dá symbolicky zapsat takto:*

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} (-1)^{|J|+1} |\bigcap_{j \in J} A_j|.$$

Z toho plyne například, že
$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + {}$
$+ |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|.$

Poznámka

Mějme pět množin A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, potom samozřejmě existuje $\binom{5}{1}$ jednotlivých množin, $\binom{5}{2}$ průniků dvou množin, $\binom{5}{3}$ průniků tří množin, $\binom{5}{4}$ průniků čtyř množin atd.

Poznámka

Mějme pět množin A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, potom samozřejmě existuje $\binom{5}{1}$ jednotlivých množin, $\binom{5}{2}$ průniků dvou množin, $\binom{5}{3}$ průniků tří množin, $\binom{5}{4}$ průniků čtyř množin atd.

Obecně: Máme-li množiny $A_1, A_2, \ldots, A_n$, potom existuje $\binom{n}{1}$ jednotlivých množin, $\binom{n}{2}$ průniků dvou množin, $\binom{n}{3}$ průniků tří množin, $\ldots$ $\binom{n}{n-1}$ průniků s $(n-1)$ množinami, $\binom{n}{n}$ průniků s n množinami.

Poznámka

Mějme pět množin A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, potom samozřejmě existuje $\binom{5}{1}$ jednotlivých množin, $\binom{5}{2}$ průniků dvou množin, $\binom{5}{3}$ průniků tří množin, $\binom{5}{4}$ průniků čtyř množin atd.

Obecně: Máme-li množiny $A_1, A_2, \ldots, A_n$, potom existuje $\binom{n}{1}$ jednotlivých množin, $\binom{n}{2}$ průniků dvou množin, $\binom{n}{3}$ průniků tří množin, ... $\binom{n}{n-1}$ průniků s $(n-1)$ množinami, $\binom{n}{n}$ průniků s n množinami.

Čili na pravé straně principu inkluze a exkluze bude vždy $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$ sčítanců. Dá se dokázat, že

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n - 1.$$

Příklad

Příběh o sedmi statečných. *Nejdříve krátký úvod. Sedm statečných, je sedm rázovitých kovbojů z USA, kteří se rozhodli šířit dobro i za hranice svého státu. Na mexickém území je již dlouhodobě sužována malá vesnice nájezdy místních gangsterů, přijedou, vyplení vše, co obyvatelé nashromáždí za celý rok, znásilní ženy a odjedou. Toto se periodicky opakuje. Sedm statečných se odhodlalo vesnici chránit. Po odražení zvláště prudkého útoku gangsterů se oněch sedm kovbojů rozhodlo navštívit místní hostinec. Při příchodu odevzdali obsluhující Juanitě své klobouky. Výborně se bavili, Juanita jen zářila, Tequilla tekla proudem a nejednu skleničku s nimi urazila i ona. Při odchodu šťastná a poněkud zasněná Juanita rozdala klobouky všem kovbojům zcela náhodně. Kolika způsoby to mohla provést, aby:*

Příklad

Příběh o sedmi statečných. *Nejdříve krátký úvod. Sedm statečných, je sedm rázovitých kovbojů z USA, kteří se rozhodli šířit dobro i za hranice svého státu. Na mexickém území je již dlouhodobě sužována malá vesnice nájezdy místních gangsterů, přijedou, vyplení vše, co obyvatelé nashromáždí za celý rok, znásilní ženy a odjedou. Toto se periodicky opakuje. Sedm statečných se odhodlalo vesnici chránit. Po odražení zvláště prudkého útoku gangsterů se oněch sedm kovbojů rozhodlo navštívit místní hostinec. Při příchodu odevzdali obsluhující Juanitě své klobouky. Výborně se bavili, Juanita jen zářila, Tequilla tekla proudem a nejednu skleničku s nimi urazila i ona. Při odchodu šťastná a poněkud zasněná Juanita rozdala klobouky všem kovbojům zcela náhodně. Kolika způsoby to mohla provést, aby:*

