

ŠKOMAM - Čím se zabývají studenti aplikované matematiky?

Řešení 2D Neumannovy úlohy s Laplaceovým operátorem nepřímou metodou hraničních prvků

Bc. Robert Skopal

VŠB-TUO
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

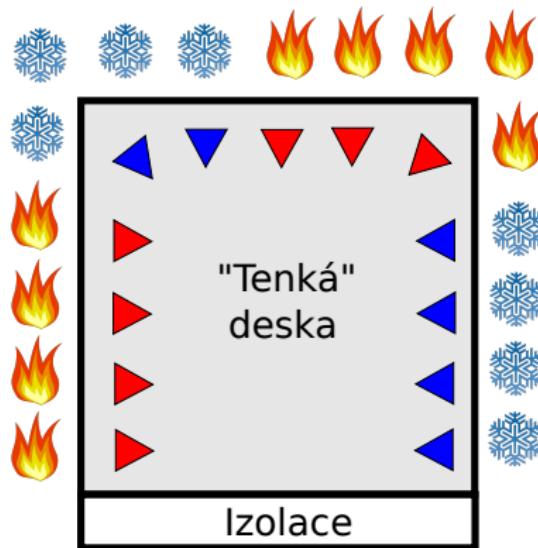
Leden 2013

Obsah

- Typy úloh
 - Vnitřní Neumannova úloha
 - Vnější Neumannova úloha
- IDBEM vs. FDM
- Numerické experimenty
 - Vnitřní úloha
 - Vnější úloha

Vnitřní 2D Neumannova úloha s Laplaceovou rovnicí

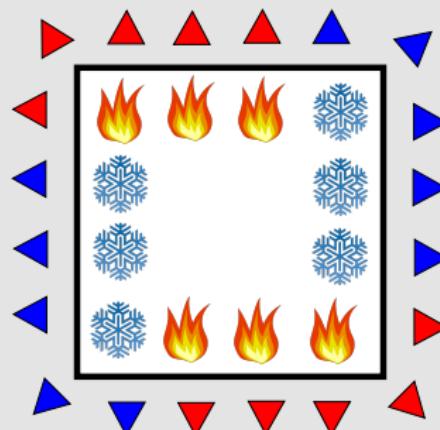
- např. ustálené vedení tepla v "tenké" desce.



Obrázek: Vnitřní Neumannova úloha (vedení tepla)

Vnější 2D Neumannova úloha s Laplaceovou rovnicí

"Tenká"
deska



IDBEM vs. FDM

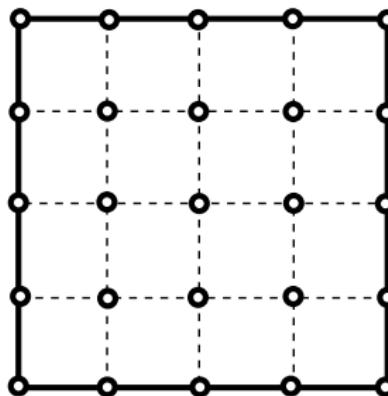
- Nepřímá metoda hraničních prvků (IDBEM - InDirect Boundary Element Method)
- Metoda konečných diferencí (FDM - Finite Difference Method)

IDBEM vs. FDM

- Nepřímá metoda hraničních prvků (IDBEM - InDirect Boundary Element Method)
- Metoda konečných diferencí (FDM - Finite Difference Method)

FDM (metoda konečných diferencí / metoda sítí)

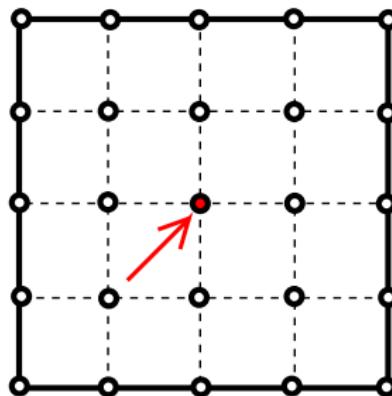
- danou oblast pokryjeme 2D sítí o n^2 uzlech
- přibližné řešení poté hledáme pouze v těchto uzlech
- cílem je daný problém převést na soustavu lineárních rovnic



Obrázek: Metoda konečných diferencí

FDM (metoda konečných diferencí / metoda sítí)

