

Asymptotické hustoty

Pavel Jahoda

1. února 2012

Jak velkou část všech přirozených čísel tvoří sudá čísla?

Intuitivní odpověď:

Jak velkou část všech přirozených čísel tvoří sudá čísla?

Intuitivní odpověď: $\frac{1}{2}$

Jak velkou část všech přirozených čísel tvoří sudá čísla?

Intuitivní odpověď: $\frac{1}{2}$

Přirozených čísel i všech sudých čísel je nekonečně mnoho (mohutnost obou těchto množin je $\aleph_0$) a zlomek $\frac{\infty}{\infty}$ není definován. Nemůžeme proto poměr počtu prvků množiny přirozených čísel a počtu prvků množiny všech sudých čísel určit tímto způsobem.

Jak velkou část všech přirozených čísel tvoří sudá čísla?

1 2 3 4 5 ...

Jak velkou část všech přirozených čísel tvoří sudá čísla?

1 2 3 4 5 ...

$$\frac{A(5)}{5} = \frac{2}{5} = 0,4$$

Jak velkou část všech přirozených čísel tvoří sudá čísla?

1 2 3 4 5 6 ...

$$\frac{A(5)}{5} = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$\frac{A(6)}{6} = \frac{3}{6} = 0,5$$

Jak velkou část všech přirozených čísel tvoří sudá čísla?

1 2 3 4 5 6 7 ...

$$\frac{A(5)}{5} = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$\frac{A(6)}{6} = \frac{3}{6} = 0,5$$

$$\frac{A(7)}{7} = \frac{3}{7} \doteq 0,43$$

Jak velkou část všech přirozených čísel tvoří sudá čísla?

1 2 3 4 5 6 7 8 ...

$$\frac{A(5)}{5} = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$\frac{A(6)}{6} = \frac{3}{6} = 0,5$$

$$\frac{A(7)}{7} = \frac{3}{7} \doteq 0,43$$

$$\frac{A(8)}{8} = \frac{4}{8} = 0,5$$

Jak velkou část všech přirozených čísel tvoří sudá čísla?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 ...

$$\frac{A(5)}{5} = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$\frac{A(6)}{6} = \frac{3}{6} = 0,5$$

$$\frac{A(7)}{7} = \frac{3}{7} \doteq 0,43$$

$$\frac{A(8)}{8} = \frac{4}{8} = 0,5$$

$$\frac{A(9)}{9} = \frac{4}{9} = 0,\overline{44}$$

Jak velkou část všech přirozených čísel tvoří sudá čísla?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10...

$$\frac{A(5)}{5} = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$\frac{A(6)}{6} = \frac{3}{6} = 0,5$$

$$\frac{A(7)}{7} = \frac{3}{7} \doteq 0,43$$

$$\frac{A(8)}{8} = \frac{4}{8} = 0,5$$

$$\frac{A(9)}{9} = \frac{4}{9} = 0,\overline{44}$$

$$\frac{A(10)}{10} = \frac{5}{10} = 0,5$$

Jak velkou část všech přirozených čísel tvoří sudá čísla?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10...

$$\frac{A(5)}{5} = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$\frac{A(6)}{6} = \frac{3}{6} = 0,5$$

$$\frac{A(7)}{7} = \frac{3}{7} \doteq 0,43$$

$$\frac{A(8)}{8} = \frac{4}{8} = 0,5$$

$$\frac{A(9)}{9} = \frac{4}{9} = 0,\overline{44}$$

$$\frac{A(10)}{10} = \frac{5}{10} = 0,5$$

Zdá se, že tato posloupnost čísel se limitně bude blížit jedné polovině.

Jak velkou část všech přirozených čísel tvoří sudá čísla?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n} = ?$$

Jak velkou část všech přirozených čísel tvoří sudá čísla?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n} = ?$$

Obecně, kolik sudých čísel je menších, nebo rovných danému n ?

Jak velkou část všech přirozených čísel tvoří sudá čísla?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n} = ?$$

Obecně, kolik sudých čísel je menších, nebo rovných danému n ?

$$2k \leq n$$

Jak velkou část všech přirozených čísel tvoří sudá čísla?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n} = ?$$

Obecně, kolik sudých čísel je menších, nebo rovných danému n ?

$$2k \leq n$$

$$k \leq \frac{n}{2}$$

Jak velkou část všech přirozených čísel tvoří sudá čísla?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n} = ?$$

Obecně, kolik sudých čísel je menších, nebo rovných danému n ?

$$2k \leq n$$

$$k \leq \frac{n}{2}$$

$$k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

Jak velkou část všech přirozených čísel tvoří sudá čísla?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n} = ?$$

Obecně, kolik sudých čísel je menších, nebo rovných danému n ?

$$2k \leq n$$

$$k \leq \frac{n}{2}$$

$$k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

Proto

$$\frac{A(n)}{n} = \frac{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}{n}.$$

$$\frac{\frac{n}{2}-1}{n} \leq \frac{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}{n} \leq \frac{\frac{n}{2}+1}{n}$$

$$\frac{\frac{n}{2}-1}{n} \leq \frac{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}{n} \leq \frac{\frac{n}{2}+1}{n}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq \frac{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}{n} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$$

$$\frac{\frac{n}{2}-1}{n} \leq \frac{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}{n} \leq \frac{\frac{n}{2}+1}{n}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq \frac{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}{n} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 \frac{\frac{n}{2}-1}{n} & \leq & \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n} & \leq & \frac{\frac{n}{2}+1}{n} \\
 \\
 \frac{1}{2} - \frac{1}{n} & \leq & \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n} & \leq & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 \frac{1}{2} & & & & \frac{1}{2}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 \frac{\frac{n}{2}-1}{n} & \leq & \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n} & \leq & \frac{\frac{n}{2}+1}{n} \\
 \frac{1}{2} - \frac{1}{n} & \leq & \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n} & \leq & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 \frac{\frac{n}{2}-1}{n} & \leq & \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n} & \leq & \frac{\frac{n}{2}+1}{n} \\
 \\
 \frac{1}{2} - \frac{1}{n} & \leq & \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n} & \leq & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2}
 \end{array}$$

Proto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{array}{ccccc}
 \frac{\frac{n}{2}-1}{n} & \leq & \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n} & \leq & \frac{\frac{n}{2}+1}{n} \\
 \\
 \frac{1}{2} - \frac{1}{n} & \leq & \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n} & \leq & \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2}
 \end{array}$$

Proto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n} = \frac{1}{2}.$$

Toto číslo nazýváme *asymptotickou hustotou* množiny sudých čísel.

