Aproximace funkce polynomem na intervalu

Petr Vodstrčil

petr.vodstrcil@vsb.cz

Katedra aplikované matematiky, Fakulta elektrotechniky a informatiky,
Vysoká škola báňská–Technická univerzita Ostrava

ŠKOMAM, 2.2. 2012

Katedra aplikované matematiky

Opakování

Definice

Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Polynomem* p *rozumíme funkci*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Opakování

Definice

Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Polynomem p rozumíme funkci

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Je-li navíc $a_n \neq 0$, říkáme, že n je stupeň polynomu p.

Opakování

Definice

Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Polynomem* p *rozumíme funkci*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Je-li navíc $a_n \neq 0$, *říkáme, že* n *je stupeň polynomu* p.

Příklad

Polynom $p(x) = 0x^3 - 7x^2 + 3x - 4$ *má stupeň* 2

Opakování

Definice

Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Polynomem* p *rozumíme funkci*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Je-li navíc $a_n \neq 0$, *říkáme, že* n *je stupeň polynomu* p.

Příklad

Polynom $p(x) = 0x^3 - 7x^2 + 3x - 4$ *má stupeň* 2 *(tzn. je to kvadratická funkce).*

Úvodní příklady

Příklad

Najděte lineární polynom $p(x) = ax + b$*, jehož graf prochází body* $[1, 2]$ *a* $[7, 5]$.

Úvodní příklady

Příklad

Najděte lineární polynom $p(x) = ax + b$*, jehož graf prochází body* $[1, 2]$ *a* $[7, 5]$.

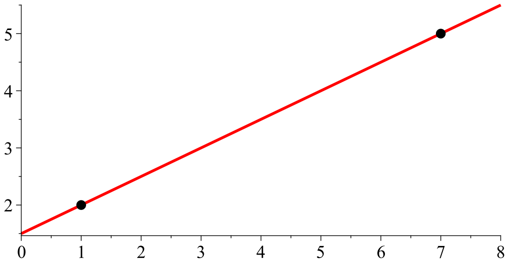
$$\left[p(x) = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2}\right]$$

Úvodní příklady

Příklad

Najděte lineární polynom $p(x) = ax + b$, jehož graf prochází body $[1, 2]$ a $[7, 5]$.

$$\left[p(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right]$$



Úvodní příklady

Příklad

Najděte polynom p *nejvýše druhého stupně (tzn. lineární, nebo kvadratický) takový, aby jeho graf procházel body* $[-2, 9]$, $[-1, 0]$ *a* $[3, 4]$.

Úvodní příklady

Příklad

Najděte polynom p nejvýše druhého stupně (tzn. lineární, nebo kvadratický) takový, aby jeho graf procházel body $[-2, 9]$, $[-1, 0]$ *a* $[3, 4]$.

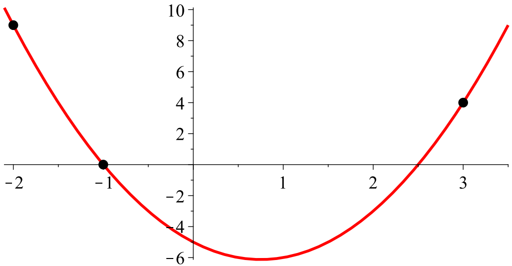
$$\left[p(x) = 2x^2 - 3x - 5\right]$$

Úvodní příklady

Příklad

Najděte polynom p nejvýše druhého stupně (tzn. lineární, nebo kvadratický) takový, aby jeho graf procházel body $[-2, 9]$, $[-1, 0]$ a $[3, 4]$.

$$\left[p(x) = 2x^2 - 3x - 5\right]$$



Zobecnění pro více bodů

Problém

Hledáme polynom stupně nejvýše n ($n \in \mathbb{N}$), jehož graf prochází body

$$\underbrace{[x_0, y_0],\ [x_1, y_1],\ [x_2, y_2],\ \ldots,\ [x_n, y_n]}_{n+1 \text{ bodů}},$$

přičemž předpokládejme, že čísla $x_0, x_1, \ldots, x_n$ jsou po dvou různá.

