Katedra
aplikované matematiky

Počítačová cvičení Škola matematického modelování 2012

Petr Beremlijski, Marie Sadowská, Matyáš Theuer

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Počítačová cvičení
Škola matematického modelování

Petr Beremlijski, Marie Sadowská, Matyáš Theuer

Katedra aplikované matematiky

Katedra aplikované matematiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
VŠB - Technická univerzita Ostrava
2012

Poděkování

Autoři textu děkují Doc. RNDr. Jiřímu Bouchalovi, Ph.D. za pozorné přečtení a řadu cenných připomínek k tomuto textu.

Tato akce byla podpořena z prostředků projektu Matematika pro inženýry 21. století (registrační číslo CZ.1.07/2.2.00/07.0332). Jeho webová stránka je http://mi21.vsb.cz.

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Cvičení 1: Matlab – nástroj pro matematické modelování

Abychom se mohli věnovat numerickému řešení matematických úloh, potřebujeme vhodné prostředí, které nám to umožní. A tak jako fyzik či chemik mají svou laboratoř nebo patolog pitevnu, mají i numeričtí matematici svojí Maticovou laboratoř[1] - Matlab. Podrobně se tomuto pracovnímu prostředí a jeho příkazům věnuje přiložený Matlabovský slabikář [5] nebo také úvod textu [3]. My si v tomto textu uvedeme pouze stručný přehled matlabovských proměnných a příkazů, kterým se budeme věnovat.

Prostředí

- *help, demos, intro, who, whos, clear, size, length*

Proměnné

- Skaláry
- Vektory
- Matice

Příkazy

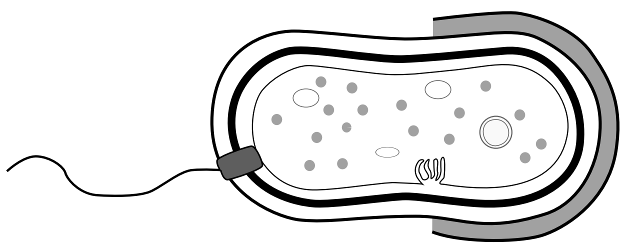
- Skalární funkce - *sin, cos, tan, cot, exp, log, abs, sqrt, round*
- Vektorové funkce a generování vektorů - *max, min, sort*
- Maticové funkce a generování matic - *det, rand, ones, zeros, eye*
- Skalární operace - $+,\ -,\ *,\ /, \hat{}$
- Maticové a vektorové operace - $+,\ -,\ *,\ '$(transponování), $\backslash$ ($A\backslash v = x \Leftrightarrow Ax = v$)
  Operace „po prvcích" - $.*$, $.\hat{}$, $./$
- 2D grafika (vykreslení grafů funkcí jedné proměnné) - *plot, hold on, hold off, figure*
- 3D grafika (vykreslení grafů funkcí dvou proměnných) - *meshgrid, mesh, contour, hold on, hold off, figure*
- Řídící příkazy - *if* (podmíněný příkaz), *for, while* (příkazy cyklu se známým počtem opakování a podmínkou na začátku)
- Relace a logické operace - $<,\ >,\ <=,\ >=,\ ==,\ \sim=,\ \&,\ |,\ \sim$
- Skripty a funkce - *function*

[1] MATrix LABoratory

Vše si nyní vyzkoušíme při řešení následujících úloh.

Úkol 1.1 Legenda říká, že když byly vymyšleny šachy, tak se místnímu vládci (někde v Asii) tato hra tak zalíbila, že se rozhodl odměnit jejich vynálezce a za odměnu mu nabídl cokoliv, co si bude přát. Vynálezce mu na to odpověděl, že si nepřeje nic jiného než několik zrnek rýže. A aby se to dobře počítalo, tak že chce za první políčko šachovnice dostat jedno zrnko rýže, za druhé dvě zrnka rýže, za třetí čtyři zrnka, za čtvrté osm zrnek a tak dále. Tedy ať za každé další pole šachovnice dostane dvojnásobný počet zrnek rýže ve srovnání s polem předchozím. Kolik kilogramů rýže žádal, jestliže 30 000 zrnek rýže váží 1 kilogram?