Zobecnění

Zjistili jsme:

$$A_2 = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Zobecnění

Zjistili jsme:

$$A_2 = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\} \Rightarrow d(A_2) = \frac{1}{2}$$

Zobecnění

Zjistili jsme:

$$A_2 = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\} \Rightarrow d(A_2) = \frac{1}{2}$$

$$A_3 = \{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Zobecnění

Zjistili jsme:

$$A_2 = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\} \Rightarrow d(A_2) = \frac{1}{2}$$

$$A_3 = \{3k \mid k \in \mathbb{N}\} \Rightarrow d(A_3) = \frac{1}{3}$$

Zobecnění

Zjistili jsme:

$$A_2 = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\} \Rightarrow d(A_2) = \frac{1}{2}$$

$$A_3 = \{3k \mid k \in \mathbb{N}\} \Rightarrow d(A_3) = \frac{1}{3}$$

$$\vdots$$

$$A_c = \{ck \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Zobecnění

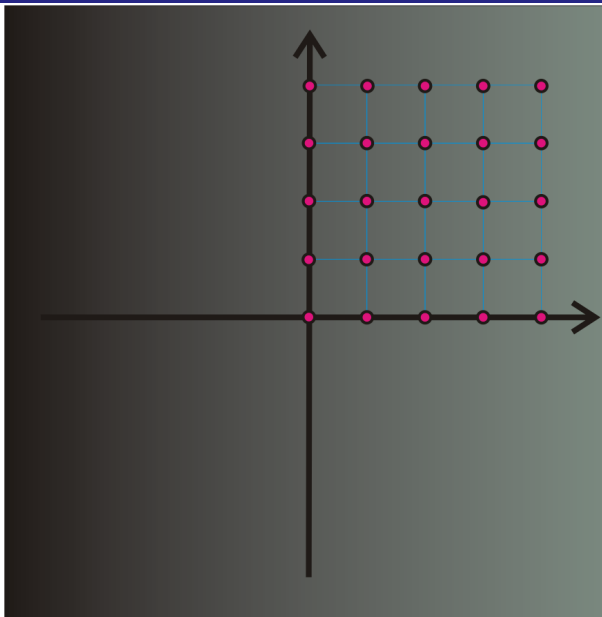
Zjistili jsme:

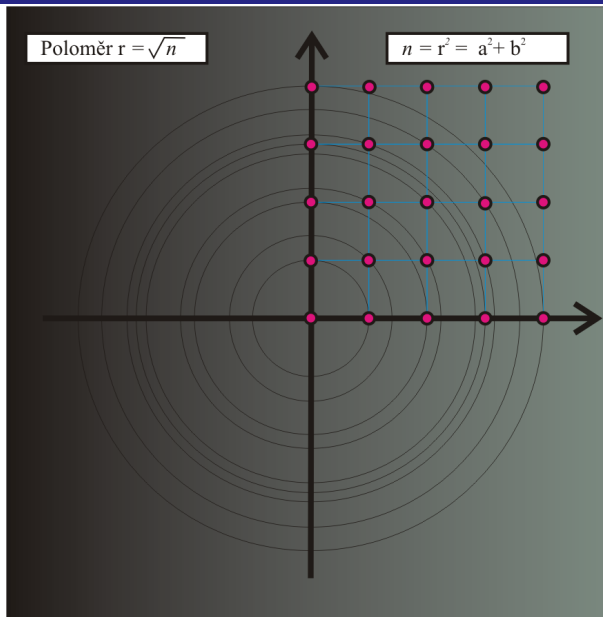
$$A_2 = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\} \Rightarrow d(A_2) = \frac{1}{2}$$

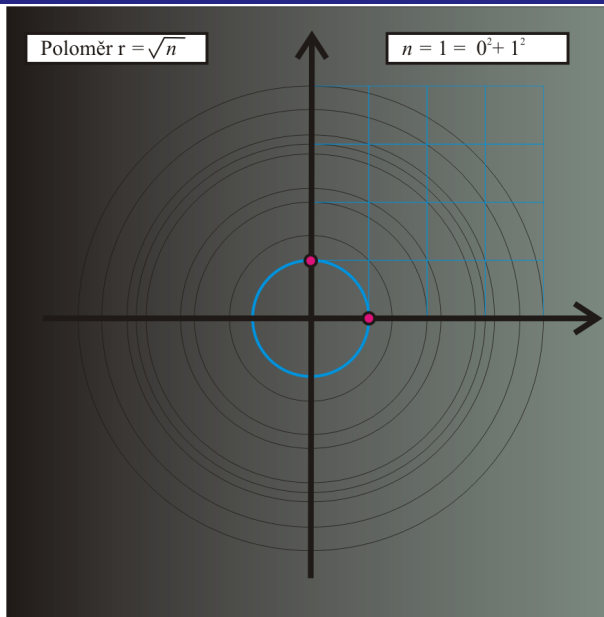
$$A_3 = \{3k \mid k \in \mathbb{N}\} \Rightarrow d(A_3) = \frac{1}{3}$$