- *alespoň jeden kovboj dostal svůj klobouk?*

Příklad

Příběh o sedmi statečných. *Nejdříve krátký úvod. Sedm statečných, je sedm rázovitých kovbojů z USA, kteří se rozhodli šířit dobro i za hranice svého státu. Na mexickém území je již dlouhodobě sužována malá vesnice nájezdy místních gangsterů, přijedou, vyplení vše, co obyvatelé nashromáždí za celý rok, znásilní ženy a odjedou. Toto se periodicky opakuje. Sedm statečných se odhodlalo vesnici chránit. Po odražení zvláště prudkého útoku gangsterů se oněch sedm kovbojů rozhodlo navštívit místní hostinec. Při příchodu odevzdali obsluhující Juanitě své klobouky. Výborně se bavili, Juanita jen zářila, Tequilla tekla proudem a nejednu skleničku s nimi urazila i ona. Při odchodu šťastná a poněkud zasněná Juanita rozdala klobouky všem kovbojům zcela náhodně. Kolika způsoby to mohla provést, aby:*

- *alespoň jeden kovboj dostal svůj klobouk?*
- *alespoň tři kovbojové dostali svůj klobouk?*

Každé rozdání klobouků lze znázornit jako nějakou permutaci na množině $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (viz tabule). Například permutace $(3, 2, 1, 4, 6, 7, 5)$ popisuje situaci, kdy jen kovbojové 2 a 4 dostali svůj klobouk, zatímco permutace $(2, 3, 4, 5, 6, 7, 1)$ popisuje situaci, kdy nikdo nedostal svůj klobouk.

Každé rozdání klobouků lze znázornit jako nějakou permutaci na množině $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (viz tabule). Například permutace $(3, 2, 1, 4, 6, 7, 5)$ popisuje situaci, kdy jen kovbojové 2 a 4 dostali svůj klobouk, zatímco permutace $(2, 3, 4, 5, 6, 7, 1)$ popisuje situaci, kdy nikdo nedostal svůj klobouk.

Definice

Je-li v permutaci číslo $i \in M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ na i-té pozici, pak číslu i říkáme **pevný bod** *permutace.*

Každé rozdání klobouků lze znázornit jako nějakou permutaci na množině $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (viz tabule). Například permutace $(3, 2, 1, 4, 6, 7, 5)$ popisuje situaci, kdy jen kovbojové 2 a 4 dostali svůj klobouk, zatímco permutace $(2, 3, 4, 5, 6, 7, 1)$ popisuje situaci, kdy nikdo nedostal svůj klobouk.

Definice

Je-li v permutaci číslo $i \in M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ na i-té pozici, pak číslu i říkáme **pevný bod** *permutace.*

Poznámka

Chceme tedy zjistit, kolik je permutací **s alespoň jedním pevným bodem** a kolik je permutací **s alespoň třemi pevnými body**.

Každé rozdání klobouků lze znázornit jako nějakou permutaci na množině $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (viz tabule). Například permutace $(3, 2, 1, 4, 6, 7, 5)$ popisuje situaci, kdy jen kovbojové 2 a 4 dostali svůj klobouk, zatímco permutace $(2, 3, 4, 5, 6, 7, 1)$ popisuje situaci, kdy nikdo nedostal svůj klobouk.

Definice

Je-li v permutaci číslo $i \in M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ na i-té pozici, pak číslu i říkáme **pevný bod** *permutace.*

Poznámka

Chceme tedy zjistit, kolik je permutací **s alespoň jedním pevným bodem** a kolik je permutací **s alespoň třemi pevnými body**.

Definice

Nazvěme A_i pro $i = 1, 2, \ldots, 7$ množinu všech permutací na množině M, které mají pevný bod $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

To znamená, že například v A_3 jsou všechny permutace, které mají pevný bod 3, v $A_2 \cup A_5 \cup A_6$ jsou všechny permutace, kde je alespoň jedno s čísel $2, 5, 6$ pevným bodem permutace a $A_1 \cap A_2 \cap A_5 \cap A_7$ jsou všechny permutace, které mají pevné body $1, 2, 5, 7$ atd.

