

Souvislost Pythagorovy věty, dívky z Playboye a superpočítání

ŠKOMAM 2014, 22. ledna

Dalibor Lukáš



Katedra aplikované matematiky, FEI
IT4Innovations
VŠB-TU Ostrava

web: lukas.am.vsb.cz
email: dalibor.lukas@vsb.cz

IT4Innovations#
národní@1#S\080
superpočítačové
centrumS000&108

„Neumím-li něco vysvětlit jednoduše, pak tomu dostatečně nerozumím.“

A. Einstein

Pythagorova věta, dívka z Playboye a superpočítání

Osnova

- Geometrie soustav lineárních rovnic
- Souvislost Pythagorovy věty a dívky z Playboye
- Souvislost Pythagorovy věty a superpočítání
- Příklad do ŠKOMAM CUPu

Pythagorova věta, dívka z Playboye a superpočítání

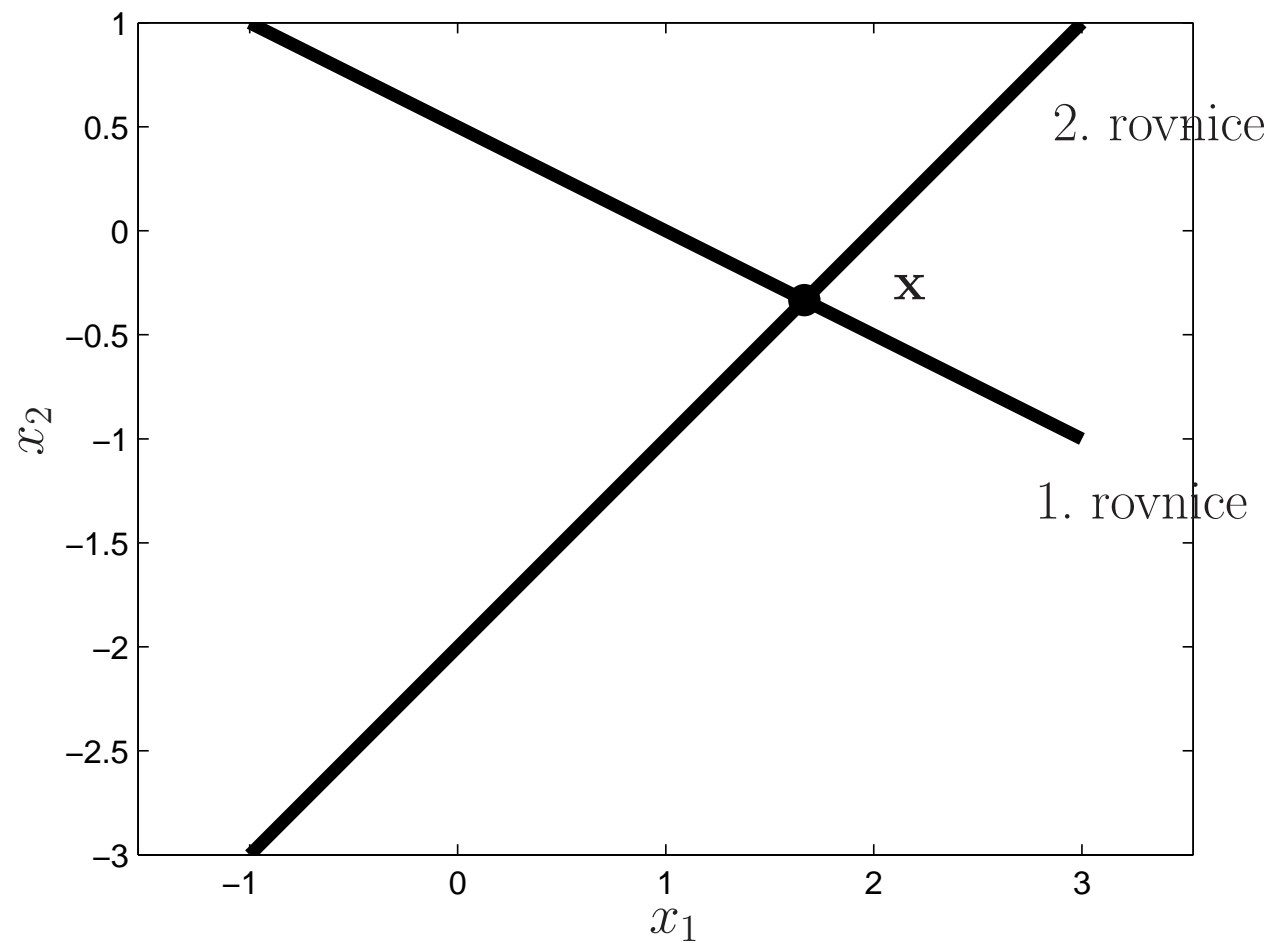
Osnova

- Geometrie soustav lineárních rovnic
- Souvislost Pythagorovy věty a dívky z Playboye
- Souvislost Pythagorovy věty a superpočítání
- Příklad do ŠKOMAM CUPu

Geometrie soustav lineárních rovnic

Pohled po řádcích

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 1 \\x_1 - x_2 &= 2\end{aligned}$$

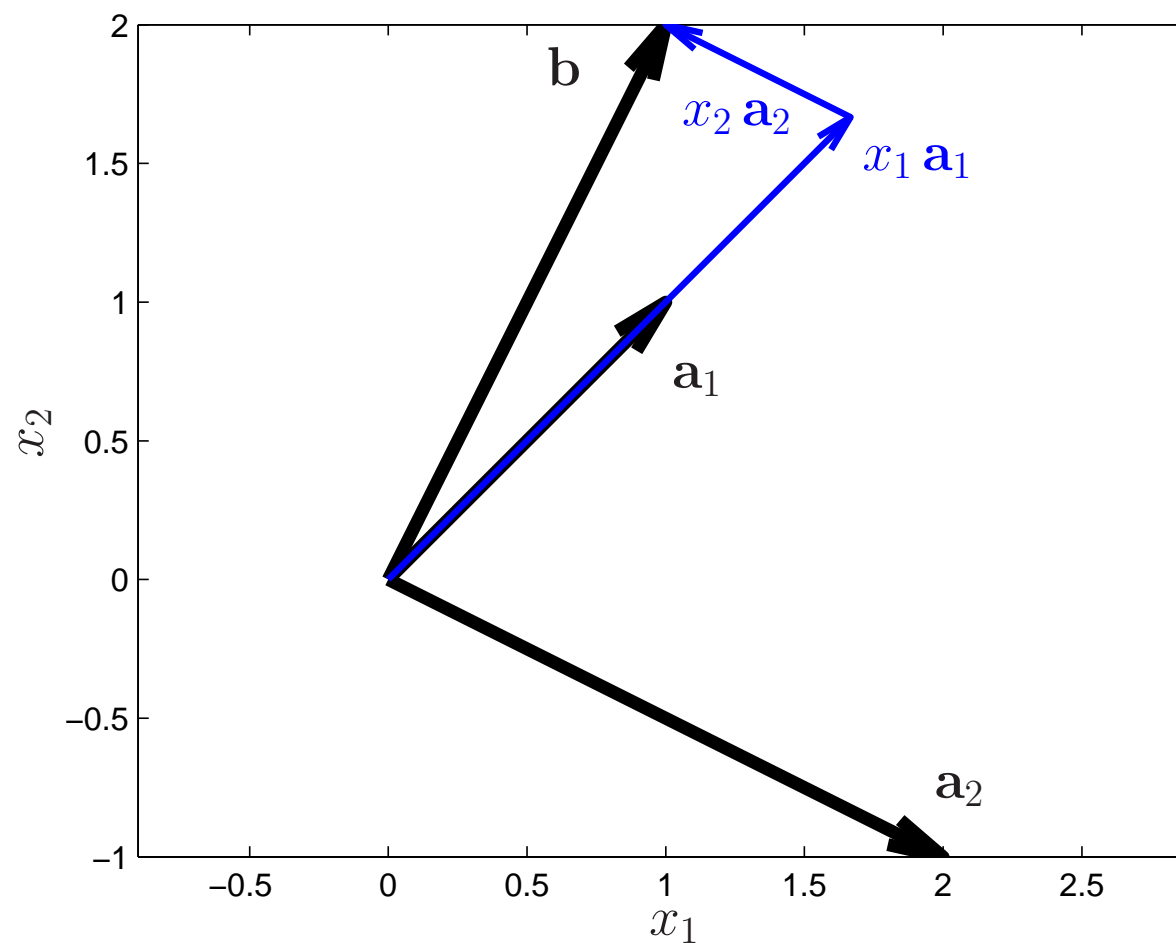


Geometrie soustav lineárních rovnic

Pohled po sloupcích

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 1 \\x_1 - x_2 &= 2\end{aligned}$$