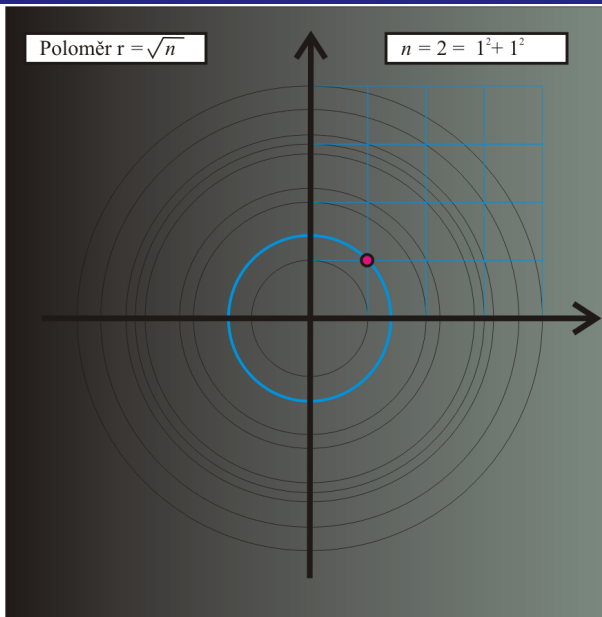
$$\vdots$$

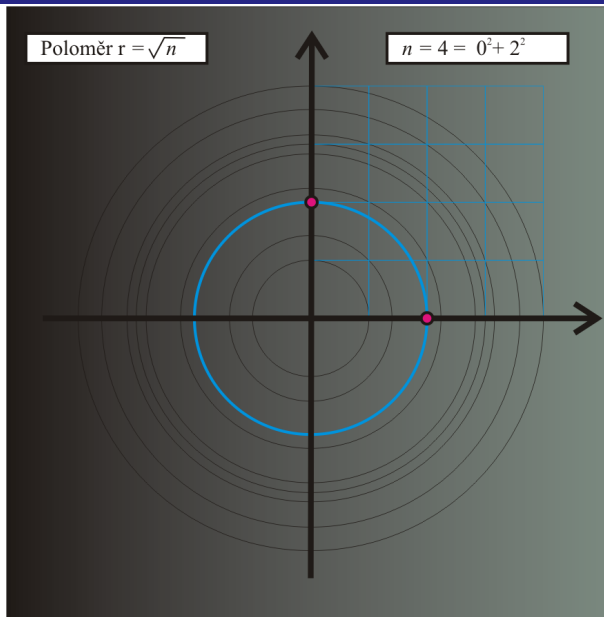
$$A_c = \{ck \mid k \in \mathbb{N}\} \Rightarrow d(A_c) = \frac{1}{c}$$