Úkol 1.2 Bakterie Yersinia pestis, která způsobuje onemocnění morem, se v příznivých podmínkách dělí jednou za 100 minut. Jak dlouho by trvalo, pokud by nedocházelo k úhynu bakterií a mohly se bez omezení množit, než by jejich hmotnost překročila hmotnost Země? Předpokládejme, že v čase $t = 0$ žije jedna bakterie Yersinia pestis. Předpokládejme, že hmotnost jedné bakterie je $6 \cdot 10^{-15}$ kg a hmotnost Země je $6 \cdot 10^{24}$ kg.



Obrázek 1: Bakterie

Úkol 1.3 Sestrojte grafy následujících funkcí:

- $f(x) := x^2$
- $f(x) := \sqrt{1 - x^2}$
- $f(x) := x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$
- $f(x) := |x|$

Úkol 1.4 Sestrojte grafy následujících funkcí:

- $f(x, y) := x^2 + y^2$
- $f(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$
- $f(x, y) := (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$
- $f(x, y) := \sqrt{|xy|}$

Nechť jsou dány prvky $x_1, x_2, \ldots, x_n$ z dané množiny $\mathcal{F}$. `Aritmetický vektor` (n-rozměrný) je uspořádaná n-tice čísel, jejíž prvky se nazývají složky. Tyto uspořádané n-tice budeme zapisovat do hranatých závorek do řádků nebo sloupců:

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{nebo } x := [x_1, x_2, \ldots, x_n] .$$

Nechť jsou dány prvky $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ z dané množiny $\mathcal{F}$. `Matice typu` (m, n) je obdélníková tabulka

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

která má $m \cdot n$ prvků a_{ij} uspořádaných do m řádků r_i^A a n sloupců s_j^A, takže

$$A = \begin{bmatrix} r_1^A \\ \vdots \\ r_m^A \end{bmatrix} = \left[s_1^A, \ldots, s_n^A\right],$$

$$r_i^A = [a_{i1}, \ldots, a_{in}] , \; s_j^A = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}.$$

Stručně píšeme též $A = [a_{ij}]$.

Nyní si zavedeme operaci násobení matic. K tomu ale potřebujeme nejdříve definovat násobení matice a vektoru. Součinem matice $A = [a_{ij}]$ typu (m, n) a sloupcového vektoru $x = [x_i]$ o n složkách nazýváme sloupcový vektor y o m složkách definovaný předpisem

$$y = Ax = x_1 s_1^A + \cdots + x_n s_n^A.$$

Rozepsáním této definice po složkách dostaneme

$$y_i = [Ax]_i = a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n = r_i^A x.$$

Teď můžeme přejít k násobení matic. Jestliže A je matice typu (m, ℓ) a B je matice typu (ℓ, n), pak `součin matic` A `a` B je matice AB typu (m, n) definovaná předpisem

$$AB = \left[As_1^B, \ldots, As_n^B\right].$$

Rozepíšeme-li si definici násobení matic po složkách, dostaneme

$$[AB]_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{i\ell}b_{\ell j} = r_i^A \cdot s_j^B.$$

Mnohem více detailů o vektorech, maticích a operacích s nimi lze nalézt v [2].

Připomeneme si dále některé pojmy z oblasti geometrických zobrazení. `Geometrickým zobrazením` nazveme zobrazení, které každému bodu A geometrického útvaru U přiřazuje právě jeden bod A' geometrického útvaru U'. Bod A je tzv. vzor a bod A' se označuje jako obraz. Podívejme se blíže na tři konkrétní typy zobrazení, a to stejnolehlost, rotaci a posunutí.

Stejnolehlost

Mějme bod $S \in \mathbb{R}^n$, kde $n \in \{2, 3\}$. Geometrické zobrazení, při němž obrazem bodu S je bod S a obrazem každého $A \in \mathbb{R}^n$, $A \neq S$, je takový bod $A' \in \mathbb{R}^n$, že pro vektor SA' platí $SA' = \kappa SA$, kde $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ je pevně zvolené, se nazývá `stejnolehlostí` (homotetií). Bod S nazýváme středem stejnolehosti a κ koeficientem stejnolehlosti. Stejnolehlost s $\kappa := -1$ je středovou souměrností.

Rotace

Otočení (`rotace`) v rovině je geometrické zobrazení, které je charakterizováno tím, že spojnice všech bodů s pevně zvoleným bodem S, tzv. středem otočení, se změní o stejný úhel φ, tzv. úhel otočení, a vzdálenost bodů od středu otočení zůstává nezměněna.