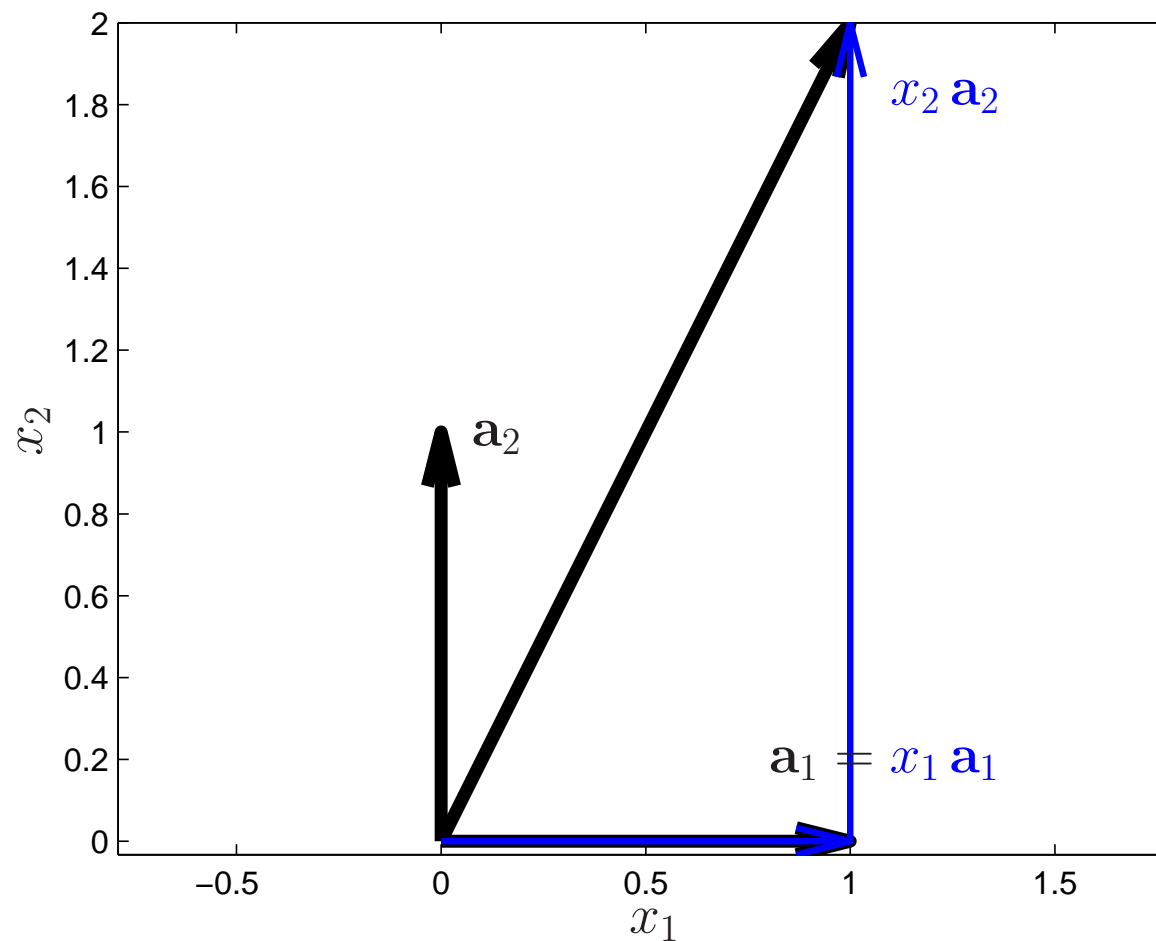
$$x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{a}_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{a}_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{b}}$$



Geometrie soustav lineárních rovnic

Nejjednodušší soustavy: x_1, x_2 „řešíme“ nezávisle

$$\begin{aligned}x_1 &= 1 \\x_2 &= 2\end{aligned}$$
$$x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{a}_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{a}_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{b}}$$



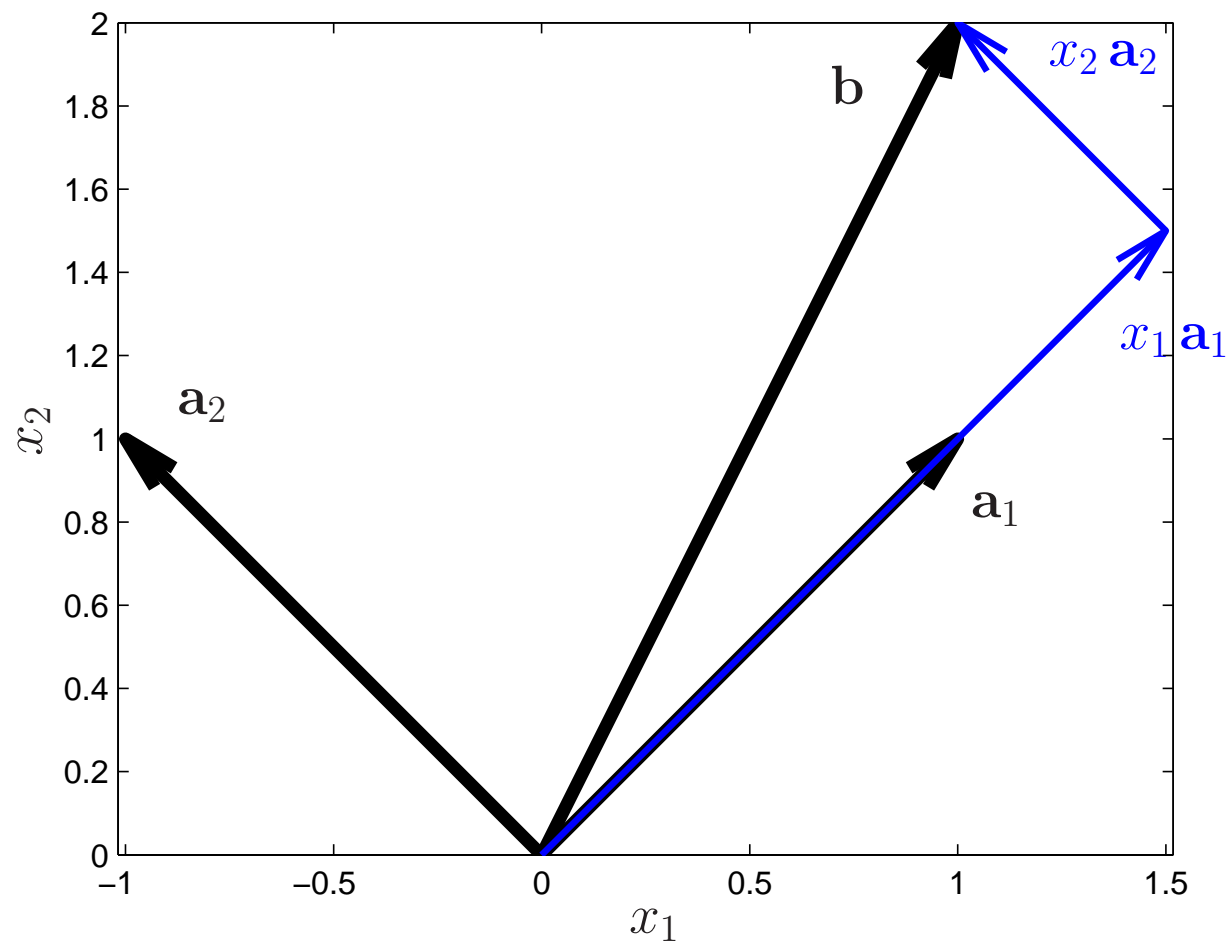
Geometrie soustav lineárních rovnic

x_1, x_2 řešíme nezávisle $\Leftrightarrow \mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$

$$x_1 - x_2 = 1$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{a}_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{a}_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{b}}$$