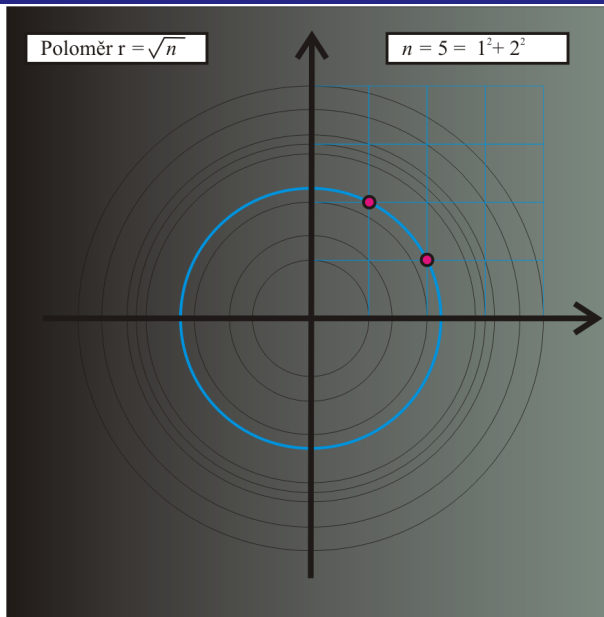


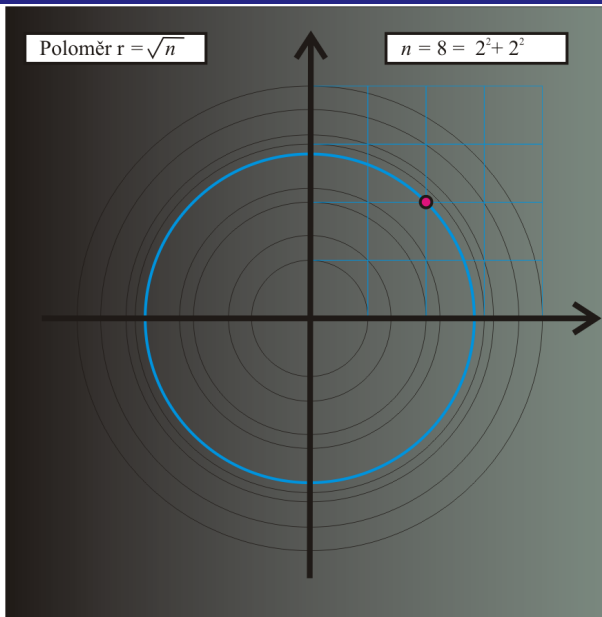


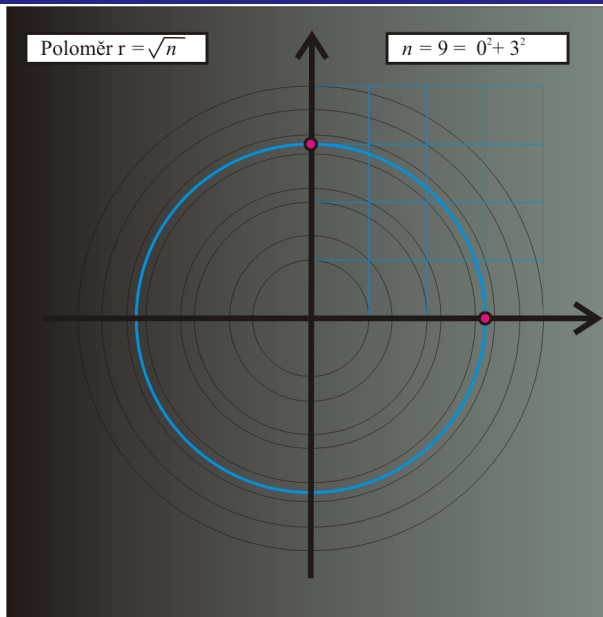


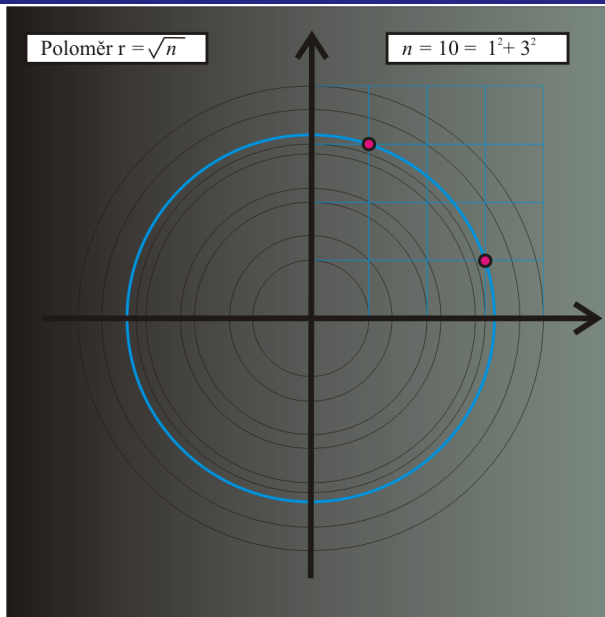


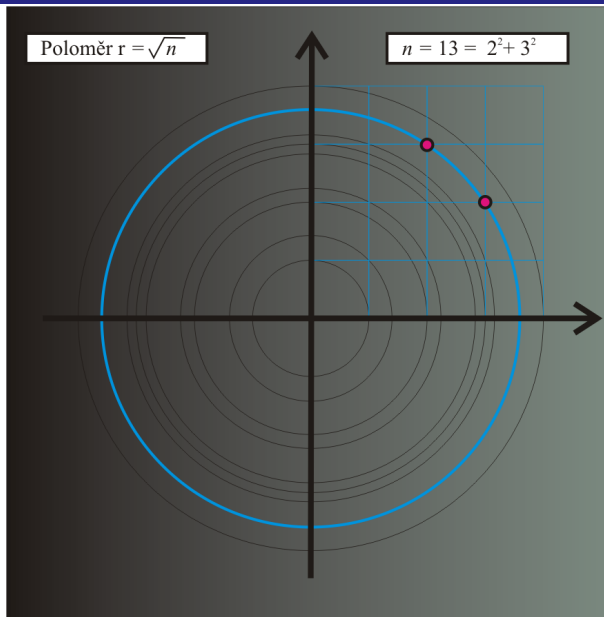


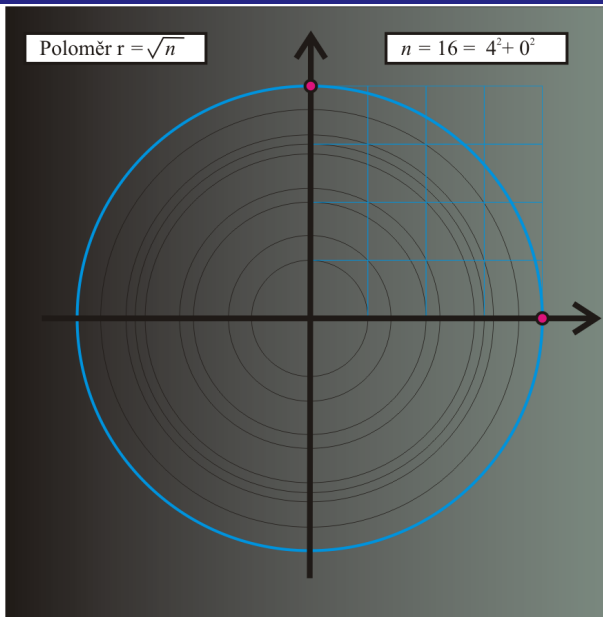


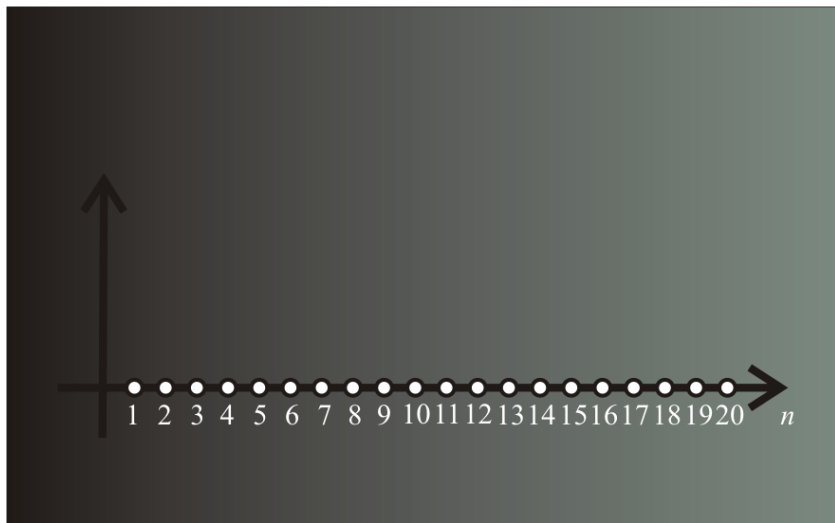


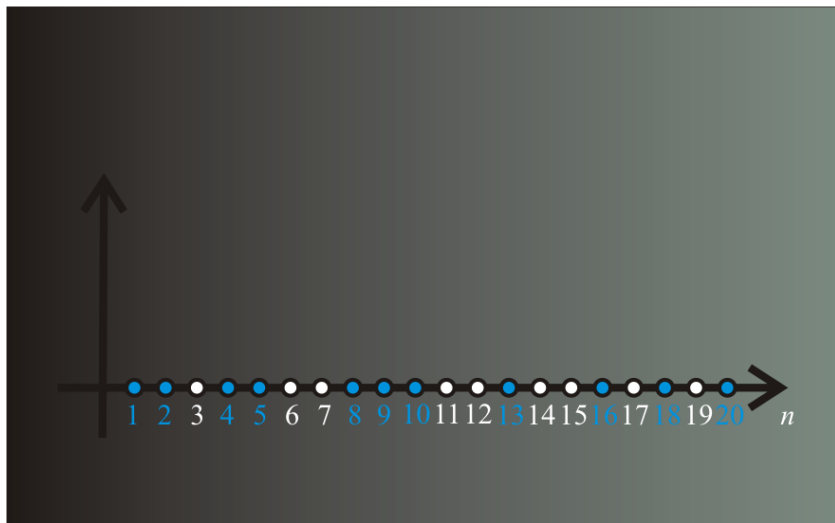




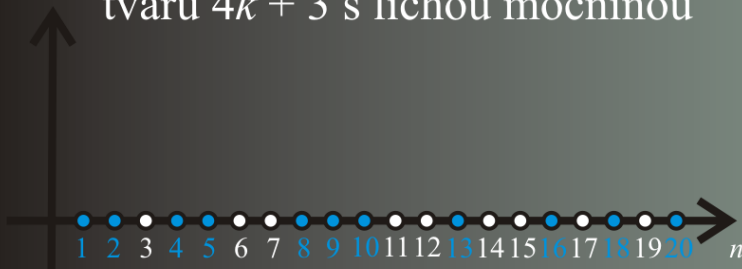








Číslo n nesmí ve svém kanonickém rozkladu obsahovat prvočísla ve tvaru $4k + 3$ s lichou mocninou