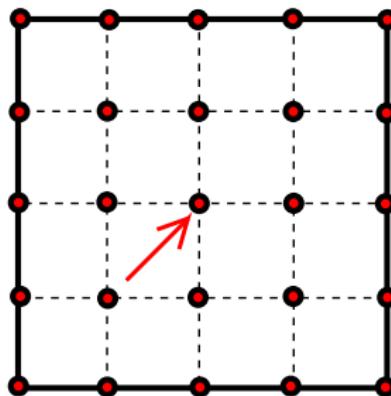
- danou oblast pokryjeme 2D sítí o n^2 uzlech
- přibližné řešení poté hledáme pouze v těchto uzlech
- cílem je daný problém převést na soustavu lineárních rovnic



Obrázek: Metoda konečných diferencí

FDM (metoda konečných diferencí / metoda sítí)

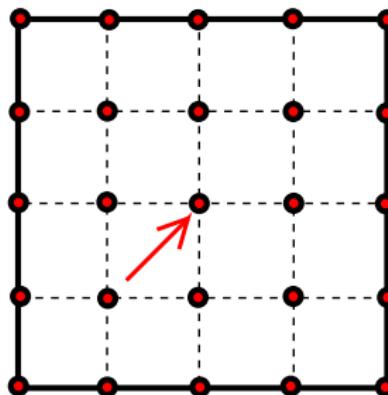
- danou oblast pokryjeme 2D sítí o n^2 uzlech
- přibližné řešení poté hledáme pouze v těchto uzlech
- cílem je daný problém převést na soustavu lineárních rovnic



Obrázek: Metoda konečných diferencí

FDM (metoda konečných diferencí / metoda sítí)

- danou oblast pokryjeme 2D sítí o n^2 uzlech
- přibližné řešení poté hledáme pouze v těchto uzlech
- cílem je daný problém převést na soustavu lineárních rovnic

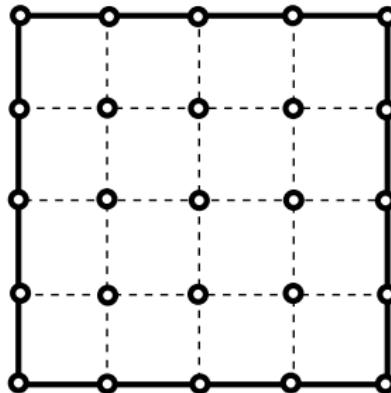


Obrázek: Metoda konečných diferencí

- pro síť o n^2 uzlech tedy dostaneme n^2 rovnic o n^2 neznámých

IDBEM (nepřímá metoda hraničních prvků)

- diskretizujeme pouze hranici pro získání "hraničních prvků"¹
- uvažujme stejnou síť o n^2 uzlech jako v případě FDM

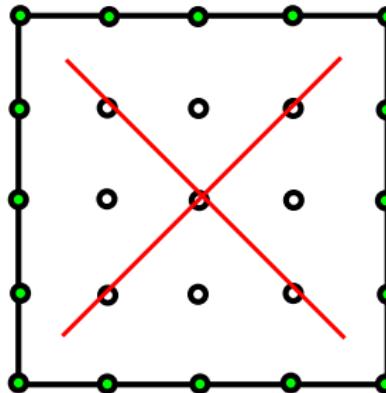


Obrázek: Nepřímá metoda hraničních prvků

¹v tuto chvíli ještě ne řešení!

IDBEM (nepřímá metoda hraničních prvků)

- diskretizujeme pouze hranici pro získání "hraničních prvků"¹
- uvažujme stejnou síť o n^2 uzlech jako v případě FDM

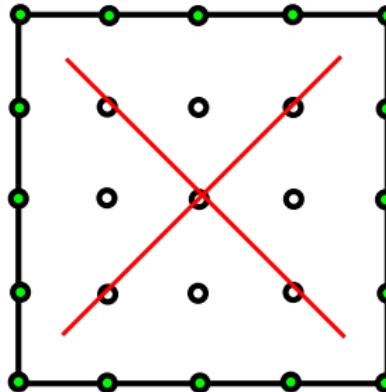


Obrázek: Nepřímá metoda hraničních prvků

¹v tuto chvíli ještě ne řešení!