Pythagorova věta, dívka z Playboye a superpočítání

Osnova

- Geometrie soustav lineárních rovnic
- Souvislost Pythagorovy věty a dívky z Playboye
- Souvislost Pythagorovy věty a superpočítání
- Příklad do ŠKOMAM CUPu

Souvislost Pythagorovy věty a dívky z Playboye

Pythagorova věta

$$\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{c}\|^2,$$

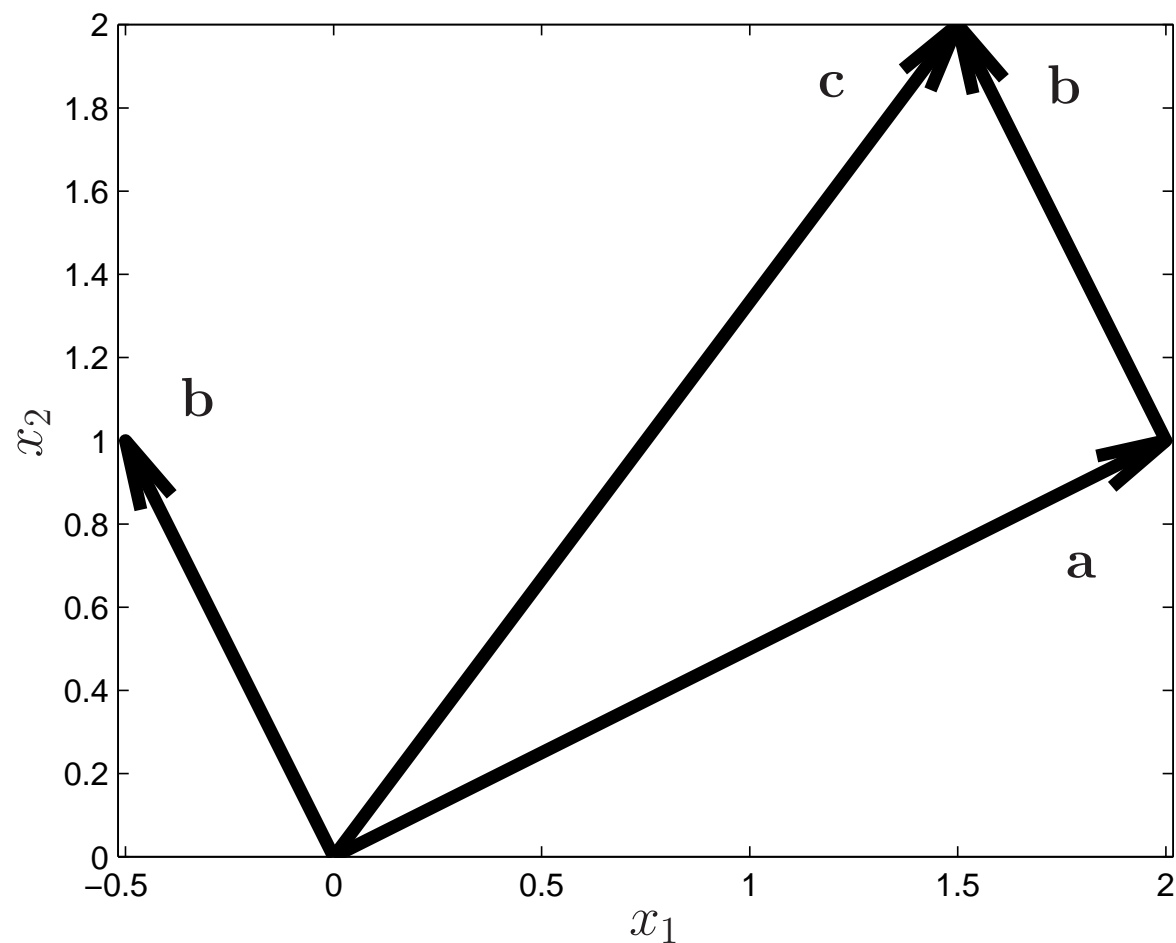
kde

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$$

je norma vektoru \mathbf{a}

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots$$

je skalární součin vektorů.



Souvislost Pythagorovy věty a dívky z Playboye

Kolmost neboli ortogonalita

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c},$$

t.j.

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c},$$

t.j.

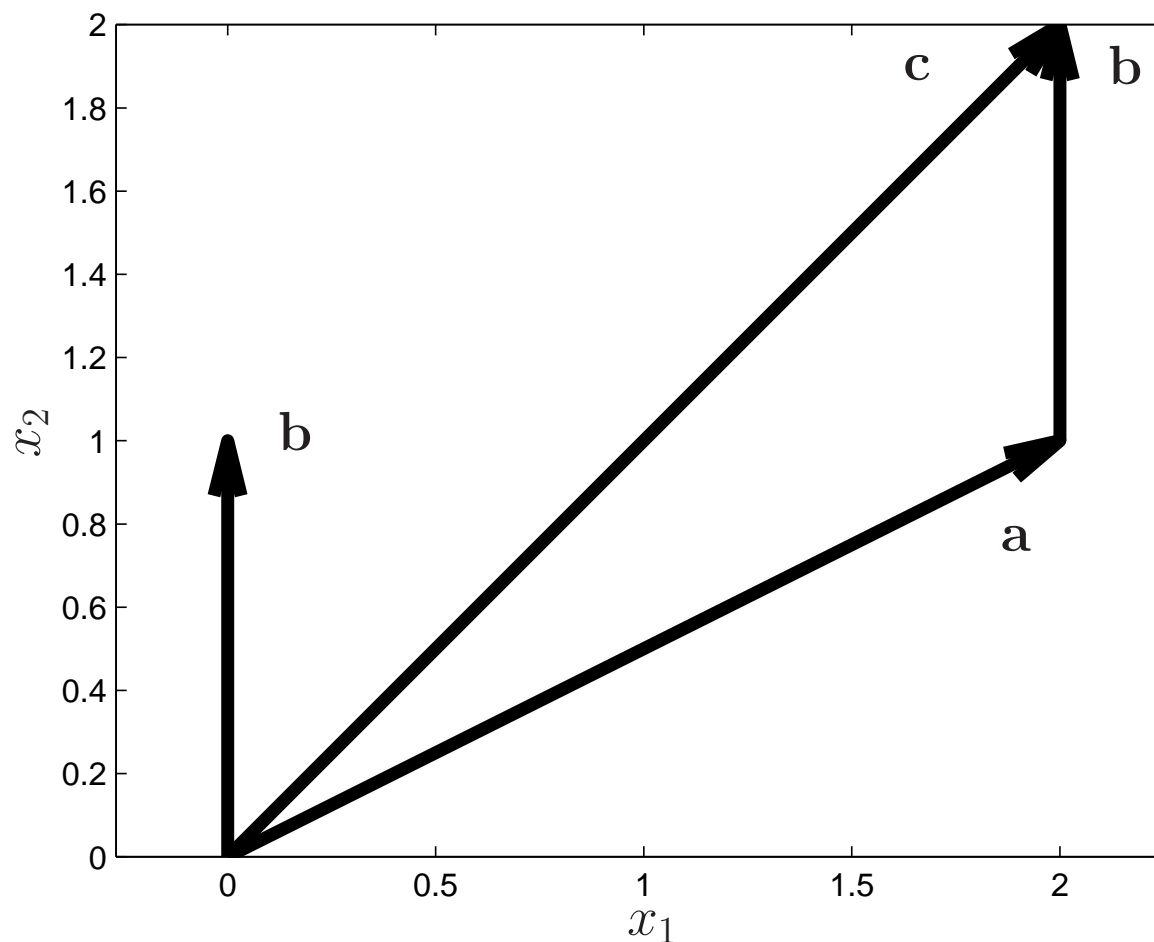
$$\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{c}\|^2.$$