Poměr $\frac{A(n)}{n} = \frac{1}{1} = 1$

$$n = l$$



Poměr $\frac{A(n)}{n} = \frac{2}{2} = 1$

$$n = 2$$



Poměr $\frac{A(n)}{n} = \frac{2}{3} \doteq 0,67$

$$n = 3$$



Poměr $\frac{A(n)}{n} = \frac{3}{4} = 0,75$

$n = 4$



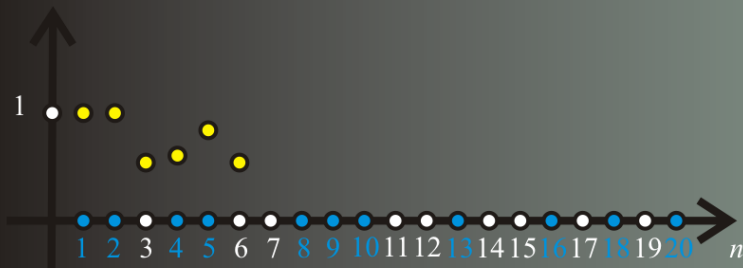
Poměr $\frac{A(n)}{n} = \frac{4}{5} = 0,8$

$$n = 5$$



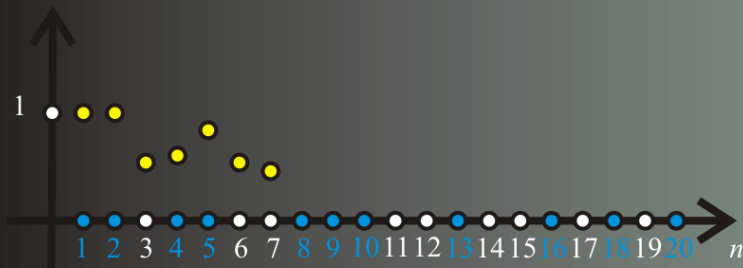
Poměr $\frac{A(n)}{n} = \frac{4}{6} \doteq 0,67$

$$n = 6$$



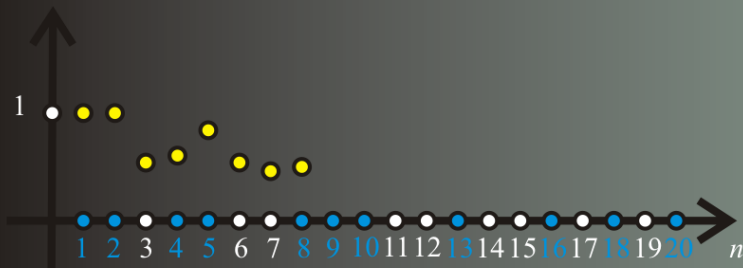
Poměr $\frac{A(n)}{n} = \frac{4}{7} \doteq 0,57$

$$n = 7$$



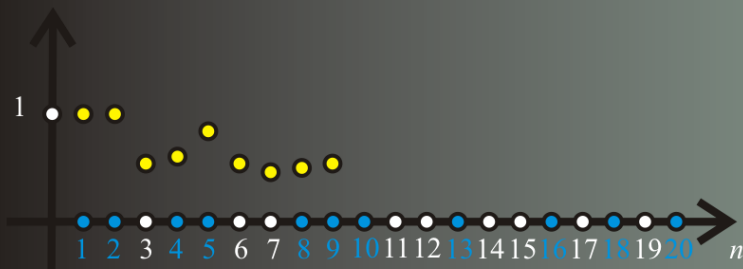
Poměr $\frac{A(n)}{n} = \frac{5}{8} \doteq 0,63$

$n = 8$



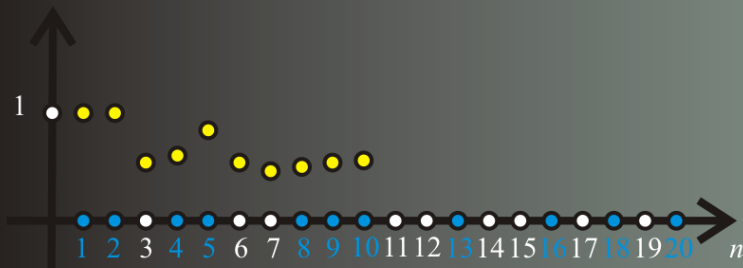
Poměr $\frac{A(n)}{n} = \frac{6}{9} \doteq 0,67$

$n = 9$

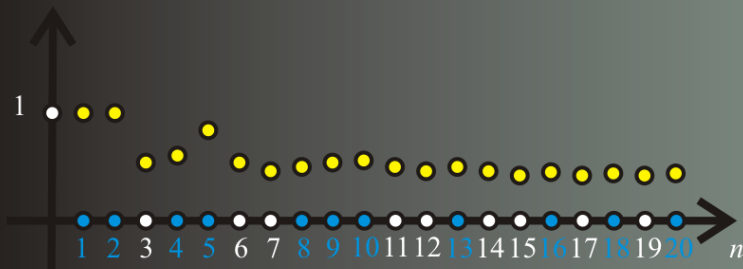


Poměr $\frac{A(n)}{n} = \frac{7}{10} = 0,7$

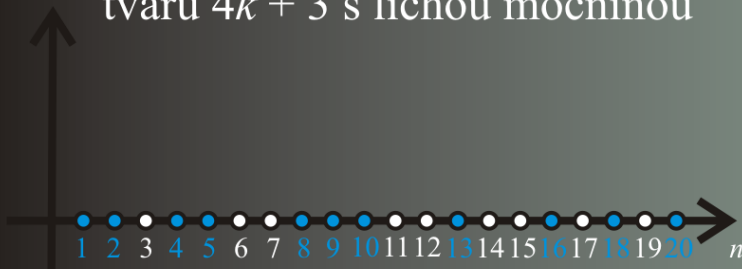
$$n = 10$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n} = ?$$



Číslo n nesmí ve svém kanonickém rozkladu obsahovat prvočísla ve tvaru $4k + 3$ s lichou mocninou



Číslo n určitě nesmí ve svém kanonickém rozkladu obsahovat prvočíslo $3 = 4 \cdot 0 + 3$ s lichou mocninou, aby bylo možné jej napsat jako součet dvou druhých mocnin celých čísel.