IDBEM (nepřímá metoda hraničních prvků)

- diskretizujeme pouze hranici pro získání "hraničních prvků"¹
- uvažujme stejnou síť o n^2 uzlech jako v případě FDM



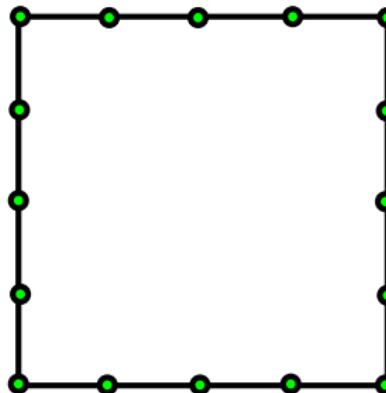
Obrázek: Nepřímá metoda hraničních prvků

- získáme tedy pouze soustavu $4 \cdot (n - 1)$ rovnic o $4 \cdot (n - 1)$ nezmárných

¹v tuto chvíli ještě ne řešení!

IDBEM (nepřímá metoda hraničních prvků)

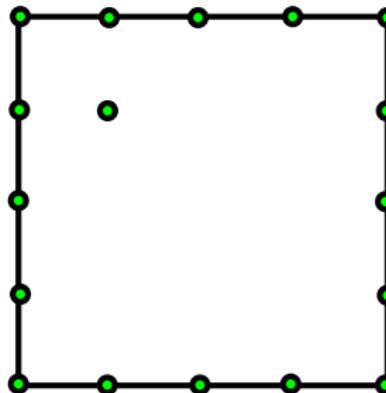
- z takto získaných "hraničních prvků" pak lze získat řešení v libovolných (!) bodech dané oblasti pouhým "dosazením do vzorečku"



Obrázek: Nepřímá metoda hraničních prvků - dopočtení řešení

IDBEM (nepřímá metoda hraničních prvků)

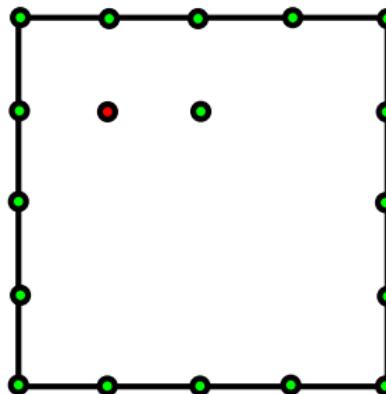
- z takto získaných "hraničních prvků" pak lze získat řešení v libovolných (!) bodech dané oblasti pouhým "dosazením do vzorečku"



Obrázek: Nepřímá metoda hraničních prvků - dopočtení řešení

IDBEM (nepřímá metoda hraničních prvků)

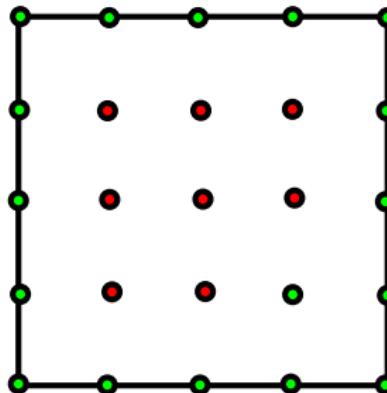
- z takto získaných "hraničních prvků" pak lze získat řešení v libovolných (!) bodech dané oblasti pouhým "dosazením do vzorečku"



Obrázek: Nepřímá metoda hraničních prvků - dopočtení řešení

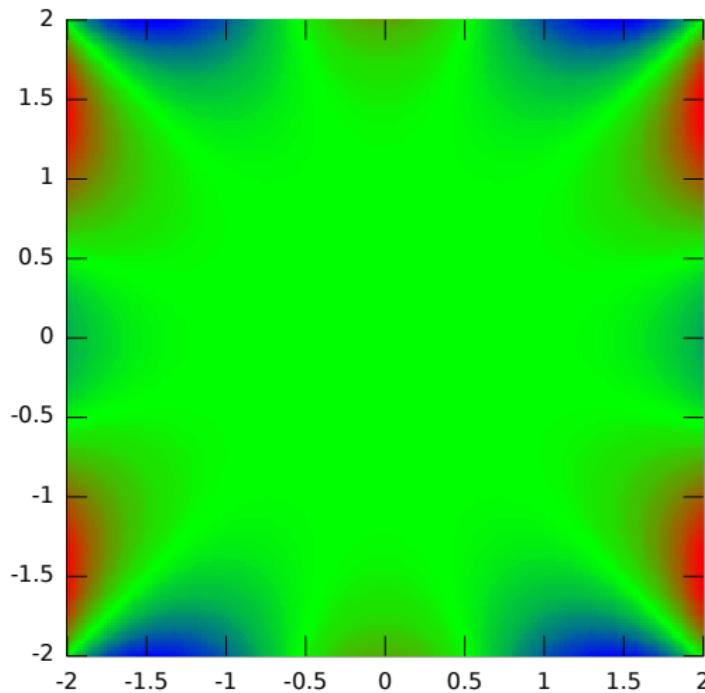
IDBEM (nepřímá metoda hraničních prvků)