Posunutí

`Posunutí` (translace) je geometrické zobrazení, které je charakterizováno tím, že všechny body transformované množiny bodů změní své kartézské souřadnice o stejnou hodnotu, tj. ke každému bodu přičteme stejný vektor posunutí.

Nyní si ukážeme, jak lze pomocí elementárních maticových operací zapsat výše uvedená zobrazení. Zapišme souřadnice vzoru geometrického zobrazení, tj. bodu z $\mathbb{R}^2$ či $\mathbb{R}^3$, do sloupcového vektoru. Pokud vzorem zobrazení je více bodů, zapíšeme je jako sloupce matice P. Obraz bodů ve stejnolehlosti s koeficientem κ a středem v počátku zapíšeme jako součin transformační matice T typu (n, n), kde n je dimenze prostoru, ve kterém zobrazujeme (2 nebo 3), a matice P. Matice T má všechny prvky na hlavní diagonále rovny koeficientu stejnolehlosti κ. Všechny další prvky jsou nulové. Obrazy bodů v rotaci s úhlem otočení φ a středem otočení v počátku zapíšeme jako součin transformační matice R typu (n, n) a matice P, kde například pro $n = 2$ je

$$R := \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Posunutí s vektorem posunutí p realizujeme tak, že ke každému sloupci matice P přičteme sloupcový vektor p.

Úkol 2.1 Implementujte geometrická zobrazení - stejnolehlost, rotaci a posunutí. Nalezněte obraz trojúhelníku s vrcholy $[1,-1]$, $[2,0]$ a $[1,1]$ ve stejnolehlosti se středem v počátku a s koeficientem stejnolehlosti $\kappa := 2$, v rotaci se středem otočení v počátku a úhlem otočení $\varphi := \pi/3$ a v posunutí s vektorem posunutí $p := [-2,-1]$. Zobrazte vzor a jednotlivé obrazy (použijte např. matlabovskou funkci `fill`).

Úkol 2.2 Vytvořte funkci, která transformuje zadaný bod podle vstupních parametrů `transformovany_bod = funkce(bod,` κ`,` φ`,` p`)`. Středy stejnolehlosti a rotace umístěte do počátku. Tuto funkci použijte pro vytvoření rutiny, která transformuje n-úhelník zadaný maticí P (sloupce matice jsou tvořeny vektory souřadnic vrcholů).

Úkol 2.3 Vytvořte rutinu, která v každé iteraci s danou pravděpodobností provede transformaci bodu z předchozí iterace podle následující tabulky:

pravděpodobnost	κ (stejnolehlost)	φ (rotace)	p (posunutí)
0,85	0,85	$-0{,}05$	$[0, 1{,}5]$
0,07	0,3	1	$[0, 1{,}5]$
0,07	0,25	-1	$[0, 0{,}5]$
0,01	transformace definovaná maticí		$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0{,}15 \end{bmatrix}$

Jako počáteční bod volte $[0{,}5, 0{,}5]$.

Úkol 2.3 byl převzat a upraven z [1].

V tomto cvičení vytvoříme matematický model, který popisuje pohyb matematického kyvadla v závislosti na čase. Abychom mohli takovýto model sestrojit, potřebujeme pracovat se speciálním typem rovnice – s tzv. diferenciální rovnicí. Navíc si povíme, jak lze diferenciální rovnice numericky řešit.

Obyčejná diferenciální rovnice 1. řádu

`Obyčejnou diferenciální rovnicí 1. řádu` rozumíme rovnici tvaru

$$y'(t) = f(t, y(t)), \tag{1}$$

kde $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ je zadaná funkce. `Řešením této rovnice na otevřeném intervalu` (a, b) rozumíme každou funkci $\bar{y}: (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ takovou, že pro všechna $t \in (a, b)$ platí

$$\bar{y}'(t) = f(t, \bar{y}(t)).$$

Například funkce $\bar{y}(t) := t$, $t \in (0, +\infty)$, je řešením diferenciální rovnice