Tedy pro $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$:

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0.$$

Míra kolmosti:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$



Souvislost Pythagorovy věty a dívky z Playboye

Ortogonalní projekce vektoru \mathbf{b} na vektor (přímku) \mathbf{a}

Hledám $x \in \mathbb{R}$:

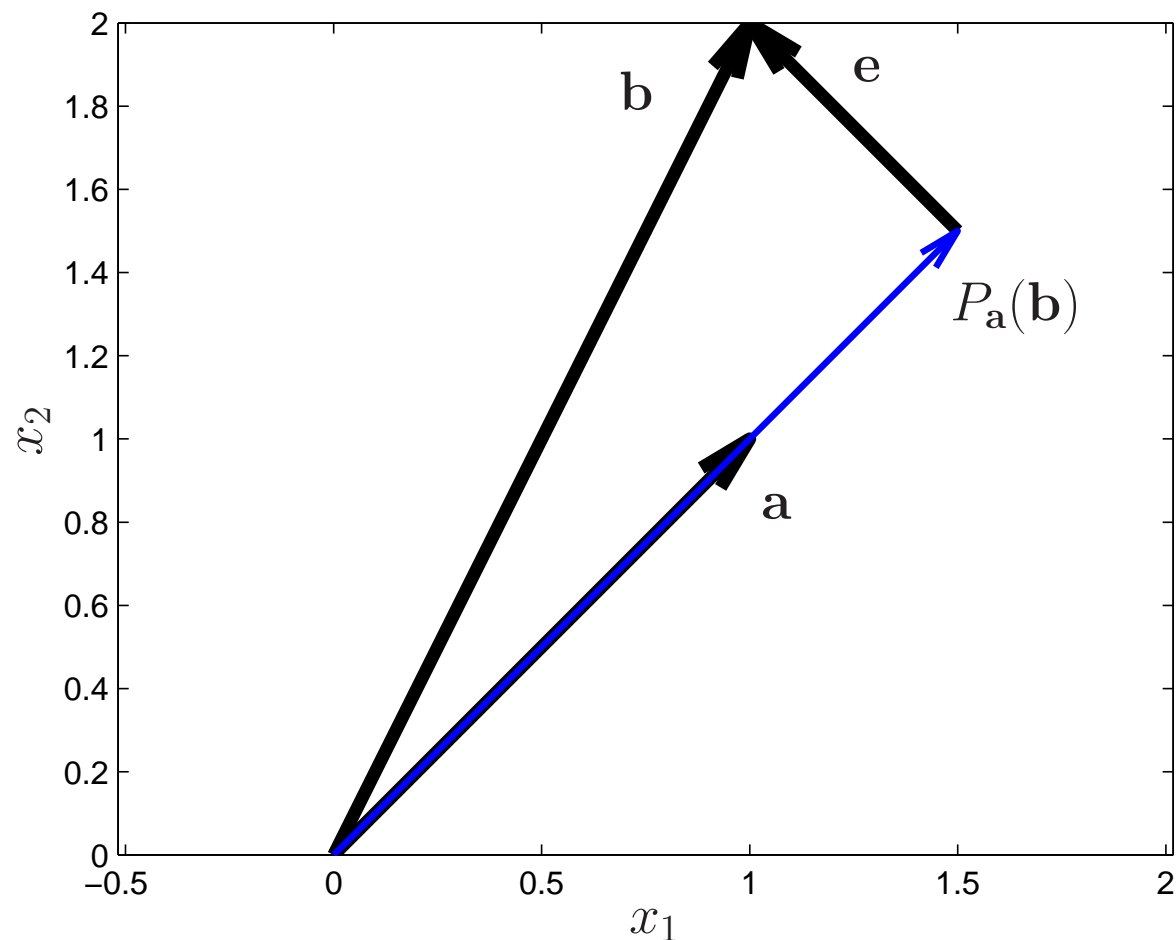
$$\mathbf{b} - x \mathbf{a} =: \mathbf{e} \perp \mathbf{a},$$

t.j.

$$(\mathbf{b} - x \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} = 0,$$

t.j.

$$x = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}, \quad P_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) := x \mathbf{a}.$$



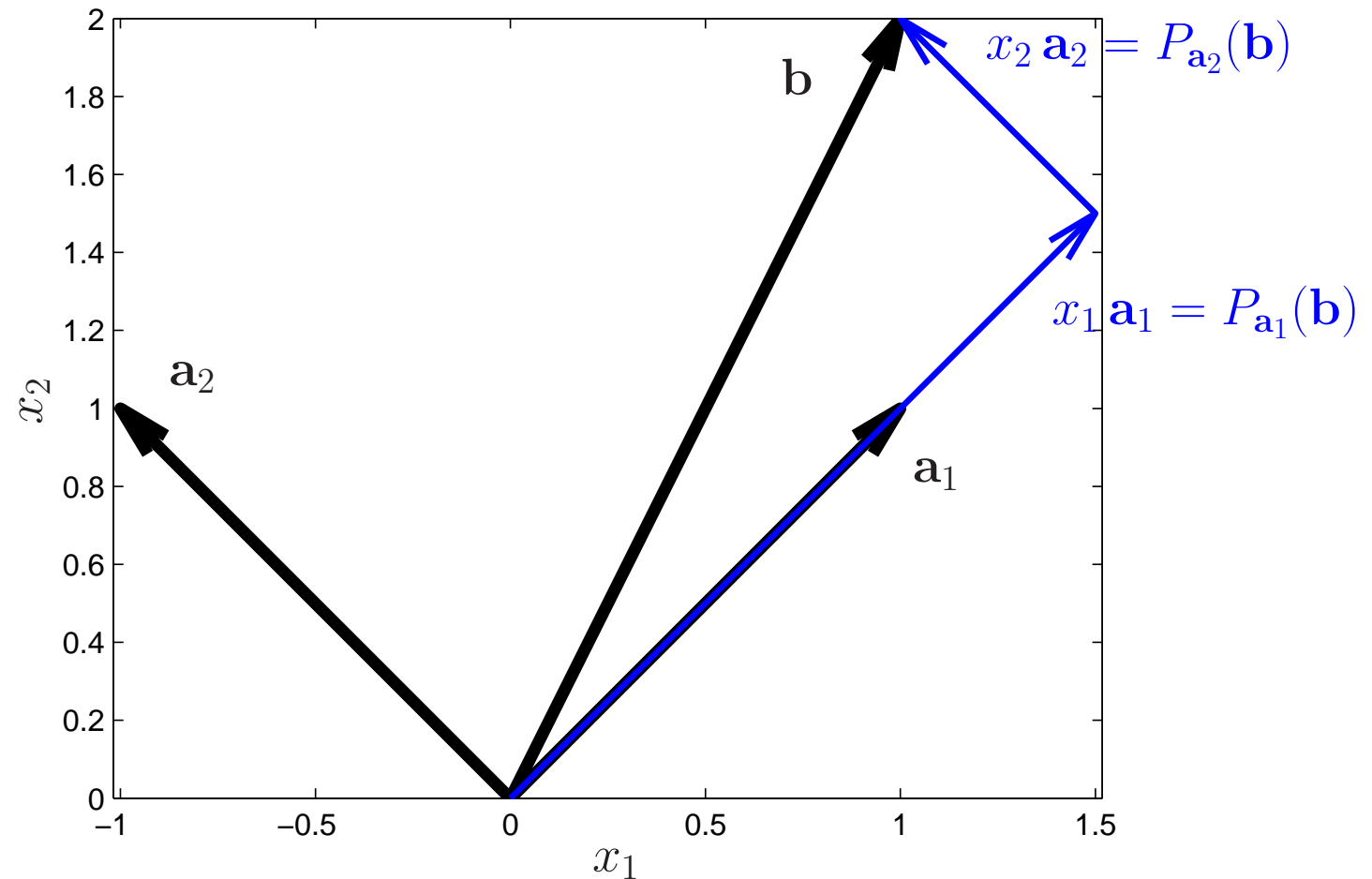
Geometrie soustav lineárních rovnic

x_1, x_2 řešíme nezávisle $\Leftrightarrow \mathbf{a}_1 \perp \mathbf{a}_2$

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 &= 1 \\x_1 + x_2 &= 2\end{aligned}$$

$$x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{a}_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{a}_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{b}}$$

$$x_1 = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}_1}{\|\mathbf{a}_1\|^2}, \quad x_2 = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_2\|^2}$$