Zobecnění pro více bodů

Problém

Hledáme polynom stupně nejvýše n ($n \in \mathbb{N}$), jehož graf prochází body

$$\underbrace{[x_0, y_0],\ [x_1, y_1],\ [x_2, y_2],\ \ldots,\ [x_n, y_n]}_{n+1 \text{ bodů}},$$

přičemž předpokládejme, že čísla $x_0, x_1, \ldots, x_n$ jsou po dvou různá.

Výše uvedená úloha je vždy jednoznačně řešitelná (tj. existuje právě jeden polynom uvedených vlastností).

Zobecnění pro více bodů

Problém

Hledáme polynom stupně nejvýše n ($n \in \mathbb{N}$), jehož graf prochází body

$$\underbrace{[x_0, y_0],\ [x_1, y_1],\ [x_2, y_2],\ \dots,\ [x_n, y_n]}_{n+1 \text{ bodů}},$$

přičemž předpokládejme, že čísla x_0, x_1, $\dots$, x_n jsou po dvou různá.

Výše uvedená úloha je vždy jednoznačně řešitelná (tj. existuje právě jeden polynom uvedených vlastností).

Ukážeme si, jak lze uvedený polynom zkonstruovat (jedná se o tzv. Lagrangeův interpolační polynom).

Příklad

Najděte polynom p stupně nejvýše 3, aby v bodech -1, 2 a 4 byl roven nule a v bodě 3 byl roven jedné.

Příklad

Najděte polynom p stupně nejvýše 3, aby v bodech -1, 2 a 4 byl roven nule a v bodě 3 byl roven jedné.

Řešení.

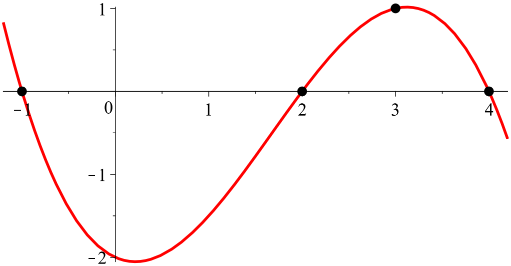
Jedná se o polynom $p(x) = \frac{(x+1)(x-2)(x-4)}{(3+1)(3-2)(3-4)} = -\frac{1}{4}(x+1)(x-2)(x-4) =$
$= -\frac{1}{4}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2.$ □

Příklad

Najděte polynom p stupně nejvýše 3, aby v bodech -1, 2 a 4 byl roven nule a v bodě 3 byl roven jedné.

Řešení.

Jedná se o polynom $p(x) = \frac{(x+1)(x-2)(x-4)}{(3+1)(3-2)(3-4)} = -\frac{1}{4}(x+1)(x-2)(x-4) =$
$= -\frac{1}{4}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2.$ □



Lagrangeův interpolační polynom

Předpokládejme, že jsou dány body $[x_0, y_0]$, $[x_1, y_1]$, ..., $[x_n, y_n]$ takové, že x_0, x_1, ..., x_n jsou navzájem různá čísla (viz výše).

Lagrangeův interpolační polynom

Předpokládejme, že jsou dány body $[x_0, y_0]$, $[x_1, y_1]$, ..., $[x_n, y_n]$ takové, že x_0, x_1, ..., x_n jsou navzájem různá čísla (viz výše).

Pro $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ označme ω_k takový polynom (stupně n), který v bodě x_k nabývá hodnoty 1 a v ostatních bodech x_i $(i \neq k)$ nabývá hodnoty 0 (takový polynom umíme sestrojit – myšlenka je stejná jako v předchozím příkladu).

Lagrangeův interpolační polynom

Předpokládejme, že jsou dány body $[x_0, y_0]$, $[x_1, y_1]$, ..., $[x_n, y_n]$ takové, že x_0, x_1, ..., x_n jsou navzájem různá čísla (viz výše).

Pro $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ označme ω_k takový polynom (stupně n), který v bodě x_k nabývá hodnoty 1 a v ostatních bodech x_i $(i \neq k)$ nabývá hodnoty 0 (takový polynom umíme sestrojit – myšlenka je stejná jako v předchozím příkladu).