$$y'(t) = y(t)/t \tag{2}$$

na intervalu $(0, +\infty)$. Jiným řešením této rovnice na intervalu $(0, +\infty)$ je například funkce $\bar{y}(t) := 2t$, $t \in (0, +\infty)$, či $\bar{y}(t) := 3t$, $t \in (0, +\infty)$. Není težké ukázat, že každá funkce $\bar{y}(t) := kt$, $t \in (0, +\infty)$, $k \in \mathbb{R}$, je řešením diferenciální rovnice $y'(t) = y(t)/t$ na intervalu $(0, +\infty)$. Úloha (2) má tedy na $(0, +\infty)$ nekonečně mnoho řešení. Zkusme navíc přidat k naší rovnici například podmínku $y(1) = 2$, tj. chceme nalézt funkci, která řeší naši rovnici a navíc její funkční hodnota pro $t = 1$ je rovna 2. Lze ukázat, že taková úloha již má na $(0, +\infty)$ pouze jediné řešení, a to $\bar{y}(t) := 2t$, $t \in (0, +\infty)$.

Úlohu, najít řešení obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu, které má navíc splňovat tzv. počáteční podmínku $y(t_0) = y_0$, nazýváme `Cauchyovou úlohou`[2] a zapisujeme ji takto:

$$\left.\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)), \\ y(t_0) &= y_0, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

kde $t_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

Pokud má funkce $f(t, y(t))$ speciální tvar[3], pak existují metody, jak analyticky řešit výše popsanou Cauchyovu úlohu. Často však analytické řešení nalézt nelze nebo by jeho nalezení bylo příliš náročné. V takovém případě se nabízí použití některé z numerických metod pro přibližné řešení diferenciálních rovnic 1. řádu s počáteční podmínkou. Podívejme

[2]Je pojmenována podle francouzského matematika Augustina Louise Cauchyho (1789 – 1857).

[3]Například f závisí lineárně na y, tj. $f(t, y) = ay + b$, kde a a b jsou reálná čísla.

se nyní na jednu z těchto metod – `Eulerovu metodu`[4]. O funkci f budeme předpokládat, že je v množině $D := \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : \ t_0 \le t\}$ spojitá a že je v D spojitá i derivace této funkce podle proměnné y.

Eulerova metoda

Eulerova metoda je nejjednodušší způsob numerického řešení Cauchyových úloh. Eulerova metoda nám aproximuje řešení Cauchyovy úlohy (3) na intervalu $\langle t_0, t_N\rangle$. Metoda využívá aproximace derivace funkce y v bodě t pomocí `diference` y v tomto bodě

$$y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h},$$

kde h je „malé“ ($0 < h \ll 1$).

Použijeme-li diferenci k aproximaci $y'(t)$ v rovnici úlohy (3), dostáváme vztah

$$y(t+h) \approx y(t) + hf(t, y(t)). \tag{4}$$

Dále zvolme „dostatečně malé“ $h > 0$ a $N \in \mathbb{N}$ a sestrojme body

$$t_0,\ t_1 := t_0 + h,\ t_2 := t_0 + 2h,\ \ldots,\ t_N := t_0 + Nh.$$

Ze vztahu (4) a počáteční podmínky pak dostaneme rekurzivní formuli pro aproximaci y_k hodnot přesného řešení $y(t_k)$, $k = 0, 1, \ldots, N$:

$$\boxed{\begin{array}{l} y_0 = y(t_0), \\ y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k),\ k = 0, 1, \ldots, N. \end{array}} \tag{5}$$

Lze ukázat, že chyba aproximace řešení pomocí Eulerovy metody v bodě t_1 je přímo úměrná druhé mocnině velikosti kroku h. Chyba aproximace řešení v bodě t_N je přímo úměrná velikosti h.[5]

Soustava diferenciálních rovnic 1. řádu

V případě, že v rovnici (1) jsou funkce $y = (y_1, \ldots, y_n)$ a $f = (f_1, \ldots, f_n)$ vektorové, tzn. že $y\colon\ (a, b) \mapsto \mathbb{R}^n$ a $f\colon\ \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^n$, pak můžeme tuto rovnici přepsat do tvaru

$$\left.\begin{array}{rcl} y_1'(t) & = & f_1(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)), \\ y_2'(t) & = & f_2(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)), \\ & \vdots & \\ y_n'(t) & = & f_n(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)), \end{array}\right\} \tag{6}$$

[4]Publikoval ji švýcarský matematik a fyzik Leonhard Euler (1707 – 1783) v roce 1768.