To znamená, že například v A_3 jsou všechny permutace, které mají pevný bod 3, v $A_2 \cup A_5 \cup A_6$ jsou všechny permutace, kde je alespoň jedno s čísel $2, 5, 6$ pevným bodem permutace a $A_1 \cap A_2 \cap A_5 \cap A_7$ jsou všechny permutace, které mají pevné body $1, 2, 5, 7$ atd.

Poznámka

Chceme-li zjistit, kolik je permutací **s alespoň jedním pevným bodem**, pak chceme zjistit mohutnost sjednocení $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_7 = \bigcup_{i=1}^{7} A_i$.

To znamená, že například v A_3 jsou všechny permutace, které mají pevný bod 3, v $A_2 \cup A_5 \cup A_6$ jsou všechny permutace, kde je alespoň jedno s čísel $2, 5, 6$ pevným bodem permutace a $A_1 \cap A_2 \cap A_5 \cap A_7$ jsou všechny permutace, které mají pevné body $1, 2, 5, 7$ atd.

Poznámka

Chceme-li zjistit, kolik je permutací **s alespoň jedním pevným bodem**, pak chceme zjistit mohutnost sjednocení $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_7 = \bigcup_{i=1}^{7} A_i$.

Kdybychom chtěli princip inkluze a exkluze rozepsat pro sedm množin, pak by takový součet měl

To znamená, že například v A_3 jsou všechny permutace, které mají pevný bod 3, v $A_2 \cup A_5 \cup A_6$ jsou všechny permutace, kde je alespoň jedno s čísel $2, 5, 6$ pevným bodem permutace a $A_1 \cap A_2 \cap A_5 \cap A_7$ jsou všechny permutace, které mají pevné body $1, 2, 5, 7$ atd.

Poznámka

Chceme-li zjistit, kolik je permutací **s alespoň jedním pevným bodem**, pak chceme zjistit mohutnost sjednocení $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_7 = \bigcup_{i=1}^{7} A_i$.

Kdybychom chtěli princip inkluze a exkluze rozepsat pro sedm množin, pak by takový součet měl

$$\binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 2^7 - 1 = 127$$

sčítanců a všechny bychom museli určit!

To znamená, že například v A_3 jsou všechny permutace, které mají pevný bod 3, v $A_2 \cup A_5 \cup A_6$ jsou všechny permutace, kde je alespoň jedno s čísel $2, 5, 6$ pevným bodem permutace a $A_1 \cap A_2 \cap A_5 \cap A_7$ jsou všechny permutace, které mají pevné body $1, 2, 5, 7$ atd.

Poznámka

Chceme-li zjistit, kolik je permutací **s alespoň jedním pevným bodem**, pak chceme zjistit mohutnost sjednocení $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_7 = \bigcup_{i=1}^{7} A_i$.

Kdybychom chtěli princip inkluze a exkluze rozepsat pro sedm množin, pak by takový součet měl

$$\binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 2^7 - 1 = 127$$

sčítanců a všechny bychom museli určit!

To by bylo šíleně pracné! Zkusme postupovat nějak rozumněji!

Spočítejme si například $|A_2 \cap A_5 \cap A_6|$.

Spočítejme si například $|A_2 \cap A_5 \cap A_6|$.

Množina $A_2 \cap A_5 \cap A_6$ obsahuje všechny permutace, které mají pevné body $2, 5, 6$.
Každou permutaci z množiny $A_2 \cap A_5 \cap A_6$ vyjádříme takto:

Spočítejme si například $|A_2 \cap A_5 \cap A_6|$.

Množina $A_2 \cap A_5 \cap A_6$ obsahuje všechny permutace, které mají pevné body $2, 5, 6$.
Každou permutaci z množiny $A_2 \cap A_5 \cap A_6$ vyjádříme takto:

$$(-, 2, -, -, 5, 6, -),$$

přičemž na volných pozicích můžeme čísla $1, 3, 4, 7$ uspořádat libovolně.