Lagrangeův interpolační polynom (stupně nejvýše n) má pak tvar

$$p(x) = y_0 \cdot \omega_0(x) + y_1 \cdot \omega_1(x) + \dots + y_n \cdot \omega_n(x).$$

Vraťme se zpět k tomuto příkladu:

Příklad

Najděte polynom p nejvýše druhého stupně (tzn. lineární, nebo kvadratický) takový, aby jeho graf procházel body $[-2, 9]$, $[-1, 0]$ *a* $[3, 4]$.

$$\left[p(x) = 2x^2 - 3x - 5\right]$$

Vraťme se zpět k tomuto příkladu:

Příklad

Najděte polynom p nejvýše druhého stupně (tzn. lineární, nebo kvadratický) takový, aby jeho graf procházel body $[-2, 9]$, $[-1, 0]$ *a* $[3, 4]$.

$$\left[p(x) = 2x^2 - 3x - 5\right]$$

Řešení.

$$p(x) = 9\cdot\frac{(x+1)(x-3)}{(-2+1)(-2-3)} + 0\cdot\frac{(x+2)(x-3)}{(-1+2)(-1-3)} + 4\cdot\frac{(x+2)(x+1)}{(3+2)(3+1)} =$$

$$= \frac{9}{5}(x+1)(x-3) + \frac{1}{5}(x+2)(x+1) = 2x^2 - 3x - 5.$$

□

Aproximace funkce polynomem

Problém

Mějme danou funkci f definovanou na intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Hledejme polynom p stupně nejvýše n ($n \in \mathbb{N}$) takový, aby na intervalu $\langle a, b\rangle$ „co nejlépe“ aproximoval naši funkci f.

Aproximace funkce polynomem

Problém

Mějme danou funkci f definovanou na intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Hledejme polynom p stupně nejvýše n ($n \in \mathbb{N}$) takový, aby na intervalu $\langle a, b\rangle$ „co nejlépe" aproximoval naši funkci f.

Myšlenka

Interval $\langle a, b\rangle$ rozdělíme na n stejných dílů. Dělící body označme

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

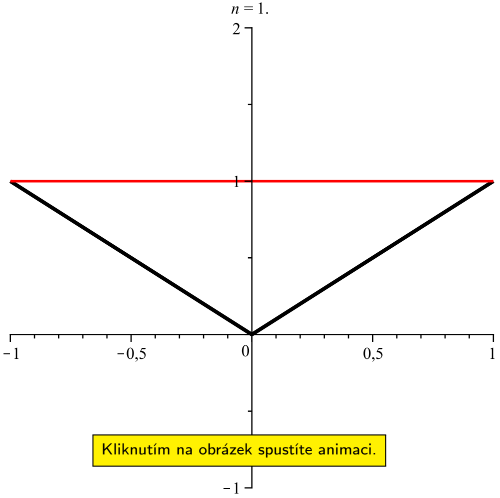
V těchto $n+1$ bodech se podíváme na funkční hodnoty funkce f a poté body

$$[x_0, f(x_0)],\ [x_1, f(x_1)],\ \ldots,\ [x_n, f(x_n)]$$

proložíme Lagrangeův interpolační polynom.

Aproximace Lagrangeovými polynomy

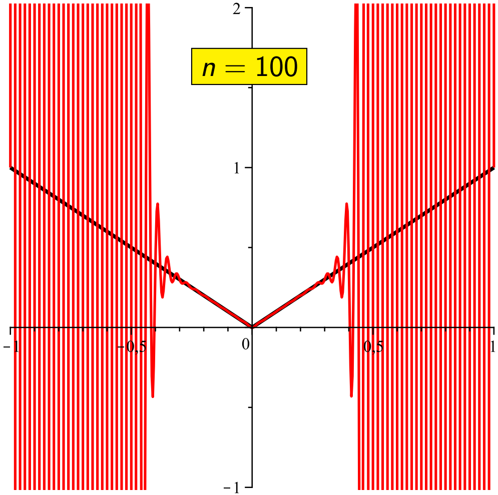
$$f(x) = |x|, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle.$$



Kliknutím na obrázek spustíte animaci.