Pythagorova věta a JPEG

Projekce vektoru do (hyper)roviny: JPEG komprese

bitmapa



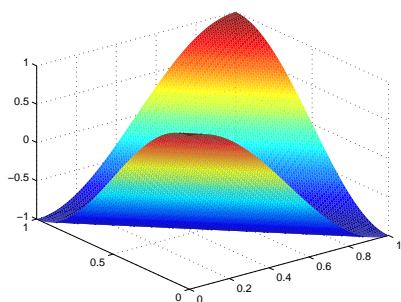
5%-komprese Fourierovou bází



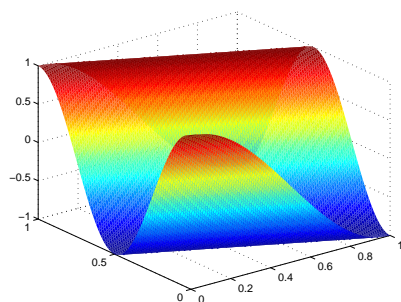
Pythagorova věta a JPEG

JPEG: Fourierova L2–ortogonální báze $f_{jk}(x, y) := e^{i\omega(jx+ky)}$

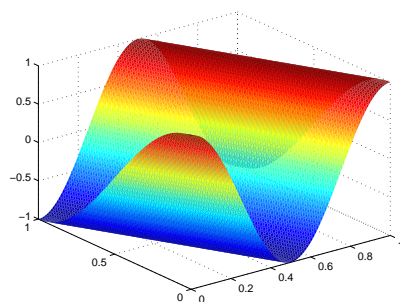
$\text{Re } f_{11}(x, y)$



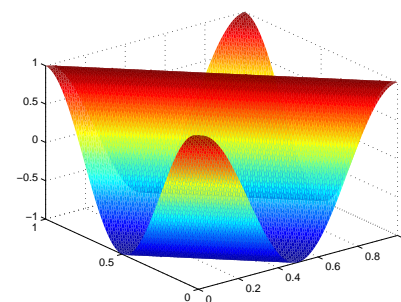
$\text{Re } f_{12}(x, y)$



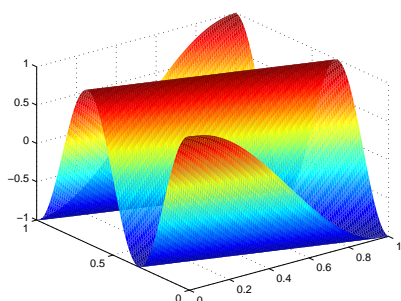
$\text{Re } f_{21}(x, y)$



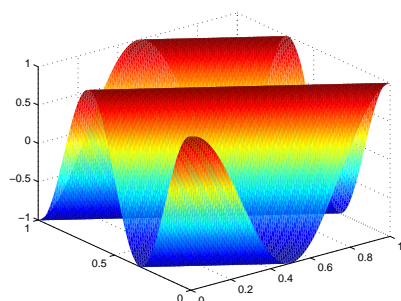
$\text{Re } f_{22}(x, y)$



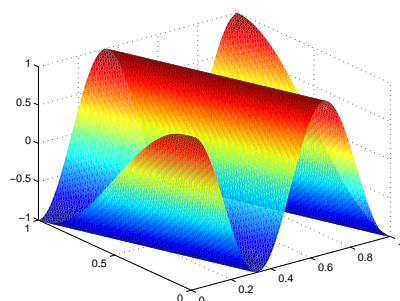
$\text{Re } f_{13}(x, y)$



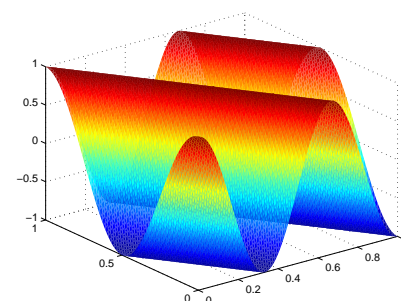
$\text{Re } f_{23}(x, y)$



$\text{Re } f_{31}(x, y)$



$\text{Re } f_{32}(x, y)$



Ortogonalita (v L2 skalárním součinu) \implies rychlá komprese

Pythagorova věta a JPEG

Projekce vektoru do (hyper)roviny: Lena — „první dáma internetu”

Lena Sjööblom, playmate 1972



Lena Söderberg, 1997



Metoda nejmenších čtverců

Ortogonalní projekce vektoru \mathbf{b} na vektor (přímku) \mathbf{a}

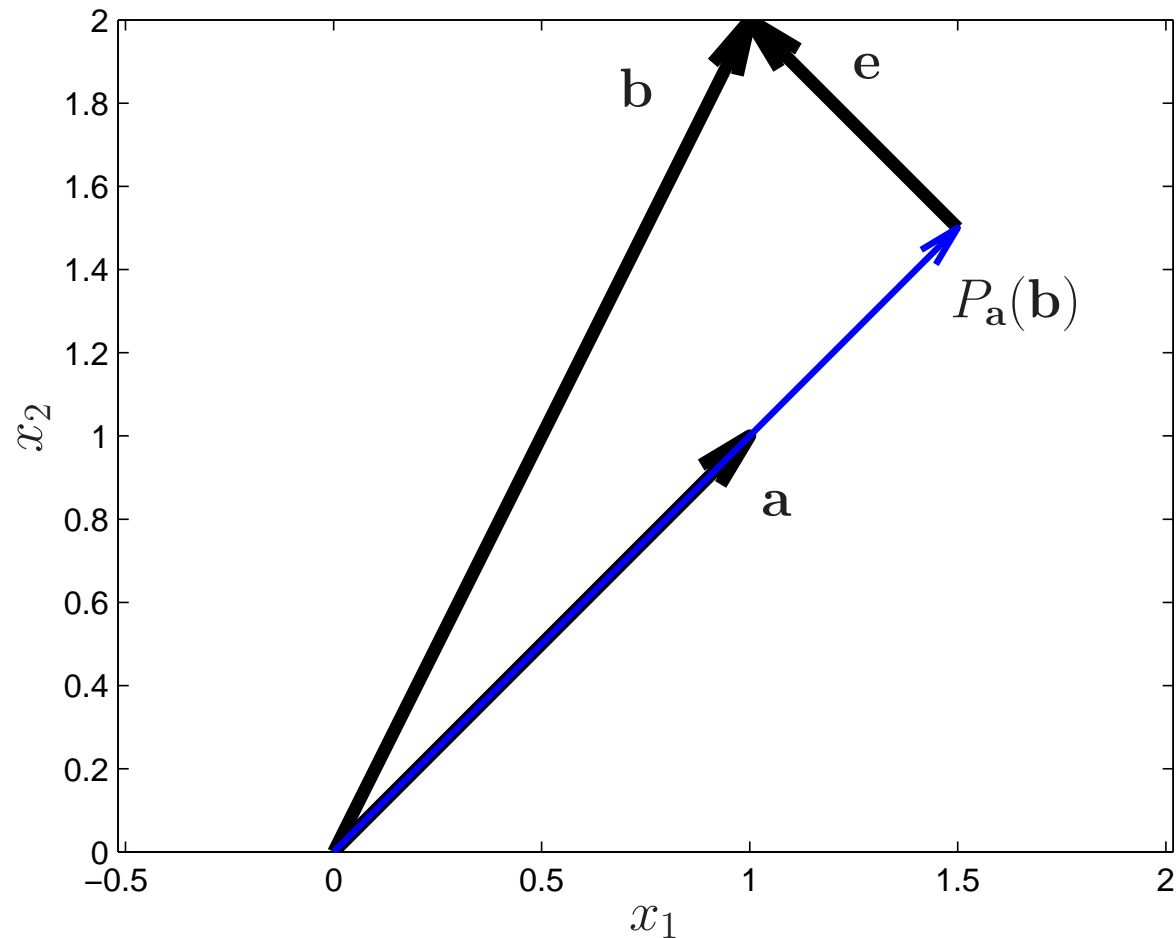
$$x = 2$$

$$x = 1$$

$$x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{a}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{b}}$$