[5]Uvedená aproximace pomocí Eulerovy metody je řádu $\mathcal{O}(h)$. To znamená, že absolutní chyba nahrazení klesá řádově stejně jako h.

který nazýváme `soustavou obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu`. Pokud má navíc systém (6) splňovat počáteční podmínky $y(t_0) = (y_{10}, \ldots, y_{n0})$, kde $y_{k0} \in \mathbb{R}$, tzn.

$$y_1(t_0) = y_{10},\ y_2(t_0) = y_{20},\ \ldots\ ,\ y_n(t_0) = y_{n0},$$

nazveme takovou úlohu opět Cauchyovou úlohou. K získání přibližného řešení takové úlohy lze použít rekurzivní vztah (5), kde $y_0, y_1, \ldots, y_k, \ldots$ jsou n-rozměrné vektory a $f\colon\ \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}^n$ je vektorová funkce.

Obyčejná diferenciální rovnice n-tého řádu

`Obyčejnou diferenciální rovnicí` n`-tého řádu (v explicitním tvaru)` rozumíme rovnici tvaru

$$y^{(n)}(t) = f\left(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)\right), \tag{7}$$

kde $f\colon\ \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}$ je zadaná funkce. Pokud k rovnici (7) přidáme n počátečních podmínek

$$y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_1,\ \ldots\ ,\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1},$$

($y_k \in \mathbb{R},\ t_0 \in \mathbb{R}$) získáme Cauchyovu úlohu pro diferenciální rovnici n-tého řádu. Tuto úlohu můžeme s využitím substituce $z_1(t) = y'(t)$, $z_2(t) = y''(t)$, $\ldots$, $z_{n-1}(t) = y^{(n-1)}(t)$ přepsat na systém

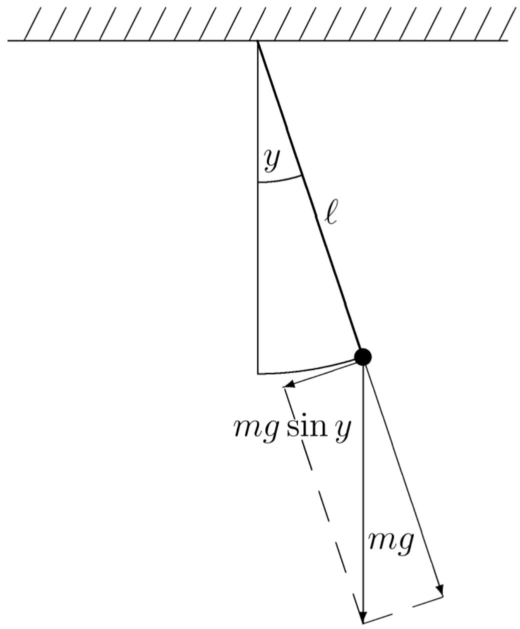
$$\left.\begin{array}{lcl} y'(t) & = & z_1(t), \\ z_1'(t) & = & z_2(t), \\ & \vdots & \\ z_{n-2}'(t) & = & z_{n-1}(t), \\ z_{n-1}'(t) & = & f\left(t, y(t), z_1(t), \ldots, z_{n-1}(t)\right) \end{array}\right\} \tag{8}$$

s počátečními podmínkami

$$y(t_0) = y_0,\ z_1(t_0) = y_1,\ \ldots\ ,\ z_{n-1}(t_0) = y_{n-1}.$$

Matematické kyvadlo

Nyní využijme obyčejnou diferenciální rovnici pro popis matematického kyvadla. Zabývejme se zkoumáním chování hmotného bodu zavěšeného na tenkém vláknu zanedbatelné hmotnosti, zanedbává se odpor vzduchu při pohybu kyvadla i tření v závěsu a gravitační pole se považuje za homogenní. Délka vlákna je ℓ, hmotný bod zavěšený na vláknu má hmotnost m. Náčrtek kyvadla je na obrázku 2.



Obrázek 2: Matematické kyvadlo.

Vytvořme matematický model kyvadla popisující jeho výchylku y od rovnovážné polohy v závislosti na čase t. Výchylku y budeme měřit v radiánech. S využitím Newtonova zákona[6] lze uvedený systém po určitém zjednodušení[7] popsat následující Cauchyovou úlohou

$$\left.\begin{aligned} & y''(t) = (-g/\ell)\ y(t), \\ & y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = dy_0, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

kde $y_0 \in \mathbb{R}$ označuje počáteční výchylku závaží (v radiánech) a $dy_0 \in \mathbb{R}$ značí počáteční (úhlovou) rychlost závaží.