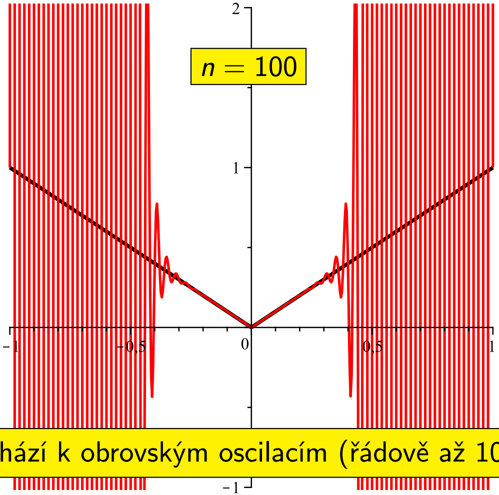
Aproximace Lagrangeovými polynomy

$$f(x) = |x|, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle.$$



Aproximace Lagrangeovými polynomy

$$f(x) = |x|, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle.$$



Dochází k obrovským oscilacím (řádově až 10^{24}).

Vidíme tedy, že Lagrangeovy polynomy se k aproximacím funkce příliš nehodí.

Vidíme tedy, že Lagrangeovy polynomy se k aproximacím funkce příliš nehodí.

Problém je také v tom, že jsme neřekli, co znamená „co nejlépe“ aproximovat (je totiž mnoho možností, jak měřit vzdálenost funkcí).

Vidíme tedy, že Lagrangeovy polynomy se k aproximacím funkce příliš nehodí.

Problém je také v tom, že jsme neřekli, co znamená „co nejlépe“ aproximovat (je totiž mnoho možností, jak měřit vzdálenost funkcí).

Různé definice vzdálenosti dvou funkcí f a g spojitých na intervalu $\langle a, b\rangle$

Vidíme tedy, že Lagrangeovy polynomy se k aproximacím funkce příliš nehodí.

Problém je také v tom, že jsme neřekli, co znamená „co nejlépe“ aproximovat (je totiž mnoho možností, jak měřit vzdálenost funkcí).

Různé definice vzdálenosti dvou funkcí f a g spojitých na intervalu $\langle a, b\rangle$

- $\rho_{\max}(f, g) = \max\limits_{x\in\langle a,b\rangle} |f(x) - g(x)|$ (maximová metrika)

Vidíme tedy, že Lagrangeovy polynomy se k aproximacím funkce příliš nehodí.

Problém je také v tom, že jsme neřekli, co znamená „co nejlépe“ aproximovat (je totiž mnoho možností, jak měřit vzdálenost funkcí).

Různé definice vzdálenosti dvou funkcí f a g spojitých na intervalu $\langle a, b\rangle$

- $\rho_{\max}(f,g) = \max\limits_{x\in\langle a,b\rangle} |f(x) - g(x)|$ (maximová metrika)
- $\rho_1(f,g) = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$ (L^1 metrika)

Vidíme tedy, že Lagrangeovy polynomy se k aproximacím funkce příliš nehodí.

Problém je také v tom, že jsme neřekli, co znamená „co nejlépe“ aproximovat (je totiž mnoho možností, jak měřit vzdálenost funkcí).

Různé definice vzdálenosti dvou funkcí f a g spojitých na intervalu $\langle a, b \rangle$

- $\rho_{\max}(f, g) = \max\limits_{x \in \langle a,b \rangle} |f(x) - g(x)|$ (maximová metrika)
- $\rho_1(f, g) = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x$ (L^1 metrika)
- $\rho_2(f, g) = \sqrt{\int\limits_a^b (f(x) - g(x))^2 \, \mathrm{d}x}$ (L^2 metrika)

Příklad

Je dána funkce $f(x) = x^2$ *definovaná na intervalu* $\langle 0, 1\rangle$. *Najděte polynom* p *stupně nejvýše 1 (tzn. lineární polynom) takový, aby nejlépe aproximoval funkci* f *ve smyslu maximové,* L^1 *a* L^2 *metriky.*

Příklad

Je dána funkce $f(x) = x^2$ definovaná na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Najděte polynom p stupně nejvýše 1 (tzn. lineární polynom) takový, aby nejlépe aproximoval funkci f ve smyslu maximové, L^1 a L^2 metriky.