Nejlepší kandidát na řešení
je $\hat{x} \in \mathbb{R}$:

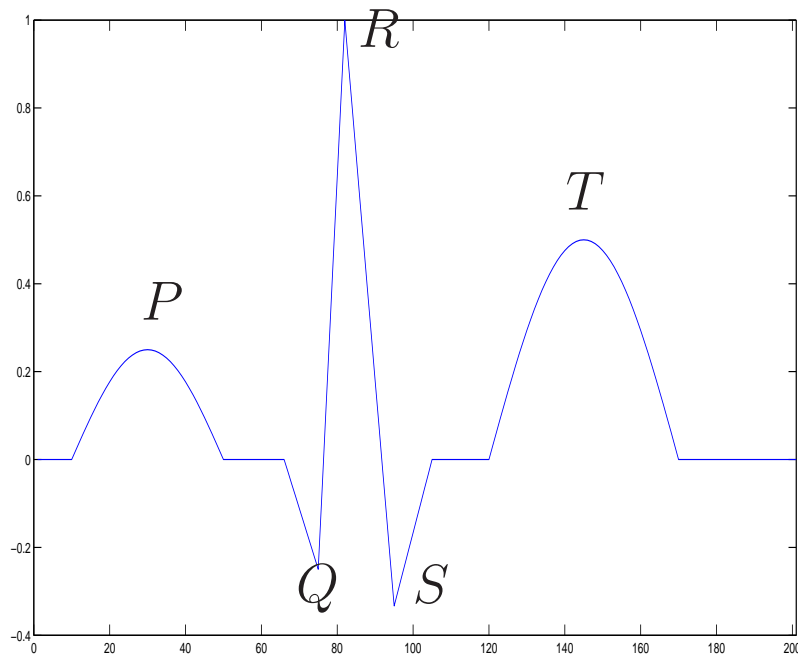
$$\hat{x} \mathbf{a} = P_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}).$$



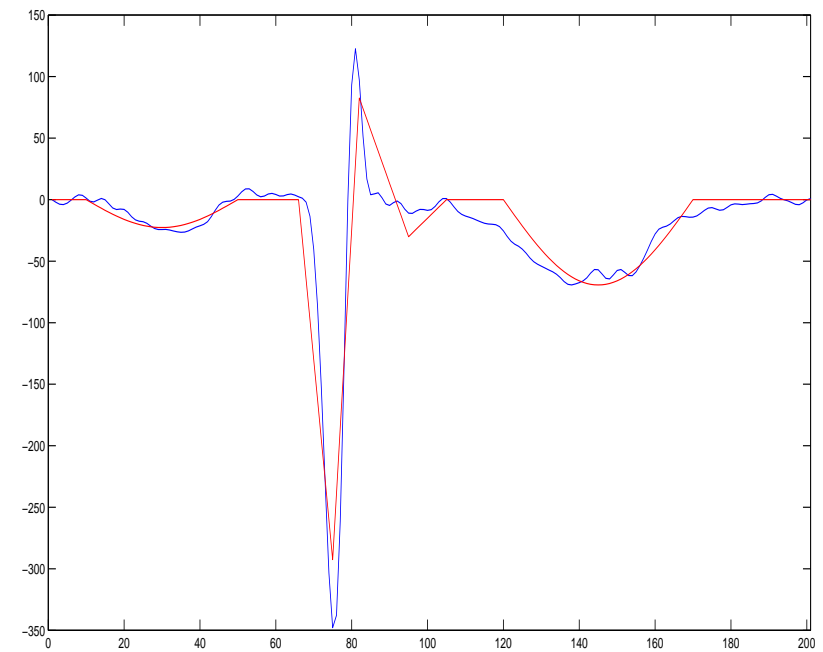
Proložení EKG signálu lékařským modelem

Projekce vektoru do (hyper)roviny: zpracování EKG signálu

model EKG signálu



„fitování“ naměřeného signálu modelem



Pythagorova věta, dívka z Playboye a superpočítání

Osnova

- Geometrie soustav lineárních rovnic
- Souvislost Pythagorovy věty a dívky z Playboye
- Souvislost Pythagorovy věty a superpočítání
- Příklad do ŠKOMAM CUPu

Souvislost Pythagorovy věty a superpočítání

Přibližné řešení soustav metodou prostých iterací — 1. iterace

$$x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{a}_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{a}_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{b}}$$

$\mathbf{x}^0 := \mathbf{0}$

$\mathbf{r}^0 := \mathbf{b} - x_1^0 \mathbf{a}_1 - x_2^0 \mathbf{a}_2$

$k := 0$

while $\|\mathbf{r}^k\| / \|\mathbf{r}^0\| > \varepsilon$ **do**

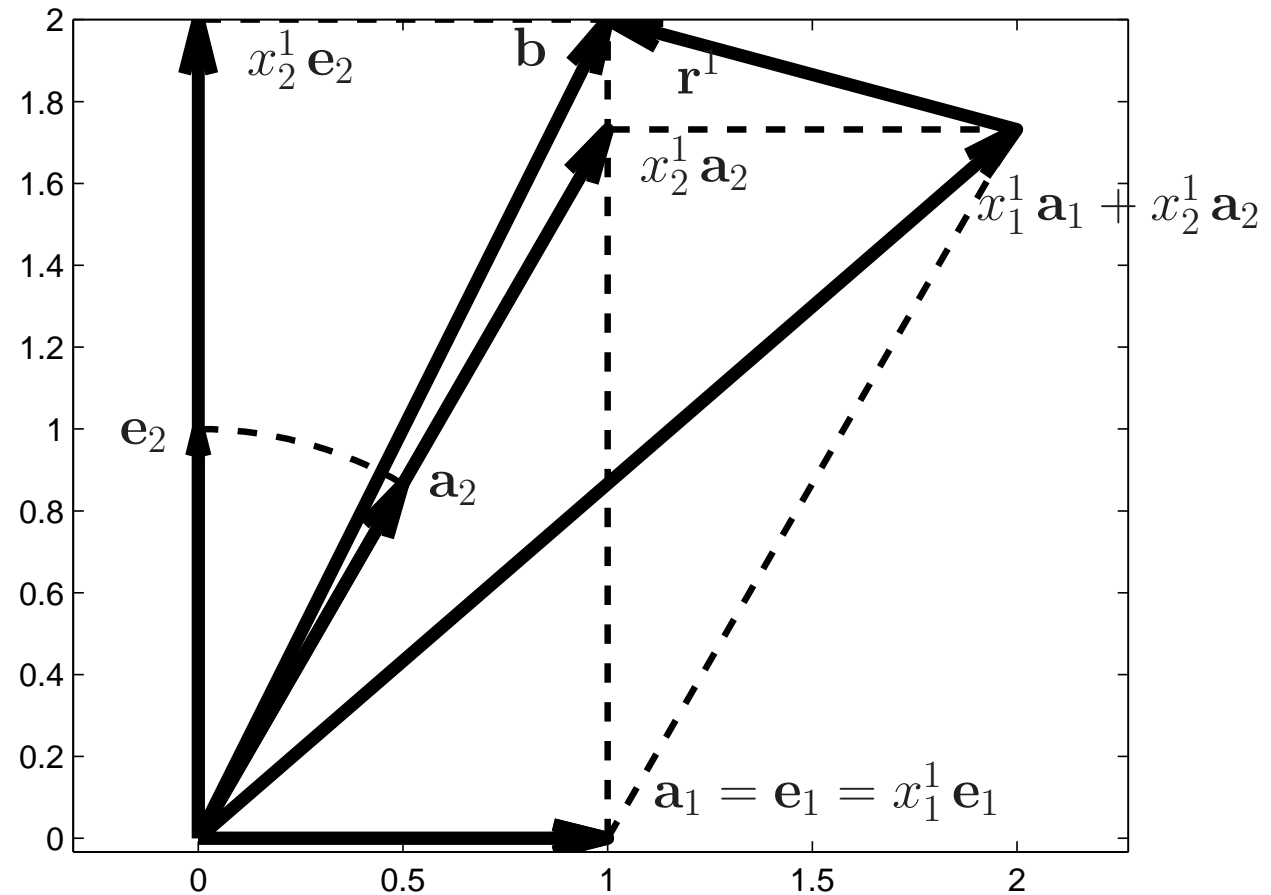
$\mathbf{x}^{k+1} := \mathbf{x}^k + \mathbf{r}^k$