- z takto získaných "hraničních prvků" pak lze získat řešení v libovolných (!) bodech dané oblasti pouhým "dosazením do vzorečku"

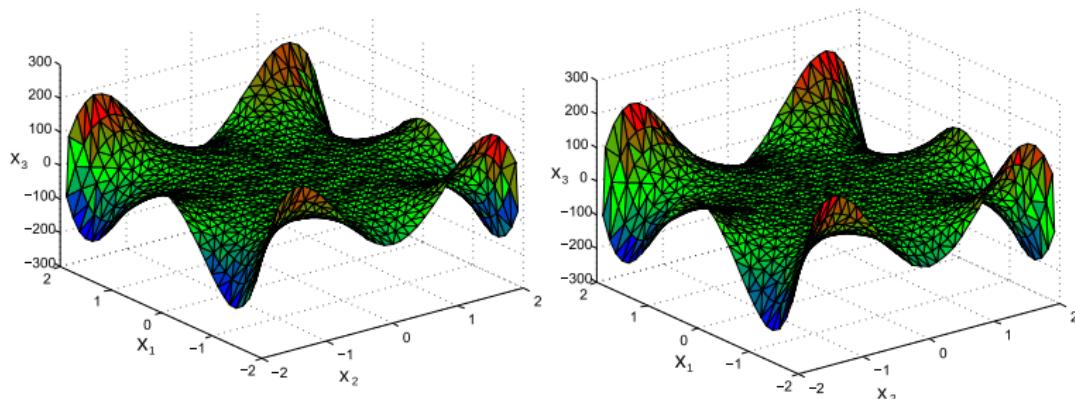


Obrázek: Nepřímá metoda hraničních prvků - dopočtení řešení

Ukázka řešení vnitřní úlohy



Ukázka řešení vnitřní úlohy

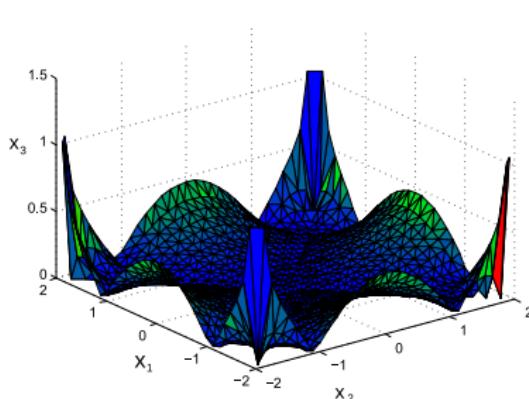


(a) Řešení pomocí IDBEM

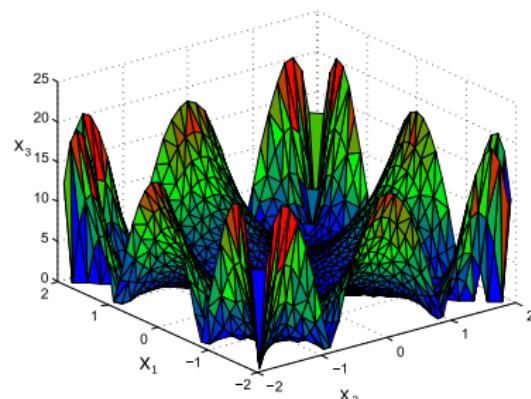
(b) Řešení pomocí FDM

Uzlů na hranici	Uzlů celkem	δ_{rel} (IDBEM)	δ_{rel} (FDM)
64	285	$1,487 \cdot 10^{-2}$	$2,853 \cdot 10^{-1}$
128	1085	$3,679 \cdot 10^{-3}$	$1,322 \cdot 10^{-1}$
256	4221	$9,006 \cdot 10^{-4}$	$6,382 \cdot 10^{-2}$
512	16637	$2,212 \cdot 10^{-4}$	$3,137 \cdot 10^{-2}$