Řešení.

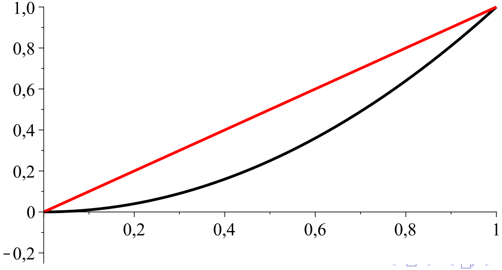
Nejprve se zamysleme, jak by vypadala Lagrangeova aproximace, o které jsme se již zmiňovali. Protože hledáme lineární polynom, potřebujeme dva body ($[0, 0]$ a $[1, 1]$). Z nich bychom dostali Lagrangeův polynom $p(x) = x$.

Příklad

Je dána funkce $f(x) = x^2$ definovaná na intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Najděte polynom p stupně nejvýše 1 (tzn. lineární polynom) takový, aby nejlépe aproximoval funkci f ve smyslu maximové, L^1 a L^2 metriky.

Řešení.

Nejprve se zamysleme, jak by vypadala Lagrangeova aproximace, o které jsme se již zmiňovali. Protože hledáme lineární polynom, potřebujeme dva body ($[0,0]$ a $[1,1]$). Z nich bychom dostali Lagrangeův polynom $p(x) = x$.



Řešení.

Nyní se zamyslíme nad nejlepší maximovou aproximací. Je jasné, že existují lepší aproximace než $p(x) = x$. Není těžké si uvědomit, že

$$\rho_{\max}(x^2, x) = \max_{x \in \langle 0,1 \rangle} |x^2 - x| = \max_{x \in \langle 0,1 \rangle} (x - x^2) = \frac{1}{4}.$$

Řešení.

Nyní se zamyslíme nad nejlepší maximovou aproximací. Je jasné, že existují lepší aproximace než $p(x) = x$. Není těžké si uvědomit, že

$$\rho_{\max}(x^2, x) = \max_{x \in \langle 0,1 \rangle} |x^2 - x| = \max_{x \in \langle 0,1 \rangle} (x - x^2) = \frac{1}{4}.$$

Polynom $p(x) = x - \frac{1}{8}$ má od funkce $f(x) = x^2$ maximovou vzdálenost $\rho_{\max}(f, p) = \frac{1}{8}\ \left(< \frac{1}{4}\right)$.

Řešení.

Nyní se zamyslíme nad nejlepší maximovou aproximací. Je jasné, že existují lepší aproximace než $p(x) = x$. Není těžké si uvědomit, že

$$\rho_{\max}(x^2, x) = \max_{x \in \langle 0,1 \rangle} |x^2 - x| = \max_{x \in \langle 0,1 \rangle} (x - x^2) = \frac{1}{4}.$$

Polynom $p(x) = x - \frac{1}{8}$ má od funkce $f(x) = x^2$ maximovou vzdálenost $\rho_{\max}(f, p) = \frac{1}{8} \ \left(< \frac{1}{4}\right)$.

Pokuste se ukázat, že polynom $p(x) = x - \frac{1}{8}$ je hledanou nejlepší maximovou aproximací.

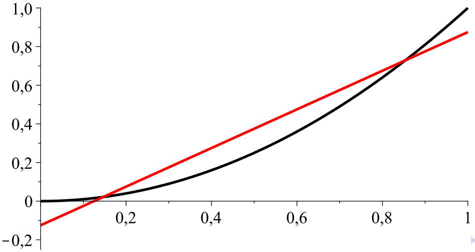
Řešení.