Spočítejme si například $|A_2 \cap A_5 \cap A_6|$.

Množina $A_2 \cap A_5 \cap A_6$ obsahuje všechny permutace, které mají pevné body $2, 5, 6$.
Každou permutaci z množiny $A_2 \cap A_5 \cap A_6$ vyjádříme takto:

$$(-, 2, -, -, 5, 6, -),$$

přičemž na volných pozicích můžeme čísla $1, 3, 4, 7$ uspořádat libovolně.

Proto $|A_2 \cap A_5 \cap A_6| = 4! = (7-3)!$.

Spočítejme si například $|A_2 \cap A_5 \cap A_6|$.

Množina $A_2 \cap A_5 \cap A_6$ obsahuje všechny permutace, které mají pevné body $2, 5, 6$.
Každou permutaci z množiny $A_2 \cap A_5 \cap A_6$ vyjádříme takto:

$$(-, 2, -, -, 5, 6, -),$$

přičemž na volných pozicích můžeme čísla $1, 3, 4, 7$ uspořádat libovolně.

Proto $|A_2 \cap A_5 \cap A_6| = 4! = (7-3)!$.

Je jasné, že pokud by v průniku byly jiné tři množiny, tak jeho mohutnost by byla také $(7-3)!$.

Obdobně spočítejme $|A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6 \cap A_7|$.

Obdobně spočítejme $|A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6 \cap A_7|$.

Víme, že každou permutaci z množiny $A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6 \cap A_7$ lze zapsat takto:

$$(1, -, 3, 4, -, 6, 7).$$

Obdobně spočítejme $|A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6 \cap A_7|$.

Víme, že každou permutaci z množiny $A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6 \cap A_7$ lze zapsat takto:

$$(1, -, 3, 4, -, 6, 7).$$

Proto $|A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6 \cap A_7| = 2! = (7-5)!$.

Obdobně spočítejme $|A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6 \cap A_7|$.

Víme, že každou permutaci z množiny $A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6 \cap A_7$ lze zapsat takto:

$$(1, -, 3, 4, -, 6, 7).$$

Proto $|A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6 \cap A_7| = 2! = (7-5)!$.

Opět je jasné, že každý průnik pěti množin bude mít mohutnost stejnou, tj. $(7-5)!$.

Obdobně spočítejme $|A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6 \cap A_7|$.

Víme, že každou permutaci z množiny $A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6 \cap A_7$ lze zapsat takto:

$$(1, -, 3, 4, -, 6, 7).$$

Proto $|A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6 \cap A_7| = 2! = (7 - 5)!$.

Opět je jasné, že každý průnik pěti množin bude mít mohutnost stejnou, tj. $(7 - 5)!$.

Výše uvedené myšlenky zobecníme:

Obdobně spočítejme $|A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6 \cap A_7|$.

Víme, že každou permutaci z množiny $A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6 \cap A_7$ lze zapsat takto:

$$(1, -, 3, 4, -, 6, 7).$$

Proto $|A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_6 \cap A_7| = 2! = (7 - 5)!$.

Opět je jasné, že každý průnik pěti množin bude mít mohutnost stejnou, tj. $(7 - 5)!$.

Výše uvedené myšlenky zobecníme:

Máme-li průnik libovolných $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ množin, pak je jeho mohutnost vždy stejná, a to $(7 - k)!$.