Číslo n určitě nesmí ve svém kanonickém rozkladu obsahovat prvočíslo $3 = 4 \cdot 0 + 3$ s lichou mocninou, aby bylo možné jej napsat jako součet dvou druhých mocnin celých čísel.



Číslo n musí ve svém kanonickém rozkladu obsahovat prvočíslo 3 se sudou mocninou (včetně nuly), aby bylo možné jej napsat jako součet dvou druhých mocnin celých čísel.

Číslo n určitě nesmí ve svém kanonickém rozkladu obsahovat prvočíslo $3 = 4 \cdot 0 + 3$ s lichou mocninou, aby bylo možné jej napsat jako součet dvou druhých mocnin celých čísel.



Číslo n musí ve svém kanonickém rozkladu obsahovat prvočíslo 3 se sudou mocninou (včetně nuly), aby bylo možné jej napsat jako součet dvou druhých mocnin celých čísel.

Označíme-li množinu součtů dvou druhých mocnin celých čísel D , pak

$$D \subseteq D_3 =$$

Číslo n určitě nesmí ve svém kanonickém rozkladu obsahovat prvočíslo $3 = 4 \cdot 0 + 3$ s lichou mocninou, aby bylo možné jej napsat jako součet dvou druhých mocnin celých čísel.



Číslo n musí ve svém kanonickém rozkladu obsahovat prvočíslo 3 se sudou mocninou (včetně nuly), aby bylo možné jej napsat jako součet dvou druhých mocnin celých čísel.

Označíme-li množinu součtů dvou druhých mocnin celých čísel D , pak

$$D \subseteq D_3 = \{3^{2k}m \mid k \in \mathbb{N}_0; m \in \mathbb{N}, 3 \nmid m\}$$

Číslo n určitě nesmí ve svém kanonickém rozkladu obsahovat prvočíslo $3 = 4 \cdot 0 + 3$ s lichou mocninou, aby bylo možné jej napsat jako součet dvou druhých mocnin celých čísel.



Číslo n musí ve svém kanonickém rozkladu obsahovat prvočíslo 3 se sudou mocninou (včetně nuly), aby bylo možné jej napsat jako součet dvou druhých mocnin celých čísel.

Označíme-li množinu součtů dvou druhých mocnin celých čísel D , pak

$$D \subseteq D_3 = \{3^{2k}m \mid k \in \mathbb{N}_0; m \in \mathbb{N}, 3 \nmid m\}$$

$$D \subseteq D_7 = \{7^{2k}m \mid k \in \mathbb{N}_0; m \in \mathbb{N}, 7 \nmid m\}$$

⋮

Proto pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$D \subseteq \bigcap_{i=1}^k D_{p_i},$$

kde $D_{p_i} = \{p_i^{2k} m \mid k \in \mathbb{N}_0; m \in \mathbb{N}, p_i \nmid m\}$.

Proto pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\emptyset \subseteq D \subseteq \bigcap_{i=1}^k D_{p_i},$$

kde $D_{p_i} = \{p_i^{2k} m \mid k \in \mathbb{N}_0; m \in \mathbb{N}, p_i \nmid m\}$.

Proto pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\emptyset \subseteq D \subseteq \bigcap_{i=1}^k D_{p_i},$$

kde $D_{p_i} = \{p_i^{2k} m \mid k \in \mathbb{N}_0; m \in \mathbb{N}, p_i \nmid m\}$. Jestliže existují asymptotické hustoty výše uvedených množin, pak platí

$$d(\emptyset) \leq d(D) \leq d\left(\bigcap_{i=1}^k D_{p_i}\right).$$

Asymptotická hustota množiny D_3

$$D_3 = \{3^{2k}m \mid k \in \mathbb{N}_0; m \in \mathbb{N}, 3 \nmid m\}.$$

Asymptotická hustota množiny D_3

$D_3 = \{3^{2k}m \mid k \in \mathbb{N}_0; m \in \mathbb{N}, 3 \nmid m\}$. Označme

$$S_0 = \{3^0 m \mid m \in \mathbb{N}\}$$

Asymptotická hustota množiny D_3

$D_3 = \{3^{2k}m \mid k \in \mathbb{N}_0; m \in \mathbb{N}, 3 \nmid m\}$. Označme

$$S_0 = \{3^0 m \mid m \in \mathbb{N}\} \Rightarrow d(S_0) = 1$$

Asymptotická hustota množiny D_3

$D_3 = \{3^{2k}m \mid k \in \mathbb{N}_0; m \in \mathbb{N}, 3 \nmid m\}$. Označme

$$\begin{aligned} S_0 &= \{3^0 m \mid m \in \mathbb{N}\} & \Rightarrow & d(S_0) = 1 \\ L_0 &= \{3^1 m \mid m \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Asymptotická hustota množiny D_3

$D_3 = \{3^{2k}m \mid k \in \mathbb{N}_0; m \in \mathbb{N}, 3 \nmid m\}$. Označme

$$\begin{array}{llll} S_0 & = & \{3^0 m \mid m \in \mathbb{N}\} & \Rightarrow d(S_0) = 1 \\ L_0 & = & \{3^1 m \mid m \in \mathbb{N}\} & \Rightarrow d(L_0) = \frac{1}{3} \end{array}$$

Asymptotická hustota množiny D_3

$D_3 = \{3^{2k}m \mid k \in \mathbb{N}_0; m \in \mathbb{N}, 3 \nmid m\}$. Označme

$$\begin{aligned} S_0 &= \{3^0 m \mid m \in \mathbb{N}\} \Rightarrow d(S_0) = 1 \\ L_0 &= \{3^1 m \mid m \in \mathbb{N}\} \Rightarrow d(L_0) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$R_0 = S_0 - L_0$$