Nyní se zamyslíme nad nejlepší maximovou aproximací. Je jasné, že existují lepší aproximace než $p(x) = x$. Není těžké si uvědomit, že

$$\rho_{\max}(x^2, x) = \max_{x\in\langle 0,1\rangle} |x^2 - x| = \max_{x\in\langle 0,1\rangle} (x - x^2) = \frac{1}{4}.$$

Polynom $p(x) = x - \frac{1}{8}$ má od funkce $f(x) = x^2$ maximovou vzdálenost $\rho_{\max}(f, p) = \frac{1}{8}$ $\left(< \frac{1}{4}\right)$.

Pokuste se ukázat, že polynom $p(x) = x - \frac{1}{8}$ je hledanou nejlepší maximovou aproximací.



Řešení.

Dále lze ukázat:

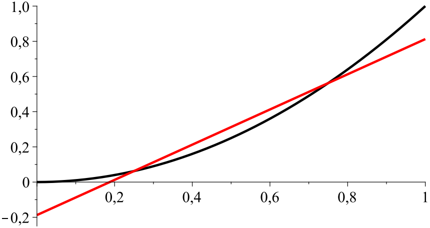
□

Řešení.

Dále lze ukázat:

- Polynom $p(x) = x - \frac{3}{16}$ je nejlepší L^1 aproximací

funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. $\square$



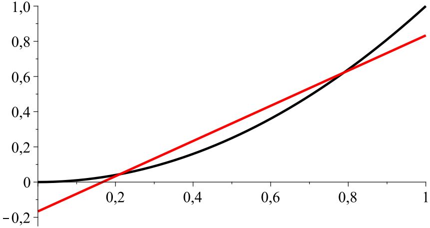
Nejlepší L^1 aproximace

Řešení.

Dále lze ukázat:

- Polynom $p(x) = x - \frac{1}{6}$ je nejlepší L^2 aproximací

funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. $\square$



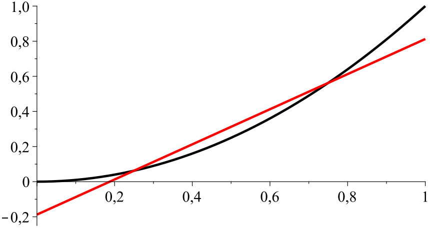
Nejlepší L^2 aproximace

Řešení.

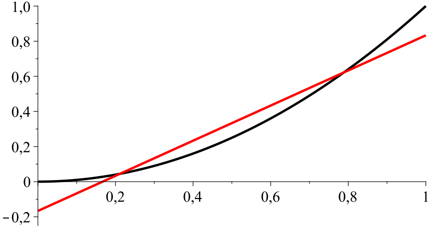
Dále lze ukázat:

- Polynom $p(x) = x - \frac{3}{16}$ je nejlepší L^1 aproximací
- Polynom $p(x) = x - \frac{1}{6}$ je nejlepší L^2 aproximací

funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. $\square$



Nejlepší L^1 aproximace

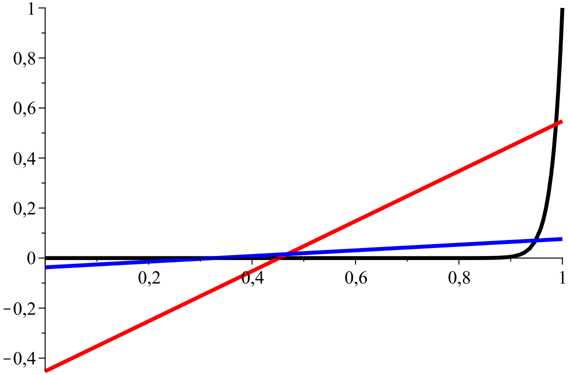


Nejlepší L^2 aproximace

Následující obrázek ukazuje, že aproximace ve smyslu maximové metriky se může od L^2 aproximace výrazně lišit.

