Rekurentní rovnice

V této přednášce se budeme zabývat hledáním posloupností $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, které splňují pro každé přirozené číslo n rekurentní vztah

$$x_{n+k} = a_{k-1}x_{n+k-1} + a_{k-2}x_{n+k-2} + \cdots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n, \tag{1}$$

kde $k \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$. V takovém případě mluvíme o rekurentní rovnici k–tého řádu. Klasickým příkladem takovéto rekurentní rovnice je

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n.$$

Tato rovnice popisuje tzv. Fibonacciho posloupnost. V případě, že požadujeme navíc ještě $x_1 = 1, x_2 = 1$, pak se jedná o posloupnost

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots).$$

Naším cílem bude naučit se z rekurentních vztahů odvodit explicitní vyjádření.

Příklad 1. *Určete explicitní vyjádření pro n–tý člen posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$, která je dána rekurentním vztahem $x_{n+1} = 2x_n$ a další omezující podmínkou $x_1 = 3$.*

Řešení. Snadno se přesvědčíme, že se jedná o posloupnost

$$(3, 6, 12, 24, 48, 96, \ldots)$$

a že hledané explicitní vyjádření je $x_n = 3 \cdot 2^{n-1}$. □

Otázkou ale zůstává, jak jsme na uvedený vztah přišli. Právě touto problematikou se budeme v naší přednášce zabývat.

Řešení rekurentních rovnic:

Uvažujme rovnici (1). K této rovnici napišme tzv. charakteristickou rovnici. Tato rovnice má tvar

$$t^k = a_{k-1}t^{k-1} + a_{k-2}t^{k-2} + \cdots + a_1 t + a_0. \tag{2}$$

Nyní předpokládejme, že již známe řešení rovnice (2). Každému řešení rovnice (2) totiž nějakým způsobem odpovídá jisté řešení rovnice (1). Přesněji platí následující.

- Je-li t_0 jednonásobným reálným kořenem rovnice (2), pak posloupnost $\{t_0^n\}_{n=1}^{+\infty}$ je řešením rovnice (1).
- Je-li t_0 p–násobným reálným kořenem rovnice (2), pak rovnici (1) vyhovují posloupnosti $\{t_0^n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{nt_0^n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\ldots$, $\{n^{p-1}t_0^n\}_{n=1}^{+\infty}$.
- Je-li t_0 jednonásobným nereálným (komplexním) kořenem rovnice (2). Pak je jím automaticky i číslo komplexně sdružené, tedy $\overline{t_0}$. Číslo t_0 je třeba vyjádřit v goniometrickém tvaru, tj. $t_0 = |t_0|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Posloupnosti $\{|t_0|^n\cos n\alpha\}_{n=1}^{+\infty}$ a $\{|t_0|^n\sin n\alpha\}_{n=1}^{+\infty}$ pak vyhovují rovnici (1).
- Je-li t_0 p–násobným komplexním kořenem rovnice (2), pak rovnici (1) vyhovují posloupnosti $\{|t_0|^n\cos n\alpha\}_{n=1}^{+\infty}$ a $\{|t_0|^n\sin n\alpha\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{n|t_0|^n\cos n\alpha\}_{n=1}^{+\infty}$ a $\{n|t_0|^n\sin n\alpha\}_{n=1}^{+\infty}$, $\ldots$, $\{n^{p-1}|t_0|^n\cos n\alpha\}_{n=1}^{+\infty}$ a $\{n^{p-1}|t_0|^n\sin n\alpha\}_{n=1}^{+\infty}$.

Nyní předpokládejme, že A je množina řešení rovnice (2). Podle předchozího každému prvku množiny A jistým způsobem odpovídá řešení rovnice (1). Tak obdržíme množinu B řešení rovnice (1). Obecné řešení rovnice (1) je pak množina všech lineárních kombinací prvků z B.

Příklad 2. *Najděte obecné řešení rekurentní rovnice* $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$.

Řešení. Nejprve řešíme charakteristickou rovnici, tj. rovnici $t^2 = 5t - 6$. Tato rovnice má dva různé reálné kořeny
$$t_1 = 2, \quad t_2 = 3.$$
Podle předchozího těmto kořenům odpovídají posloupnosti $\{2^n\}_{n=1}^{+\infty}$ a $\{3^n\}_{n=1}^{+\infty}$. Obecné řešení dané rekurentní rovnice je tedy
$$x_n = c_1 2^n + c_2 3^n.$$
Jestliže navíc předpokládáme, že např. $x_1 = 2, x_2 = 3$, pak zpětným dosazením do vztahu pro obecné řešení dostaneme soustavu rovnic
$$\begin{aligned} 2c_1 + 3c_2 &= 2, \\ 4c_1 + 9c_2 &= 3. \end{aligned}$$
Po vyřešení obdržíme $c_1 = \frac{3}{2}$ a $c_2 = -\frac{1}{3}$ a tedy explicitní vyjádření n–tého členu posloupnosti bude
$$x_n = \frac{3}{2}2^n - \frac{1}{3}3^n,$$
tj.
$$x_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 3^{n-1}.$$
□

Příklad 3. *Najděte všechny posloupnosti splňující rekurentní vztah* $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n$ *a dodatečné podmínky* $x_1 = 1$ *a* $x_2 = 4$.