Věta

Pro výpočet tudíž použijeme princip inkluze a exkluze ve speciálním tvaru, a to:

$$|\bigcup_{i=1}^{7} A_i| = \sum_{k=1}^{7} (-1)^{k+1} \binom{7}{k} (7-k)!,$$

kde $(7-k)!$ *je mohutnost každého průniku* k *množin,*
$k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Věta

Pro výpočet tudíž použijeme princip inkluze a exkluze ve speciálním tvaru, a to:

$$|\bigcup_{i=1}^{7} A_i| = \sum_{k=1}^{7} (-1)^{k+1} \binom{7}{k} (7-k)!,$$

kde $(7-k)!$ *je mohutnost každého průniku* k *množin,* $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Dostáváme

$$|\bigcup_{i=1}^{7} A_i| = \sum_{k=1}^{7} (-1)^{k+1} \binom{7}{k} (7-k)! = \sum_{k=1}^{7} (-1)^{k+1} \frac{7!}{k!(7-k)!} (7-k)! =$$

$$\sum_{k=1}^{7} (-1)^{k+1} \frac{7!}{k!} = 7! \sum_{k=1}^{7} (-1)^{k+1} \frac{1}{k!} = 7!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!}\right).$$

Věta

Pro výpočet tudíž použijeme princip inkluze a exkluze ve speciálním tvaru, a to:

$$|\bigcup_{i=1}^{7} A_i| = \sum_{k=1}^{7} (-1)^{k+1} \binom{7}{k} (7-k)!,$$

kde $(7-k)!$ *je mohutnost každého průniku* k *množin,* $k \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$.

Dostáváme

$$|\bigcup_{i=1}^{7} A_i| = \sum_{k=1}^{7} (-1)^{k+1} \binom{7}{k} (7-k)! = \sum_{k=1}^{7} (-1)^{k+1} \frac{7!}{k!(7-k)!} (7-k)! =$$

$$\sum_{k=1}^{7} (-1)^{k+1} \frac{7!}{k!} = 7! \sum_{k=1}^{7} (-1)^{k+1} \frac{1}{k!} = 7!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!}\right).$$

Existuje tudíž přesně $7!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!}\right)$ permutací na množině M, které **mají alespoň jeden pevný bod!**. Čili Juanita má právě tolik možností, jak rozdat klobouky, aby alespoň jeden kovboj dostal svůj.

Máme zde ještě otázku, kolik existuje permutací na množině M, které **mají alespoň tři pevné body**.

Máme zde ještě otázku, kolik existuje permutací na množině M, které **mají alespoň tři pevné body**.

Pokud jsme k zjištění počtu permutací na množině M, které mají alespoň jeden pevný bod použili vzorec:

Máme zde ještě otázku, kolik existuje permutací na množině M, které **mají alespoň tři pevné body**.

Pokud jsme k zjištění počtu permutací na množině M, které mají alespoň jeden pevný bod použili vzorec:

$$\sum_{k=1}^{7}(-1)^{k+1}\binom{7}{k}(7-k)! = 7!(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}),$$

Máme zde ještě otázku, kolik existuje permutací na množině M, které **mají alespoň tři pevné body**.

Pokud jsme k zjištění počtu permutací na množině M, které mají alespoň jeden pevný bod použili vzorec:

$$\sum_{k=1}^{7}(-1)^{k+1}\binom{7}{k}(7-k)! = 7!(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}),$$

tak ke zjištění počtu permutací na množině M, které mají alespoň tři pevné body, by bylo přece možno použít obdobný vzorec:

Máme zde ještě otázku, kolik existuje permutací na množině M, které **mají alespoň tři pevné body**.

Pokud jsme k zjištění počtu permutací na množině M, které mají alespoň jeden pevný bod použili vzorec:

$$\sum_{k=1}^{7}(-1)^{k+1}\binom{7}{k}(7-k)! = 7!(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}),$$

tak ke zjištění počtu permutací na množině M, které mají alespoň tři pevné body, by bylo přece možno použít obdobný vzorec:

$$\sum_{k=3}^{7}(-1)^{k+1}\binom{7}{k}(7-k)!,$$

Máme zde ještě otázku, kolik existuje permutací na množině M, které **mají alespoň tři pevné body**.