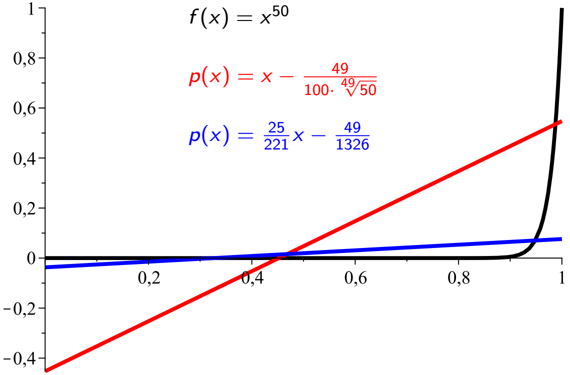
Následující obrázek ukazuje, že aproximace ve smyslu maximové metriky se může od L^2 aproximace výrazně lišit.

Černou barvou je znázorněna původní funkce, červenou barvou její nejlepší lineární maximová aproximace a barvou modrou nejlepší L^2 aproximace.



Následující obrázek ukazuje, že aproximace ve smyslu maximové metriky se může od L^2 aproximace výrazně lišit.

Černou barvou je znázorněna původní funkce, červenou barvou její nejlepší lineární maximová aproximace a barvou modrou nejlepší L^2 aproximace.



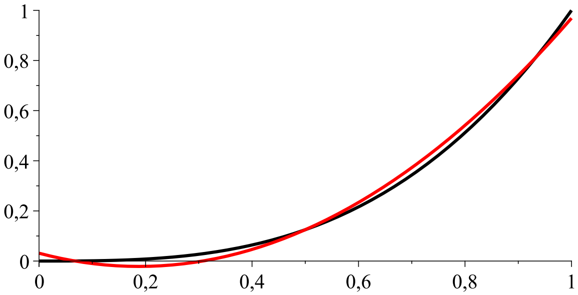
Hledání nejlépe aproximujících polynomů není vůbec jednoduchý úkol. Už při hledání nejlepších lineárních aproximací narážíme na problémy. Pokud bychom hledali nejlepší aproximace vyšších řádů (např. kvadratické), byla by situace daleko komplikovanější.

Hledání nejlépe aproximujících polynomů není vůbec jednoduchý úkol. Už při hledání nejlepších lineárních aproximací narážíme na problémy. Pokud bychom hledali nejlepší aproximace vyšších řádů (např. kvadratické), byla by situace daleko komplikovanější.

Lze např. ukázat, že nejlepší kvadratickou maximovou aproximací funkce $f(x) = x^3$ (na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$) je polynom $p(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{16}x + \frac{1}{32}$. Nalézt tento polynom však není nic jednoduchého.

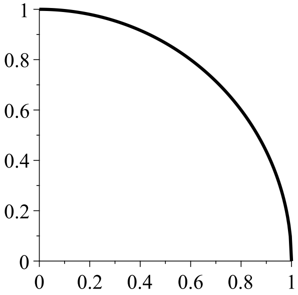
Hledání nejlépe aproximujících polynomů není vůbec jednoduchý úkol. Už při hledání nejlepších lineárních aproximací narážíme na problémy. Pokud bychom hledali nejlepší aproximace vyšších řádů (např. kvadratické), byla by situace daleko komplikovanější.

Lze např. ukázat, že nejlepší kvadratickou maximovou aproximací funkce $f(x) = x^3$ (na intervalu $\langle 0, 1\rangle$) je polynom $p(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{16}x + \frac{1}{32}$. Nalézt tento polynom však není nic jednoduchého.



Soutěžní problém

Je dána funkce $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, kde $x \in \langle 0, 1\rangle$. Grafem f je tedy čtvrtina jednotkové kružnice (v prvním kvadrantu). Najděte lineární polynom p, který (na intervalu $\langle 0, 1\rangle$) nejlépe aproximuje funkci f ve smyslu maximové metriky.

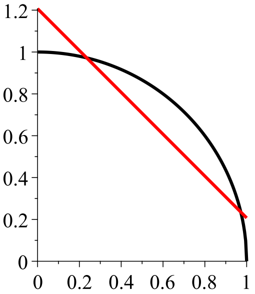


Výsledek

Hledaný polynom je

$$p(x) = -x + \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

Navíc platí $\rho_{max}(f, p) = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$.



Děkuji za pozornost !!!

Děkuji za pozornost !!!