Asymptotická hustota množiny D_3

$D_3 = \{3^{2k}m \mid k \in \mathbb{N}_0; m \in \mathbb{N}, 3 \nmid m\}$. Označme

$$S_0 = \{3^0 m \mid m \in \mathbb{N}\} \Rightarrow d(S_0) = 1$$

$$L_0 = \{3^1 m \mid m \in \mathbb{N}\} \Rightarrow d(L_0) = \frac{1}{3}$$

$$R_0 = S_0 - L_0 \Rightarrow d(R_0) = 1 - \frac{1}{3}$$

Asymptotická hustota množiny D_3

$$D_3 = \{3^{2k}m \mid k \in \mathbb{N}_0; m \in \mathbb{N}, 3 \nmid m\}.$$

Asymptotická hustota množiny D_3

$D_3 = \{3^{2k}m \mid k \in \mathbb{N}_0; m \in \mathbb{N}, 3 \nmid m\}$. Označme

$$S_1 = \{3^2m \mid m \in \mathbb{N}\}$$

Asymptotická hustota množiny D_3

$D_3 = \{3^{2k}m \mid k \in \mathbb{N}_0; m \in \mathbb{N}, 3 \nmid m\}$. Označme

$$S_1 = \{3^2m \mid m \in \mathbb{N}\} \Rightarrow d(S_1) = \frac{1}{3^2}$$

Asymptotická hustota množiny D_3

$D_3 = \{3^{2k}m \mid k \in \mathbb{N}_0; m \in \mathbb{N}, 3 \nmid m\}$. Označme

$$\begin{aligned} S_1 &= \{3^2m \mid m \in \mathbb{N}\} & \Rightarrow & d(S_1) = \frac{1}{3^2} \\ L_1 &= \{3^{2+1}m \mid m \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Asymptotická hustota množiny D_3

$D_3 = \{3^{2k}m \mid k \in \mathbb{N}_0; m \in \mathbb{N}, 3 \nmid m\}$. Označme

$$\begin{array}{llll} S_1 & = & \{3^2m \mid m \in \mathbb{N}\} & \Rightarrow d(S_1) = \frac{1}{3^2} \\ L_1 & = & \{3^{2+1}m \mid m \in \mathbb{N}\} & \Rightarrow d(L_1) = \frac{1}{3^3} \end{array}$$

Asymptotická hustota množiny D_3

$D_3 = \{3^{2k}m \mid k \in \mathbb{N}_0; m \in \mathbb{N}, 3 \nmid m\}$. Označme

$$\begin{aligned} S_1 &= \{3^{2k}m \mid m \in \mathbb{N}\} & \Rightarrow & d(S_1) = \frac{1}{3^2} \\ L_1 &= \{3^{2k+1}m \mid m \in \mathbb{N}\} & \Rightarrow & d(L_1) = \frac{1}{3^3} \end{aligned}$$

$$R_1 = S_1 - L_1$$

Asymptotická hustota množiny D_3

$D_3 = \{3^{2k}m \mid k \in \mathbb{N}_0; m \in \mathbb{N}, 3 \nmid m\}$. Označme

$$\begin{aligned} S_1 &= \{3^{2k}m \mid m \in \mathbb{N}\} & \Rightarrow & d(S_1) = \frac{1}{3^2} \\ L_1 &= \{3^{2k+1}m \mid m \in \mathbb{N}\} & \Rightarrow & d(L_1) = \frac{1}{3^3} \end{aligned}$$

$$R_1 = S_1 - L_1 \quad \Rightarrow \quad d(R_1) = \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3}$$

Asymptotická hustota množiny D_3

$$D_3 = \{3^{2k}m \mid k \in \mathbb{N}_0; m \in \mathbb{N}, 3 \nmid m\}.$$

Asymptotická hustota množiny D_3

$D_3 = \{3^{2k}m \mid k \in \mathbb{N}_0; m \in \mathbb{N}, 3 \nmid m\}$. Označme

$$S_k = \{3^{2k}m \mid m \in N\}$$

Asymptotická hustota množiny D_3

$D_3 = \{3^{2k}m \mid k \in \mathbb{N}_0; m \in \mathbb{N}, 3 \nmid m\}$. Označme

$$S_k = \{3^{2k}m \mid m \in \mathbb{N}\} \Rightarrow d(S_k) = \frac{1}{3^{2k}}$$

Asymptotická hustota množiny D_3

$D_3 = \{3^{2k}m \mid k \in \mathbb{N}_0; m \in \mathbb{N}, 3 \nmid m\}$. Označme

$$\begin{aligned} S_k &= \{3^{2k}m \mid m \in N\} & \Rightarrow & d(S_k) = \frac{1}{3^{2k}} \\ L_k &= \{3^{2k+1}m \mid m \in N\} \end{aligned}$$

Asymptotická hustota množiny D_3

$D_3 = \{3^{2k}m \mid k \in \mathbb{N}_0; m \in \mathbb{N}, 3 \nmid m\}$. Označme

$$\begin{aligned} S_k &= \{3^{2k}m \mid m \in \mathbb{N}\} & \Rightarrow & d(S_k) = \frac{1}{3^{2k}} \\ L_k &= \{3^{2k+1}m \mid m \in \mathbb{N}\} & \Rightarrow & d(L_k) = \frac{1}{3^{2k+1}} \end{aligned}$$

Asymptotická hustota množiny D_3

$D_3 = \{3^{2k}m \mid k \in \mathbb{N}_0; m \in \mathbb{N}, 3 \nmid m\}$. Označme

$$\begin{aligned} S_k &= \{3^{2k}m \mid m \in \mathbb{N}\} & \Rightarrow & d(S_k) = \frac{1}{3^{2k}} \\ L_k &= \{3^{2k+1}m \mid m \in \mathbb{N}\} & \Rightarrow & d(L_k) = \frac{1}{3^{2k+1}} \end{aligned}$$

$$R_k = S_k - L_k$$

Asymptotická hustota množiny D_3

$D_3 = \{3^{2k}m \mid k \in \mathbb{N}_0; m \in \mathbb{N}, 3 \nmid m\}$. Označme

$$\begin{aligned} S_k &= \{3^{2k}m \mid m \in \mathbb{N}\} & \Rightarrow & d(S_k) = \frac{1}{3^{2k}} \\ L_k &= \{3^{2k+1}m \mid m \in \mathbb{N}\} & \Rightarrow & d(L_k) = \frac{1}{3^{2k+1}} \end{aligned}$$

$$R_k = S_k - L_k \quad \Rightarrow \quad d(R_k) = \frac{1}{3^{2k}} - \frac{1}{3^{2k+1}}$$