$\mathbf{r}^{k+1} := \mathbf{b} - x_1^{k+1} \mathbf{a}_1 - x_2^{k+1} \mathbf{a}_2$

$k := k + 1$

end while

\mathbf{x}^k je přibližné řešení



Souvislost Pythagorovy věty a superpočítání

Přibližné řešení soustav metodou prostých iterací — 2. iterace

$$x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{a}_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{a}_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{b}}$$

$\mathbf{x}^0 := \mathbf{0}$

$\mathbf{r}^0 := \mathbf{b} - x_1^0 \mathbf{a}_1 - x_2^0 \mathbf{a}_2$

$k := 0$

while $\|\mathbf{r}^k\| / \|\mathbf{r}^0\| > \varepsilon$ **do**

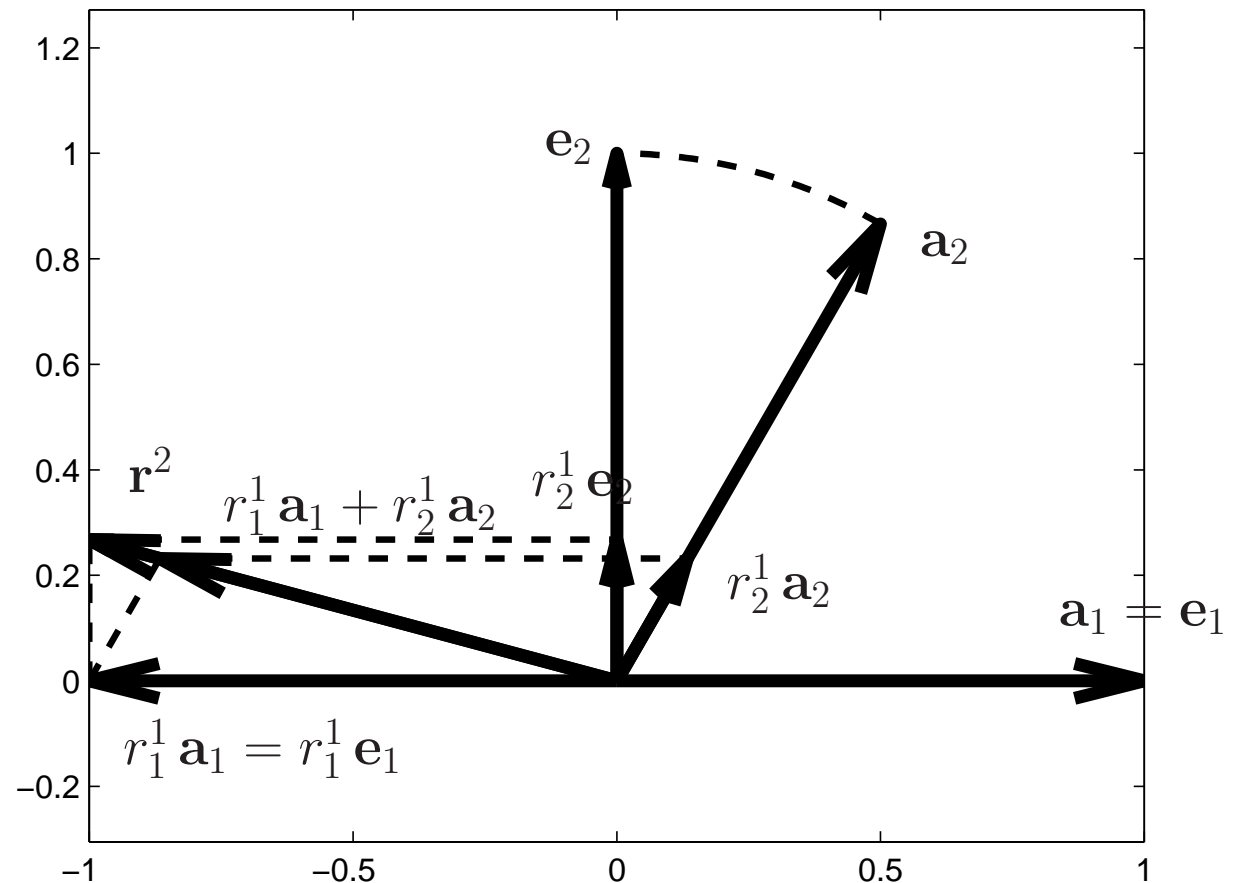
$\mathbf{x}^{k+1} := \mathbf{x}^k + \mathbf{r}^k$

$\mathbf{r}^{k+1} := \mathbf{b} - x_1^{k+1} \mathbf{a}_1 - x_2^{k+1} \mathbf{a}_2$

$k := k + 1$

end while

\mathbf{x}^k je přibližné řešení



Souvislost Pythagorovy věty a superpočítání

Přibližné řešení soustav metodou prostých iterací — 3. iterace

$$x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{a}_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{a}_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=: \mathbf{b}}$$

$\mathbf{x}^0 := \mathbf{0}$

$\mathbf{r}^0 := \mathbf{b} - x_1^0 \mathbf{a}_1 - x_2^0 \mathbf{a}_2$

$k := 0$

while $\|\mathbf{r}^k\| / \|\mathbf{r}^0\| > \varepsilon$ **do**

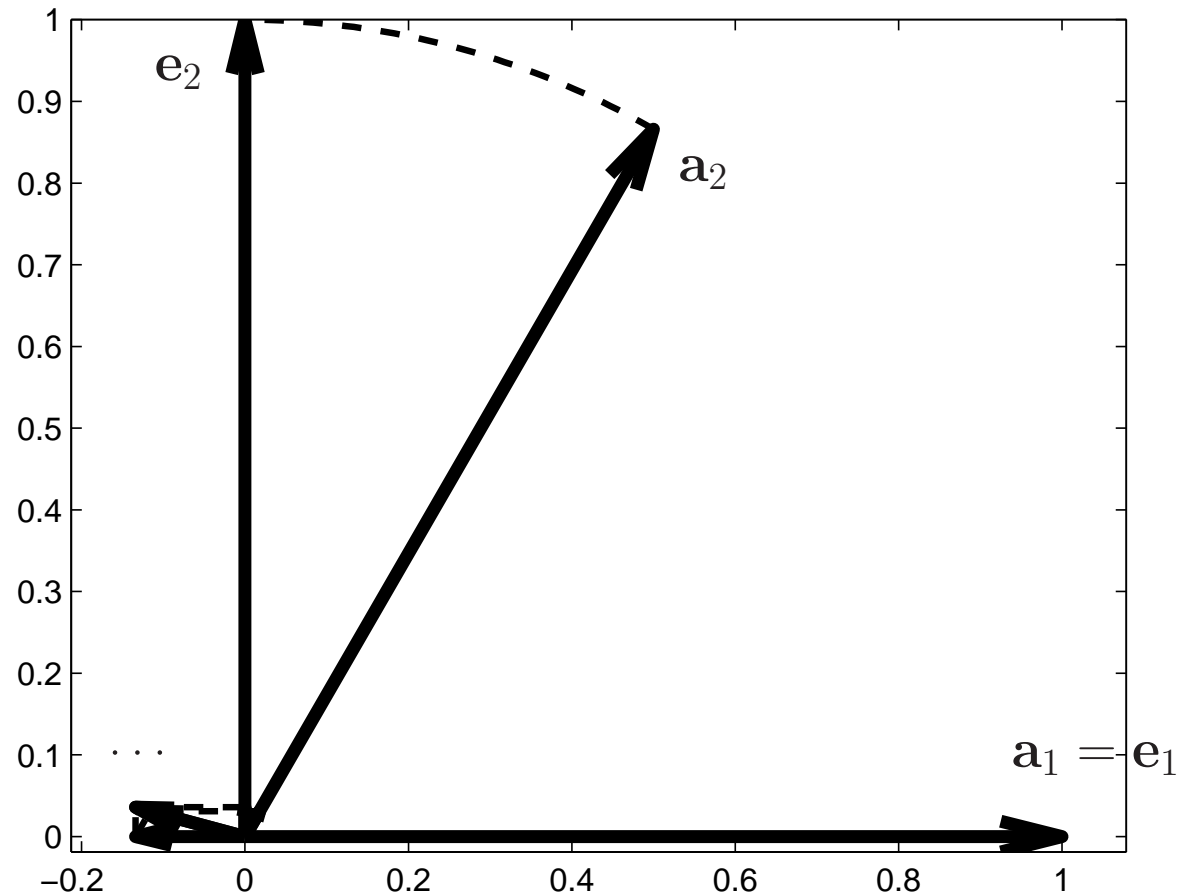
$\mathbf{x}^{k+1} := \mathbf{x}^k + \mathbf{r}^k$

