VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

Paralelizace řešení eliptických okrajových úloh pomocí TFETI metody rozložení oblastí

Autor práce: Pavla Jirůtková

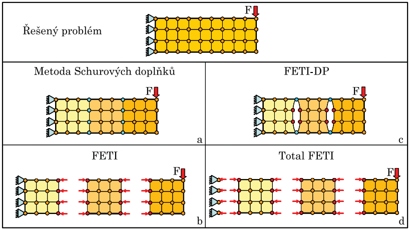
Vedoucí práce: Doc. Ing. Tomáš Kozubek, Ph.D.

Cíle práce

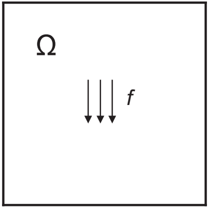
- Seznámit se s metodou TFETI (Total Finite Element Tearing and Interconecting),
- provést její implementaci v Matlabu pro 2D Poissonovu úlohu,
- výslednou aplikaci paralelizovat pomocí Matlab *Distributed Computing serveru*.

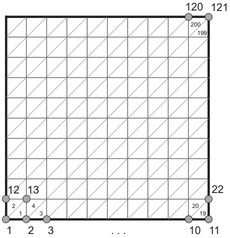
Metody rozložení oblasti

- Princip rozděl a panuj.
- FETI metoda
  - fyzické oddělení podoblastí, zavedeny „lepící“ podmínky - vynuceny Lagrangeovými multiplikátory.
- TFETI metoda
  - „odděleny“ také Dirichletovy okrajové podmínky - vynuceny Lagrangeovými multiplikátory.



Diskretizace a dekompozice oblasti



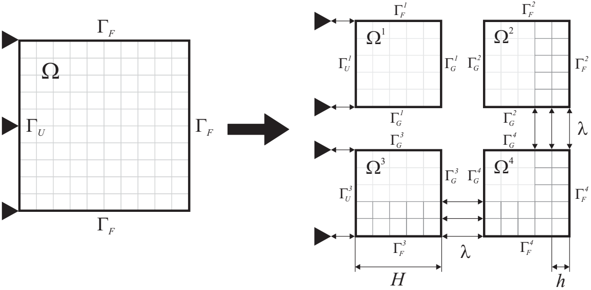


$$-\Delta u(x,y) = f(x,y) \quad \text{pro } \forall (x,y) \in \Omega,$$
$$u(x,y) = 0 \quad \text{pro } \forall (x,y) \in \partial\Omega,$$
$$f \in C(\Omega),\ u \in C^2(\Omega).$$

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}$$

Sestavení soustavy $Ku = f$.

K ... matice tuhosti,
u ... vektor posunutí,
f ... vektor zatížení.



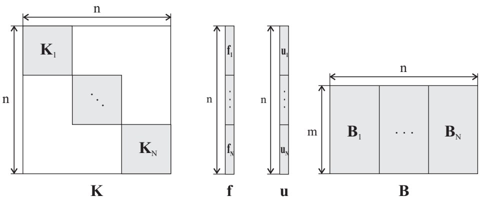
- Γ^U ... hranice s Dirichletovými okrajovými podmínkami,
- Γ^F ... hranice s Neumannovými okrajovými podmínkami,
- λ ... Lagrangeovy multiplikátory,
- H ... krok dekompozice, h ... krok diskretizace.
- Lepící podmínky vynucují: spojitost posunutí na Γ^G, předepsaná posunutí na Γ^U.

Primární problém

Energetická formulace

$$\min_{u} \frac{1}{2}\mathbf{u}^\top \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f}^\top \mathbf{u} \quad \text{za podmínky } \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{c}.$$

K . . . matice tuhosti,
f . . . vektor zatížení,
u . . . vektor posunutí,
B . . . matice vazeb. podmínek,
c . . . vektor vazeb. konstant,



n . . . celkový počet uzlů,
m . . . celkový počet zadaných podmínek.

Ukázka matice B

	1. podoblast								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	1	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
14	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0

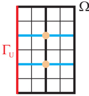
	2. podoblast								
	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	1	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	1	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	1	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	-1	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	3. podoblast								
	19	20	21	22	23	24	25	26	27
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	1	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	1	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
22	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	4. podoblast								
	28	29	30	31	32	33	34	35	36
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	1	0	0	0	0	0	0	0	0
16	1	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	1	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	1	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	1	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	1	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	-1	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	-1	0
26	0	0	0	0	0	0	0	0	-1
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	5. podoblast								
	37	38	39	40	41	42	43	44	45
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	1	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	1	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	1	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	1	0	0	0	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27	0	0	0	0	0	-1	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0	-1