Asymptotická hustota množiny D_3

Protože $D_3 = \{3^{2k}m \mid k \in \mathbb{N}_0; m \in \mathbb{N}, 3 \nmid m\}$, pro každé $r \in \mathbb{N}$ platí

Asymptotická hustota množiny D_3

Protože $D_3 = \{3^{2k}m \mid k \in \mathbb{N}_0; m \in \mathbb{N}, 3 \nmid m\}$, pro každé $r \in \mathbb{N}$ platí

$$\bigcup_{k=0}^r R_k \subseteq D_3$$

Asymptotická hustota množiny D_3

Protože $D_3 = \{3^{2k}m \mid k \in \mathbb{N}_0; m \in \mathbb{N}, 3 \nmid m\}$, pro každé $r \in \mathbb{N}$ platí

$$\bigcup_{k=0}^r R_k \subseteq D_3 \subseteq \bigcup_{k=0}^r R_k \cup \{3^{2r+1}m \mid m \in \mathbb{N}\}$$

Asymptotická hustota množiny D_3

Protože $D_3 = \{3^{2k}m \mid k \in \mathbb{N}_0; m \in \mathbb{N}, 3 \nmid m\}$, pro každé $r \in \mathbb{N}$ platí

$$\bigcup_{k=0}^r R_k \subseteq D_3 \subseteq \bigcup_{k=0}^r R_k \cup \{3^{2r+1}m \mid m \in \mathbb{N}\}$$

$$\sum_{k=0}^r \left(\frac{1}{3^{2k}} - \frac{1}{3^{2k+1}} \right) \leq d(D_3) \leq \sum_{k=0}^r \left(\frac{1}{3^{2k}} - \frac{1}{3^{2k+1}} \right) + \frac{1}{3^{2r+1}}$$

Asymptotická hustota množiny D_3

Protože $D_3 = \{3^{2k}m \mid k \in \mathbb{N}_0; m \in \mathbb{N}, 3 \nmid m\}$, pro každé $r \in \mathbb{N}$ platí

$$\bigcup_{k=0}^r R_k \subseteq D_3 \subseteq \bigcup_{k=0}^r R_k \cup \{3^{2r+1}m \mid m \in \mathbb{N}\}$$

$$\sum_{k=0}^r \left(\frac{1}{3^{2k}} - \frac{1}{3^{2k+1}} \right) \leq d(D_3) \leq \sum_{k=0}^r \left(\frac{1}{3^{2k}} - \frac{1}{3^{2k+1}} \right) + \frac{1}{3^{2r+1}}$$

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) \sum_{k=0}^r \frac{1}{3^{2k}} \leq d(D_3) \leq \left(1 - \frac{1}{3}\right) \sum_{k=0}^r \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{3^{2r+1}}$$

Asymptotická hustota množiny D_3

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) \sum_{k=0}^r \frac{1}{3^{2k}} \leq d(D_3) \leq \left(1 - \frac{1}{3}\right) \sum_{k=0}^r \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{3^{2r+1}}$$

Asymptotická hustota množiny D_3

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) \sum_{k=0}^r \frac{1}{3^{2k}} \leq d(D_3) \leq \left(1 - \frac{1}{3}\right) \sum_{k=0}^r \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{3^{2r+1}}$$

Při $r \rightarrow \infty$

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{1 - \frac{1}{3^2}} \leq d(D_3) \leq \left(1 - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{1 - \frac{1}{3^2}} + 0$$

Asymptotická hustota množiny D_3

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) \sum_{k=0}^r \frac{1}{3^{2k}} \leq d(D_3) \leq \left(1 - \frac{1}{3}\right) \sum_{k=0}^r \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{3^{2r+1}}$$

Při $r \rightarrow \infty$

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{1 - \frac{1}{3^2}} \leq d(D_3) \leq \left(1 - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{1 - \frac{1}{3^2}} + 0$$

Odtud

$$d(D_3) = \frac{3}{3+1} \quad .$$

Asymptotická hustota množiny D_3

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) \sum_{k=0}^r \frac{1}{3^{2k}} \leq d(D_3) \leq \left(1 - \frac{1}{3}\right) \sum_{k=0}^r \frac{1}{3^{2k}} + \frac{1}{3^{2r+1}}$$

Při $r \rightarrow \infty$

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{1 - \frac{1}{3^2}} \leq d(D_3) \leq \left(1 - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{1 - \frac{1}{3^2}} + 0$$

Odtud

$$d(D_3) = \frac{3}{3+1} \quad d(D_{p_i}) = \frac{p_i}{p_i+1}.$$

Asymptotická hustota množiny D

Dříve jsme odvodili:

$$d(\emptyset) \leq d(D) \leq d\left(\bigcap_{i=1}^k D_{p_i}\right).$$

Asymptotická hustota množiny D

Dříve jsme odvodili:

$$d(\emptyset) \leq d(D) \leq d\left(\bigcap_{i=1}^k D_{p_i}\right).$$

Dá se dokázat:

$$0 \leq d(D) \leq \prod_{i=1}^k d(D_{p_i}).$$

Asymptotická hustota množiny D

Dříve jsme odvodili:

$$d(\emptyset) \leq d(D) \leq d\left(\bigcap_{i=1}^k D_{p_i}\right).$$

Dá se dokázat:

$$0 \leq d(D) \leq \prod_{i=1}^k d(D_{p_i}).$$

$$0 \leq d(D) \leq \prod_{i=1}^k \frac{p_i}{p_i + 1}.$$

Asymptotická hustota množiny D

Dříve jsme odvodili:

$$d(\emptyset) \leq d(D) \leq d\left(\bigcap_{i=1}^k D_{p_i}\right).$$

Dá se dokázat:

$$0 \leq d(D) \leq \prod_{i=1}^k d(D_{p_i}).$$

$$0 \leq d(D) \leq \prod_{i=1}^k \frac{p_i}{p_i + 1}.$$

$$0 \leq d(D) \leq 0.$$