Obdobně jako rovnici (7) můžeme pomocí substituce přepsat na soustavu (8), lze s využitím substituce $z(t) = y'(t)$ transformovat úlohu (9) na následující systém:

$$\left.\begin{aligned} & y'(t) = z(t), \\ & z'(t) = (-g/\ell)\ y(t), \\ & y(t_0) = y_0,\ z(t_0) = dy_0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

K přibližnému řešení této soustavy můžeme využít dříve uvedenou Eulerovu metodu, tj. vektorový tvar formule (5).

[6]Přesněji druhého Newtonova pohybového zákona, který je matematicky vyjádřen vztahem $F = m \cdot a$.
[7]Toto zjednodušení spočívá v aproximaci $y \approx \sin y$ pro „malé“ y.

Úkol 3.1 Pomocí úlohy (10) popíšeme kyvadlo jehož délka je $\ell := 1$ [m] a tíhové zrychlení g považujme rovné 10 m/s^{-2}. Výchylka kyvadla je na počátku rovna $0,1$ (tj. $y(0) = 0{,}1$ [rad]) a počáteční úhlová rychlost kyvadla je nulová (tj. $z(0) = 0$ [rad/s]). Pomocí Eulerovy metody aproximujte pohyb kyvadla v časovém intervalu $\langle 0, 10\rangle$ [s].

Úkol 3.2 Uvažujme opět matematické kyvadlo (se stejnými parametry a stejným modelem jako v předchozím cvičení). Výchylka kyvadla je na počátku nulová (tj. $y(0) = 0$ [rad]) a počáteční úhlová rychlost kyvadla je rovna 1 (tj. $z(0) = 1$ [rad/s]). Pomocí Eulerovy metody aproximujte pohyb kyvadla v časovém intervalu $\langle 0, 10\rangle$ [s].

Na závěr poznamenejme, že mnoho dalších zajímavých aplikací obyčejných diferenciálních rovnic lze nalézt v [6] a v [4].

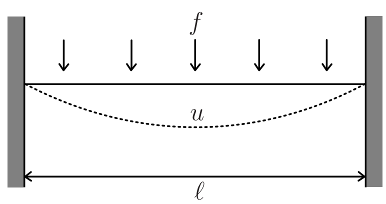
V tomto cvičení si ukážeme jednu z numerických metod pro přibližné řešení 1D okrajových úloh, a to tzv. `metodu sítí`. Okrajové úlohy v jedné dimenzi sestávají z příslušné diferenciální rovnice předepsané na daném otevřeném intervalu a dále z okrajových podmínek předepsaných v krajních bodech tohoto intervalu. V dalším výkladu se omezíme pouze na tzv. Dirichletovu okrajovou úlohu 2. řádu, kdy nejvyšší řád derivace vyskytující se v diferenciální rovnici je roven dvěma a okrajové podmínky jsou předepsány ve tvaru hodnoty hledaného řešení v krajních bodech intervalu.

1D Dirichletova úloha

Ať k a ℓ jsou libovolné kladné reálné konstanty a f je reálná spojitá funkce. Uvažujme následující Dirichletovu úlohu: najděte funkci u takovou, že

$$\left.\begin{aligned} -k\,u''(x) &= f(x) \quad \text{pro } x \in (0,\ell), \\ u(0) = u(\ell) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

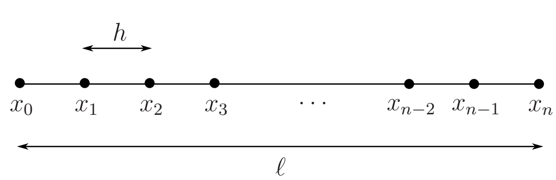
Řešení u tohoto problému si lze představit jako `průhyb struny` délky ℓ, která je uchycena na obou koncích a na níž příčně působí síla s hustotou f. Konstanta k souvisí s tuhostí struny. Takovouto intepretaci úlohy (11) si můžeme prohlédnout na obrázku 3.



Obrázek 3: Průhyb příčně zatížené a na obou koncích uchycené struny.