Pokud jsme k zjištění počtu permutací na množině M, které mají alespoň jeden pevný bod použili vzorec:

$$\sum_{k=1}^{7}(-1)^{k+1}\binom{7}{k}(7-k)! = 7!(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}),$$

tak ke zjištění počtu permutací na množině M, které mají alespoň tři pevné body, by bylo přece možno použít obdobný vzorec:

$$\sum_{k=3}^{7}(-1)^{k+1}\binom{7}{k}(7-k)!,$$

neboť takový vzorec uvažuje všechny průniky alespoň tří množin z množin $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$.

Výsledek by byl:

$$\sum_{k=3}^{7}(-1)^{k+1}\binom{7}{k}(7-k)! = \binom{7}{3}(7-3)! - \binom{7}{4}(7-4)! + \binom{7}{5}(7-5)! -$$

Výsledek by byl:

$$\sum_{k=3}^{7}(-1)^{k+1}\binom{7}{k}(7-k)! = \binom{7}{3}(7-3)! - \binom{7}{4}(7-4)! + \binom{7}{5}(7-5)! -$$

$$-\binom{7}{6}(7-6)! + \binom{7}{7}(7-7)! = 35 \cdot 4! - 35 \cdot 3! + 21 \cdot 2 - 7 \cdot 1 =$$

Výsledek by byl:

$$\sum_{k=3}^{7}(-1)^{k+1}\binom{7}{k}(7-k)! = \binom{7}{3}(7-3)! - \binom{7}{4}(7-4)! + \binom{7}{5}(7-5)! -$$

$$-\binom{7}{6}(7-6)! + \binom{7}{7}(7-7)! = 35\cdot 4! - 35\cdot 3! + 21\cdot 2 - 7\cdot 1 =$$

$$840 - 210 + 42 - 7 = 665.$$

Výsledek by byl:

$$\sum_{k=3}^{7}(-1)^{k+1}\binom{7}{k}(7-k)! = \binom{7}{3}(7-3)! - \binom{7}{4}(7-4)! + \binom{7}{5}(7-5)! -$$

$$-\binom{7}{6}(7-6)! + \binom{7}{7}(7-7)! = 35\cdot 4! - 35\cdot 3! + 21\cdot 2 - 7\cdot 1 =$$

$$840 - 210 + 42 - 7 = 665.$$

Bohužel tento postup je chybný!!! Podívejme se proč.

Výsledek by byl:

$$\sum_{k=3}^{7}(-1)^{k+1}\binom{7}{k}(7-k)! = \binom{7}{3}(7-3)! - \binom{7}{4}(7-4)! + \binom{7}{5}(7-5)! -$$

$$-\binom{7}{6}(7-6)! + \binom{7}{7}(7-7)! = 35\cdot 4! - 35\cdot 3! + 21\cdot 2 - 7\cdot 1 =$$

$$840 - 210 + 42 - 7 = 665.$$

Bohužel tento postup je chybný!!! Podívejme se proč.

Uvažujme permutaci $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$, ta má všechny body pevné, proto náleží do průniku všech sedmi množin $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$.

Výsledek by byl:

$$\sum_{k=3}^{7}(-1)^{k+1}\binom{7}{k}(7-k)! = \binom{7}{3}(7-3)! - \binom{7}{4}(7-4)! + \binom{7}{5}(7-5)! -$$

$$-\binom{7}{6}(7-6)! + \binom{7}{7}(7-7)! = 35 \cdot 4! - 35 \cdot 3! + 21 \cdot 2 - 7 \cdot 1 =$$

$$840 - 210 + 42 - 7 = 665.$$

Bohužel tento postup je chybný!!! Podívejme se proč.

Uvažujme permutaci $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$, ta má všechny body pevné, proto náleží do průniku všech sedmi množin $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$.

Je tedy v každém průniku nějakých k množin, $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Protože číslo $(7-k)!$ v principu inkluze a exkluze vyjadřuje počet prvků každého k množinového průniku, tak permutace $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ přispívá do každého takového čísla jedničkou.