Absolutní chyba IDBEM/FDM



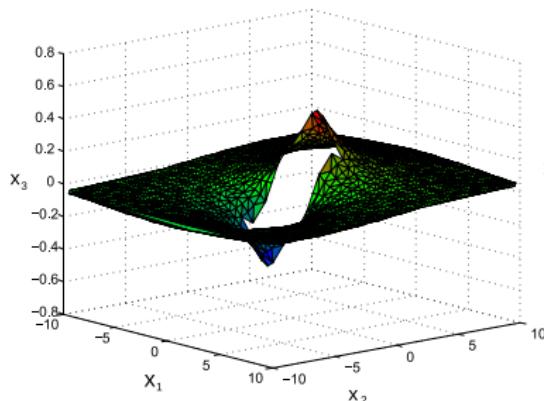
(a) Absolutní chyba IDBEM



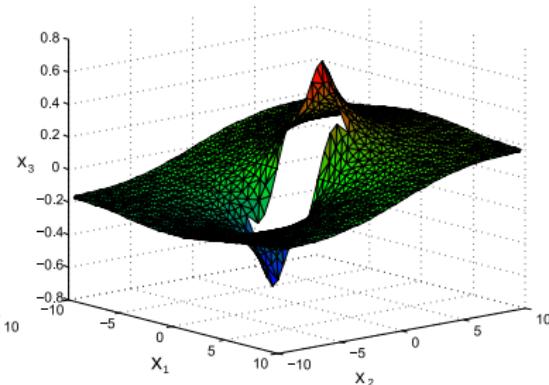
(b) Absolutní chyba FDM

Uzlů na hranici	Uzlů celkem	δ_{rel} (IDBEM)	δ_{rel} (FDM)
64	285	$1,487 \cdot 10^{-2}$	$2,853 \cdot 10^{-1}$
128	1085	$3,679 \cdot 10^{-3}$	$1,322 \cdot 10^{-1}$
256	4221	$9,006 \cdot 10^{-4}$	$6,382 \cdot 10^{-2}$
512	16637	$2,212 \cdot 10^{-4}$	$3,137 \cdot 10^{-2}$

Ukázka řešení vnější úlohy



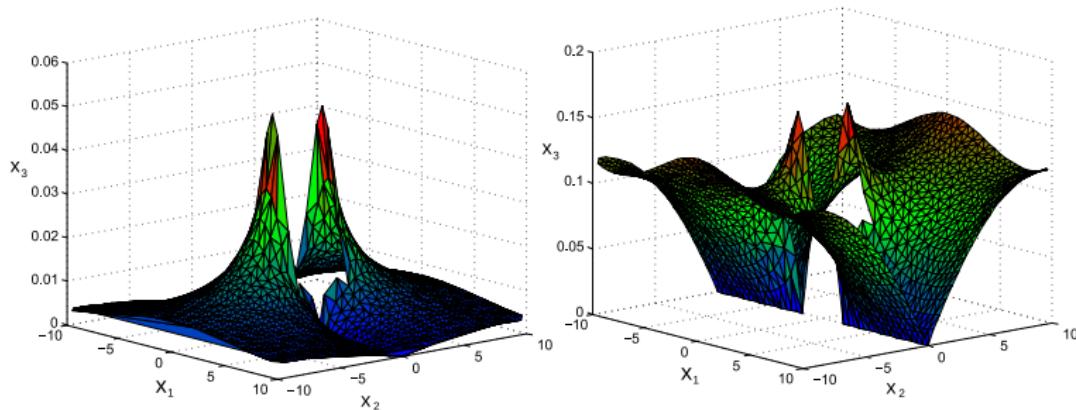
(a) Řešení pomocí IDBEM



(b) Řešení pomocí FDM

Uzlů na hranici	Uzlů celkem	δ_{rel} (IDBEM)	δ_{rel} (FDM)
32	1624	$7,384 \cdot 10^{-2}$	$7,895 \cdot 10^{-1}$
64	6328	$4,324 \cdot 10^{-2}$	$6,296 \cdot 10^{-1}$
128	24952	$2,366 \cdot 10^{-2}$	$5,632 \cdot 10^{-1}$

Absolutní chyba IDBEM/FDM



(a) Absolutní chyba IDBEM

(b) Absolutní chyba FDM

Uzlů na hranici	Uzlů celkem	δ_{rel} (IDBEM)	δ_{rel} (FDM)
32	1624	$7,384 \cdot 10^{-2}$	$7,895 \cdot 10^{-1}$
64	6328	$4,324 \cdot 10^{-2}$	$6,296 \cdot 10^{-1}$
128	24952	$2,366 \cdot 10^{-2}$	$5,632 \cdot 10^{-1}$

Děkuju za pozornost!