Metoda sítí pro Dirichletovu úlohu (11)

Na intervalu $(0,\ell)$ zvolíme pravidelnou síť uzlů x_0, x_1, $\ldots$, x_{n-1}, x_n, $n \in \mathbb{N}$, viz obrázek 4. Vzdálenost dvou sousedních uzlů vyjádříme číslem $h := \ell/n$. Označíme si dále $f_i := f(x_i)$



Obrázek 4: Pravidelná síť uzlů na struně délky ℓ.

pro $i = 1, \ldots, n-1$.

Nyní se budeme snažit aproximovat hodnoty funkce u v daných uzlech, tj. čísla $u_i \approx u(x_i)$.

a) počáteční uzel: $u_0 = 0$

b) vnitřní uzly: derivaci druhého řádu vyskytující se v diferenciální rovnici nahradíme tzv. `diferenčními podíly`[8][9]

$$u''(x_i) \approx \frac{u'(x_i + \frac{h}{2}) - u'(x_i - \frac{h}{2})}{h} \approx \frac{\frac{u(x_i+h)-u(x_i)}{h} - \frac{u(x_i)-u(x_i-h)}{h}}{h} =$$

$$= \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2};$$

rovnosti $-ku''(x_i) = f(x_i)$ tak nahradíme systémem rovnic

$$\frac{k}{h^2}[-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}] = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

c) koncový uzel: $u_n = 0$

Dostáváme tak soustavu $(n-1)$ lineárních algebraických rovnic o $(n-1)$ neznámých, kterou si můžeme maticově zapsat takto:

$$\underbrace{\frac{k}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{=:K} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix}}_{=:u} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{bmatrix}}_{=:f},$$

zkráceně pak

$$Ku = f.$$

Matice K se často nazývá `maticí tuhosti`. Všimněme si také, že matice K je třídiagonální[10].

[8]Uvedená aproximace $u''(x_i)$ pomocí diferenčních podílů je stejně jako v případě Eulerovy metody řádu $\mathcal{O}(h)$.

[9]Jelikož metoda sítí využívá vždy nahrazení derivací pomocí vhodných diferenčních podílů, říká se jí také často `metoda konečných diferencí`.

[10]Třídiagonální matice má nenulové prvky pouze na hlavní diagonále, první diagonále pod hlavní diagonálou a první diagonále nad hlavní diagonálou.

Analytické řešení úlohy (11) pro konstantní f

Předpokládejme, že $f(x) = c \in \mathbb{R}$ pro všechna $x \in (0, \ell)$ a že u je řešením (11). Pak pro všechna $x \in (0, \ell)$ platí

$$
\begin{aligned}
-ku''(x) &= c, \\
u''(x) &= -\frac{c}{k}, \\
u'(x) &= \int -\frac{c}{k}\,\mathrm{d}x = -\frac{c}{k}x + a,\ \ a \in \mathbb{R}, \\
u(x) &= \int -\frac{c}{k}x + a\,\mathrm{d}x = -\frac{c}{2k}x^2 + ax + b,\ \ a, b \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

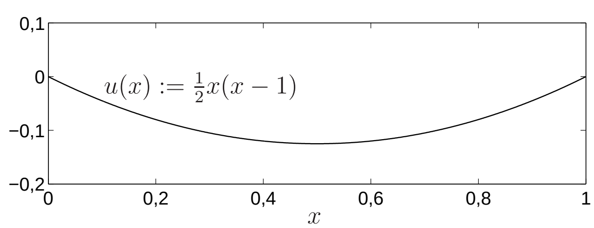
Nyní vezměme v úvahu okrajové podmínky a najděme hodnoty konstant a a b.

$$
\begin{aligned}
u(0) = 0: &\quad 0 = -\frac{c}{2k}\cdot 0^2 + a\cdot 0 + b \ \Rightarrow\ b = 0 \\
u(\ell) = 0: &\quad 0 = -\frac{c}{2k}\cdot \ell^2 + a\cdot \ell \Rightarrow\ a = \frac{c}{2k}\ell
\end{aligned}
$$

Získali jsme analytické řešení Dirichletovy úlohy (11) ve tvaru

$$
u(x) = \frac{c}{2k}x(\ell - x) \quad \text{pro } x \in \langle 0,\, \ell \rangle,
$$

viz obrázek 5.