Proto je permutace $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ započítaná ve vzorci
$\sum_{k=3}^{7} (-1)^{k+1} \binom{7}{k} (7-k)!$ přesně
$\binom{7}{3} - \binom{7}{4} + \binom{7}{5} - \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = 35 - 35 + 21 - 7 + 1 = 15$ krát.

Proto je permutace $(1,2,3,4,5,6,7)$ započítaná ve vzorci $\sum_{k=3}^{7}(-1)^{k+1}\binom{7}{k}(7-k)!$ přesně $\binom{7}{3}-\binom{7}{4}+\binom{7}{5}-\binom{7}{6}+\binom{7}{7}=35-35+21-7+1=15$ krát.

Ale aby byl výsledek správný, pak by musel být ve vzorci započítán **každý prvek z průniku alespoň tří množin přesně jednou!!!**.

Proto je permutace $(1,2,3,4,5,6,7)$ započítaná ve vzorci $\sum_{k=3}^{7}(-1)^{k+1}\binom{7}{k}(7-k)!$ přesně $\binom{7}{3}-\binom{7}{4}+\binom{7}{5}-\binom{7}{6}+\binom{7}{7}=35-35+21-7+1=15$ krát.

Ale aby byl výsledek správný, pak by musel být ve vzorci započítán **každý prvek z průniku alespoň tří množin přesně jednou!!!**.

Čili takové "částečné" použití principu inkluze a exkluze, tzn. že nezačneme od mohutností jednotlivých množin, pak navážeme mohutnostmi průniků dvou, tří, čtyř atd. množin **je chybné!**

Proto je permutace $(1,2,3,4,5,6,7)$ započítaná ve vzorci
$\sum\limits_{k=3}^{7}(-1)^{k+1}\binom{7}{k}(7-k)!$ přesně
$\binom{7}{3}-\binom{7}{4}+\binom{7}{5}-\binom{7}{6}+\binom{7}{7}=35-35+21-7+1=15$ krát.

Ale aby byl výsledek správný, pak by musel být ve vzorci započítán **každý prvek z průniku alespoň tří množin přesně jednou!!!**.

Čili takové "částečné" použití principu inkluze a exkluze, tzn. že nezačneme od mohutností jednotlivých množin, pak navážeme mohutnostmi průniků dvou, tří, čtyř atd. množin **je chybné!**

Příklad tudíž musíme spočítat jinak.

- Počet permutací s přesně třemi pevnými body: Trojici pevných bodů můžeme vybrat $\binom{7}{3} = 35$ způsoby.

- Počet permutací s přesně třemi pevnými body: Trojici pevných bodů můžeme vybrat $\binom{7}{3} = 35$ způsoby.
- Jedna z možností by byla třeba $(1, -, -, 4, -, 6, -)$. Pro zbývající čtyři pozice musíme spočítat počet permutací bez pevného bodu.

- Počet permutací s přesně třemi pevnými body: Trojici pevných bodů můžeme vybrat $\binom{7}{3} = 35$ způsoby.
- Jedna z možností by byla třeba $(1, -, -, 4, -, 6, -)$. Pro zbývající čtyři pozice musíme spočítat počet permutací bez pevného bodu.
- Víme, že pro sedm prvků je $7!(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!})$ permutací s alespoň jedním pevným bodem, proto je na čtyřech prvcích $4!(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!})$ permutací s alespoň jedním pevným bodem.

- Počet permutací s přesně třemi pevnými body: Trojici pevných bodů můžeme vybrat $\binom{7}{3} = 35$ způsoby.
- Jedna z možností by byla třeba $(1, -, -, 4, -, 6, -)$. Pro zbývající čtyři pozice musíme spočítat počet permutací bez pevného bodu.
- Víme, že pro sedm prvků je $7!(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!})$ permutací s alespoň jedním pevným bodem, proto je na čtyřech prvcích $4!(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!})$ permutací s alespoň jedním pevným bodem.
- Čili na čtyřech prvcích je $4! - 4!(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}) = 4!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}) = 4!(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}) = 24\frac{12-4+1}{24} = 9$ permutací bez pevného bodu.