$\mathbf{r}^{k+1} := \mathbf{b} - x_1^{k+1} \mathbf{a}_1 - x_2^{k+1} \mathbf{a}_2$

$k := k + 1$

end while

\mathbf{x}^k je přibližné řešení



Souvislost Pythagorovy věty a superpočítání

Analýza konvergence metody prostých iterací

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 := \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} : \quad \mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{b} - x_1^{k+1} \mathbf{a}_1 - x_2^{k+1} \mathbf{a}_2 \\ &= \mathbf{b} - (x_1^k + r_1^k) \mathbf{a}_1 - (x_2^k + r_2^k) \mathbf{a}_2 \\ &= \mathbf{r}^k - r_1^k \mathbf{a}_1 - r_2^k \mathbf{a}_2 \\ &= r_2^k \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ 1 - \sin \alpha \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\|\mathbf{r}^{k+1}\|^2 = \mathbf{r}^{k+1} \cdot \mathbf{r}^{k+1} = (r_2^k)^2 \underbrace{[\cos^2 \alpha + (1 - \sin \alpha)^2]}_{=2(1-\sin \alpha)=:K_\alpha} \leq \|\mathbf{r}^k\|^2 K_\alpha$$

Metoda konverguje pro $\alpha \in (\pi/6, 5\pi/6) \cup (-5\pi/6, \pi/6)$: $\frac{\|\mathbf{r}^{k+1}\|}{\|\mathbf{r}^k\|} \leq \sqrt{2(1 - \sin \alpha)} < 1$.

Přesnosti ε je dosaženo v $k \geq \log \varepsilon / \log \sqrt{K_\alpha}$ iteracích.

Zpřesnění řešení o 1 řád vyžaduje konstantní počet iterací.

Souvislost Pythagorovy věty a superpočítání

Zlepšení konvergence metody prostých iterací — předpodmínění

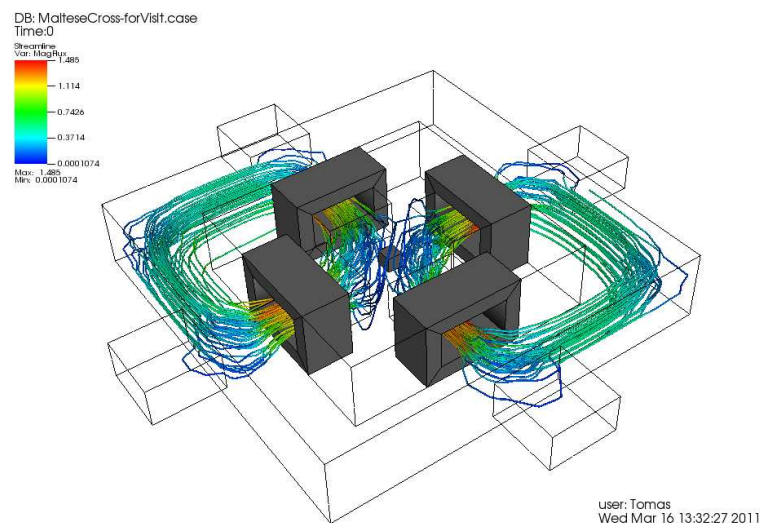
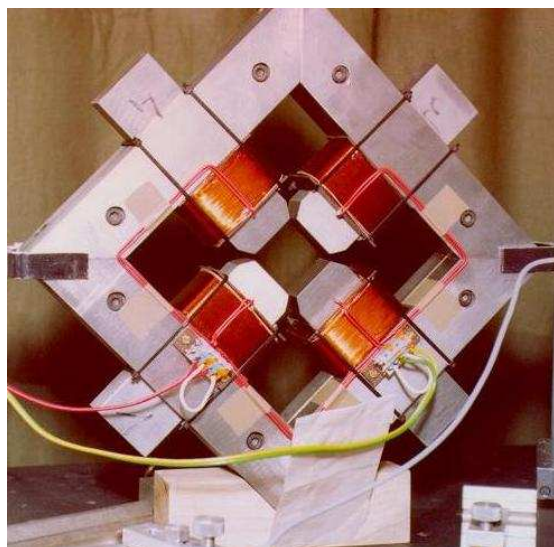
$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$$

Hledáme dva různé směry $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \neq \mathbf{0}$ tak, aby modifikovaná ekvivalentní soustava měla kolmější sloupce

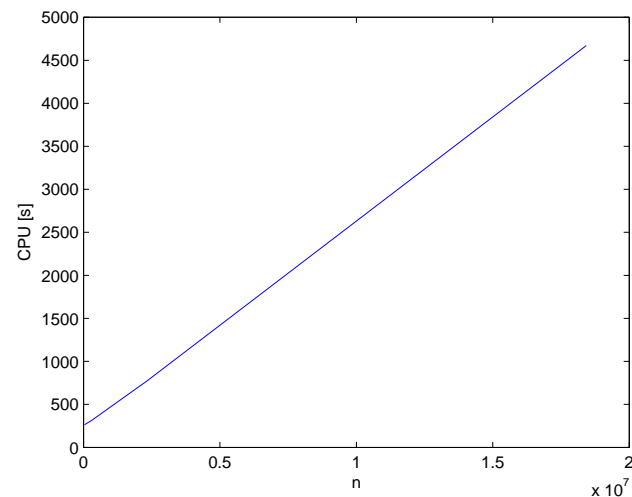
$$x_1 \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{a}_1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{c}_2 \cdot \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

Iterační metoda předpodmíněná multigridem

Pole elektromagnetu — 18 milionů rovnic/neznámých



úroveň	počet hran	PCG iter.	CPU	Mem
0	39.310	1	4 min 23 s	269 MB
1	299.166	3	5 min 20 s	834 MB
2	2.333.312	3	13 min	5,14 GB
3	18.428.912	3	1 h 18 min	39,64 GB



Pythagorova věta, dívka z Playboye a superpočítání

Osnova

- Geometrie soustav lineárních rovnic
- Souvislost Pythagorovy věty a dívky z Playboye
- Souvislost Pythagorovy věty a superpočítání
- Příklad do ŠKOMAM CUPu

Pythagorova věta, dívka z Playboye a superpočítání

Příklad do ŠKOMAM CUPu

Jakou největší čtvercovou soustavu lineárních rovnic by vypočítal za 1 hodinu nejlepší, viz www.top500.org, počítač na světě, čínský Tianhe-2, Kramerovým pravidlem bez použití řádkových úprav, uvažujeme-li pouze instrukce násobení, kterých provede $33,8 \cdot 10^{15}$ za sekundu?