Obrázek 5: Analytické řešení úlohy (11) pro volbu $c := -1$, $k := 1$ a $\ell := 1$.

Úkol 4.1 Naimplementujte metodu sítí pro modelování průhybu struny o tuhosti k a délce ℓ, která je uchycená na obou koncích a zatížená příčně silou s konstantní hustotou c. Své výsledky získané pomocí metody sítí můžete srovnat se známým analytickým řešením.

Úkol 4.2 Svou implementaci metody sítí z předchozího úkolu jednoduše modifikujte pro případ nekonstantního zatížení s hustotou $f(x) := (x - 1/3)^2 - 1$. Vyzkoušejte si, jak implementace funguje například pro volby $k := 2$, $\ell := 2$ a $n := 300$.

Úkol 4.3 Uvažujte strunu délky $\ell := 2$, která je uchycená na obou koncích a pod níž se ve vzdálenosti $d := 0{,}2$ nachází rovinná překážka. S přesností 10^{-1} určete, jakou musí mít struna minimální tuhost, aby při příčném zatížení silou o hustotě $f(x) := (x - 1/3)^2 - 1$ nedošlo ke kontaktu s překážkou. K řešení použijte metodu sítí, přičemž budete volit $n := 300$.

Reference

[1] M. Barnsley : *Fractals Everywhere*. Academic Press, Boston (1993).

[2] Z. Dostál, V. Vondrák : *Lineární algebra*. Text vytvořený při realizaci projektu „Matematika pro inženýry 21. století“, Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava (2011). (http://mi21.vsb.cz/modul/linearni-algebra)

[3] T. Kozubek, T. Brzobohatý, V. Hapla, M. Jarošová, A. Markopoulos : *Lineární algebra s Matlabem*. Text vytvořený při realizaci projektu „Matematika pro inženýry 21. století“, Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava (2011). (http://mi21.vsb.cz/modul/linearni-algebra-s-matlabem)

[4] B. Krajc, P. Beremlijski: *Obyčejné diferenciální rovnice*. Text vytvořený při realizaci projektu „Matematika pro inženýry 21. století“, Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava (2011). (http://mi21.vsb.cz/modul/obycejne-diferencialni-rovnice)

[5] K. Sigmon: *Matlab Primer*. University of Florida (1993).

[6] M. Tennenbaum, H. Pollard: *Ordinary Differential Equations: An Elementary Textbook for Students of Mathematics, Engineering, and the Sciences*. Dover Publications (1985).

Definice A.1 Buď $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}$. Existuje-li

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

značíme ji $f'(x)$ a nazýváme `derivací funkce` f `v bodě` x.

Poznámka A.1 Většinou – a nejinak je to v tomto textu – se pod pojmem derivace rozumí konečná (tzv. `vlastní`) derivace.

Věta A.1 Buď $f, g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}$. Pak platí

- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$, má-li pravá strana rovnosti smysl,
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, existují-li (vlastní) derivace $f'(x)$ a $g'(x)$,
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, existují-li (vlastní) derivace $f'(x)$ a $g'(x)$ a je-li $g(x) \neq 0$.

Pozorování A.1

- $(c)' = 0,\ c \in \mathbb{R}$ (konst.), $x \in \mathbb{R}$,
- $(x^r)' = rx^{r-1},\ r \in \mathbb{R},\ x \in (0, +\infty)$,
- $(\sin x)' = \cos x,\ x \in \mathbb{R}$,
- $(\cos x)' = -\sin x,\ x \in \mathbb{R}$,
- $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x},\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$,
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}$,
- $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x,\ x \in \mathbb{R}$,
- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x},\ x \in (0, +\infty)$.

Definice B.1 `Vektorovou funkcí` n `reálných proměnných o` m `složkách` nazýváme každé zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, $m, n \in \mathbb{N}$. Vektorová funkce $f = (f_1, \ldots, f_m)$ n reálných proměnných o m složkách je tedy předpis, který každému

$$x := (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in Df \subset \mathbb{R}^n$$

přiřadí jednoznačně hodnotu

$$f(x) := (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \in Hf \subset \mathbb{R}^m,$$

kde $f_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$.

Množinu Df nazýváme definiční obor funkce f a množinu Hf nazýváme obor hodnot funkce f. Skutečnost, že f je vektorovou funkcí n reálných proměnných, zapisujeme symbolem

$$f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m.$$