Řešení. Charakteristická rovnice má jeden dvojnásobný kořen $t_{1,2} = 2$. Obecné řešení rekurentní rovnice je tedy tvaru
$$x_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n.$$
Z dodatečných podmínek vyplývá, že
$$\begin{aligned} 2c_1 + 2c_2 &= 1, \\ 4c_1 + 8c_2 &= 4, \end{aligned}$$
odkud dostaneme $c_1 = 0$ a $c_2 = \frac{1}{2}$. Celkem tedy máme
$$x_n = n 2^{n-1}.$$
□

Příklad 4. *Najděte všechny posloupnosti splňující rekurentní vztah* $x_{n+2} = 2x_{n+1} - 2x_n$ *a dodatečné podmínky* $x_1 = 1$ *a* $x_2 = 4$.

Řešení. Charakteristická rovnice má dva komplexně sdružené kořeny $t_1 = 1 + i$, $t_2 = 1 - i$. Snadno se přesvědčíme, že $t_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ a tedy obecné řešení rekurentní rovnice je tvaru

$$x_n = c_1\sqrt{2^n}\cos\frac{n\pi}{4} + c_2\sqrt{2^n}\sin\frac{n\pi}{4}.$$

Z dodatečných podmínek vyplývá, že

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1, \\ 2c_2 &= 4, \end{aligned}$$

odkud dostaneme $c_1 = -1$ a $c_2 = 2$. Celkem tedy máme

$$x_n = \sqrt{2^n}\left(2\sin\frac{n\pi}{4} - \cos\frac{n\pi}{4}\right).$$

□

Příklad 5. *Najděte explicitní vyjádření pro n–tý člen Fibonacciho posloupnosti* $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$.

Řešení. Nejedná se o nic jiného, než řešení rekurentní rovnice $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ s dodatečnými předpoklady $x_1 = 1$, $x_2 = 1$.

Řešme tedy uvedenou rekurentní rovnici. Snadno se přesvědčíme, že její charakteristická rovnice má kořeny

$$t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

a tedy obecné řešení naší rekurentní rovnice je

$$x_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Konstanty c_1, c_2 zjistíme z dodatečných podmínek tak, že řešíme odpovídající soustavu rovnic. Po jejím vyřešení obdržíme

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

a tedy hledané vyjádření pro n–tý člen je

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

□

Příklad 6. *Dům má n pater. V každém poschodí bydlí 6 lidí. Vypočtěte, kolik lze vytvořit skupin lidí složených z obyvatel tohoto domu, v nichž se nevyskytují žádní dva lidé bydlící ve stejném poschodí ani ve dvou po sobě jdoucích poschodích.*

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme x_n počet skupin, které vyhovují zadání. Uvědomme si, že přípustná je i prázdná skupina, tj. skupina neobsahující žádného člověka. Zřejmě tedy $x_1 = 7$ a $x_2 = 13$. Jednoduchou kombinatorickou úvahou dojdeme k tomu, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí rekurentní vztah

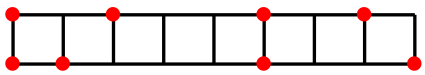
$$x_{n+2} = x_{n+1} + 6x_n.$$

Po vyřešení dostáváme

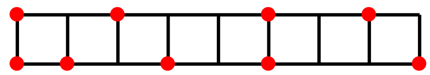
$$x_n = \frac{3^{n+2} - (-2)^{n+2}}{5}.$$

□

Příklad 7. *Uvažujme „žebřík“ skládající se z n čtverců (viz níže). Některé z vrcholů obarvíme. Uděláme to ale tak, aby v každém čtverci byl obarvený alespoň jeden vrchol. Určete počet všech takových obarvení.*



nepřípustné obarvení



přípustné obarvení

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme x_n počet přípustných obarvení. Kombinatorickou úvahou zjistíme, že platí

$$x_{n+2} = 3x_{n+1} + 3x_n, \quad x_1 = 15,\ x_2 = 57,$$

odkud

$$x_n = \left(2 + \frac{3\sqrt{21}}{7}\right)\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)^n + \left(2 - \frac{3\sqrt{21}}{7}\right)\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right)^n.$$

□

Soutěžní problém. *Řešte modifikaci předchozího příkladu takovou, že nebudete barvit vrcholy, ale hrany. Přípustné obarvení bude takové, že v každém čtverci bude obarvena alespoň jedna hrana.*

Řešení. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme x_n počet přípustných obarvení. Kombinatorickou úvahou zjistíme, že platí

$$x_{n+2} = 7x_{n+1} + 4x_n, \quad x_1 = 15,\ x_2 = 113,$$

odkud

$$x_n = \left(1 + \frac{8\sqrt{65}}{65}\right)\left(\frac{7+\sqrt{65}}{2}\right)^n + \left(1 - \frac{8\sqrt{65}}{65}\right)\left(\frac{7-\sqrt{65}}{2}\right)^n.$$

□