	6. podoblast								
	46	47	48	49	50	51	52	53	54
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	1	0	0	0	0	0	0	0	0
24	1	0	0	0	0	0	0	0	0
25	0	1	0	0	0	0	0	0	0
26	0	0	1	0	0	0	0	0	0
27	0	0	0	1	0	0	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0	1	0	0



Duální problém

- Primární problém není vhodný pro numerické řešení.
- Přechod primárního problému

$$\min_{u} \frac{1}{2}\mathbf{u}^\top \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f}^\top \mathbf{u} \quad \text{za podmínky } \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{c}.$$

k ekvivalenci:

$$L\left(\overline{\mathbf{u}}, \overline{\lambda}\right) = \sup_{\lambda} \inf_{u} \frac{1}{2}\mathbf{u}^\top \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f}^\top \mathbf{u} + \lambda^\top \left(\mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{c}\right)$$

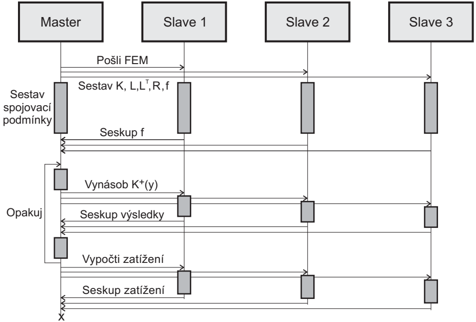
.

- Řešení vede nakonec na:

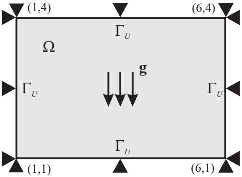
$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^\dagger \left(\mathbf{f} - \mathbf{B}^\top \lambda\right) + \mathbf{R}\alpha.$$

Paralelizace

- Model *master - slave*,
- matlabovský toolbox *Distributed Computing Server*,
- interaktivní paralelní prostředí *pmode*,
- funkce *labSend()*, *labReceive()*, *labindex()*.



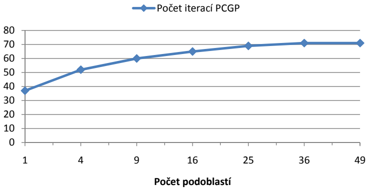
Testování na výpočetním clusteru ComSiO (SPC VŠB-TUO).
Num. škál. . . . počet iterací nezávislý na počtu neznámých.
Par. škál. . . . doba běhu algoritmu nepřímo úměrná počtu využitých procesorů.

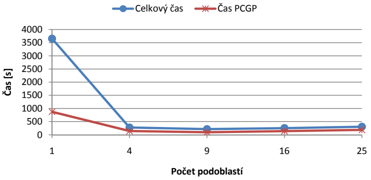


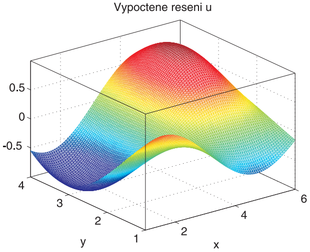
- Zatížení $g = 2\sin(x)\cos(y)$,
- testování numerické škálovatelnosti (181×181 uzlů /podoblast),
- testování paralelní škál. (541×541 uzlů /oblast)

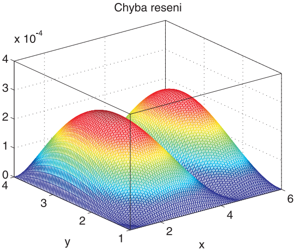
Počet podoblastí	1	4	9	16	25	36	49
Primární proměnné	32 761	131 044	294 849	524 176	819 025	1 179 400	1 605 290
Duální proměnné	720	2 163	4 328	7 215	10 824	15 155	20 208
Dimenze *Ker***K**	1	4	9	16	25	36	49
Počet iterací PCGP	37	52	60	65	69	71	71
Čas PCGP [s]	20,6	42,59	102,3	258,9	963	2 114	4 136
Celkový čas [s]	39,6	91,93	216	470	1 318	2 656	4 891
Chyba řešení	5,09E-05	1,28E-05	5,68E-06	3,19E-06	2,04E-06	1,42E-06	1,05E-06

Příklad


Počet iterací PCGP
80
70
60
50
40
30
20
10
0
1
4
9
16
25
36
49
Počet podoblastí


Celkový čas
Čas PCGP
Čas [s]
4000
3500
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
1
4
9
16
25
Počet podoblastí


Vypoctene reseni u
0.5
0
-0.5
4
3
2
1
y
2
4
6
x


Chyba reseni
x 10-4
4
3
2
1
0
4
3
2
1
y
2
4
6
x

Děkuji za pozornost!