- Počet permutací s přesně třemi pevnými body: Trojici pevných bodů můžeme vybrat $\binom{7}{3} = 35$ způsoby.
- Jedna z možností by byla třeba $(1, -, -, 4, -, 6, -)$. Pro zbývající čtyři pozice musíme spočítat počet permutací bez pevného bodu.
- Víme, že pro sedm prvků je $7!(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!})$ permutací s alespoň jedním pevným bodem, proto je na čtyřech prvcích $4!(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!})$ permutací s alespoň jedním pevným bodem.
- Čili na čtyřech prvcích je $4! - 4!(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}) = 4!(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}) = 4!(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}) = 24\frac{12-4+1}{24} = 9$ permutací bez pevného bodu.
- Odtud, permutací na sedmi prvcích s přesně třemi pevnými body je $35 \cdot 9 = 315$.

- Obdobně, počet permutací s přesně čtyřmi pevnými body: $\binom{7}{4} = 35$ možností, jak vybrat pevné body. Dále máme $3! - 3!(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}) = 2$ permutace bez pevných bodů na třech prvcích.

- Obdobně, počet permutací s přesně čtyřmi pevnými body: $\binom{7}{4} = 35$ možností, jak vybrat pevné body. Dále máme $3! - 3!(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}) = 2$ permutace bez pevných bodů na třech prvcích.
- Permutací na sedmi prvcích s přesně čtyřmi pevnými body je $35 \cdot 2 = 70$.

- Obdobně, počet permutací s přesně čtyřmi pevnými body: $\binom{7}{4} = 35$ možností, jak vybrat pevné body. Dále máme $3! - 3!(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}) = 2$ permutace bez pevných bodů na třech prvcích.
- Permutací na sedmi prvcích s přesně čtyřmi pevnými body je $35 \cdot 2 = 70$.
- Počet permutací s přesně pěti pevnými body: $\binom{7}{5} = 21$ možností, jak vybrat pevné body. Permutace bez pevných bodů na dvou prvcích je přesně jedna. Permutací na sedmi prvcích s přesně pěti pevnými body je 21.

- Obdobně, počet permutací s přesně čtyřmi pevnými body: $\binom{7}{4} = 35$ možností, jak vybrat pevné body. Dále máme $3! - 3!(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}) = 2$ permutace bez pevných bodů na třech prvcích.
- Permutací na sedmi prvcích s přesně čtyřmi pevnými body je $35 \cdot 2 = 70$.
- Počet permutací s přesně pěti pevnými body: $\binom{7}{5} = 21$ možností, jak vybrat pevné body. Permutace bez pevných bodů na dvou prvcích je přesně jedna. Permutací na sedmi prvcích s přesně pěti pevnými body je 21.
- Permutace na sedmi prvcích, která má přesně 6 pevných bodů neexistuje a permutace s přesně 7 pevnými body je jediná.

- Obdobně, počet permutací s přesně čtyřmi pevnými body: $\binom{7}{4} = 35$ možností, jak vybrat pevné body. Dále máme $3! - 3!(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}) = 2$ permutace bez pevných bodů na třech prvcích.
- Permutací na sedmi prvcích s přesně čtyřmi pevnými body je $35 \cdot 2 = 70$.
- Počet permutací s přesně pěti pevnými body: $\binom{7}{5} = 21$ možností, jak vybrat pevné body. Permutace bez pevných bodů na dvou prvcích je přesně jedna. Permutací na sedmi prvcích s přesně pěti pevnými body je 21.
- Permutace na sedmi prvcích, která má přesně 6 pevných bodů neexistuje a permutace s přesně 7 pevnými body je jediná.
- Celkový výsledek tudíž je $315 + 70 + 21 + 1 = 407$.

Děkuji za pozornost!

Děkuji za pozornost!

Úkol do ŠKOMAM CUPu O kolik se lišil špatný od správného výsledku v předešlém příkladu?