



Katedra  
aplikované matematiky

# POČÍTAČOVÁ CVIČENÍ

## ŠKOLA MATEMATICKÉHO MODELOVÁNÍ

### 2011

Petr Beremlijski, Marie Sadowská

IPN Podpora technických a přírodovědných oborů  
Regionální koordinátor pro Moravskoslezský kraj

[www.generaceY.cz](http://www.generaceY.cz)

[www.msmt.cz](http://www.msmt.cz)



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# POČÍTAČOVÁ CVIČENÍ

## ŠKOLA MATEMATICKÉHO MODELOVÁNÍ

Petr Beremlijski, Marie Sadowská



Katedra  
aplikované matematiky

Katedra aplikované matematiky  
Fakulta elektrotechniky a informatiky  
VŠB - Technická univerzita Ostrava  
2011

## Poděkování

Autoři textu chtějí poděkovat Doc. RNDr. Jiřímu Bouchalovi, Ph.D. za pozorné přečtení a řadu cenných připomínek k tomuto textu.

*Tuto akci podpořil Regionální koordinátor pro popularizaci přírodovědných a technických oborů v Moravskoslezském kraji.*

IPN Podpora technických a přírodovědných oborů  
Regionální koordinátor pro Moravskoslezský kraj  
[www.generaceY.cz](http://www.generaceY.cz)  
[www.msmt.cz](http://www.msmt.cz)



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Abychom se mohli věnovat numerickému řešení matematických úloh, potřebujeme vhodné prostředí, které nám to umožní. A tak jako fyzik či chemik mají svou laboratoř nebo patolog pitevnu, mají i numeričtí matematici svojí Maticovou laboratoř<sup>1</sup> - Matlab. Podrobně se tomuto pracovnímu prostředí a jeho příkazům věnuje přiložený Matlabovský slabikář [1]. My si v tomto textu uvedeme pouze stručný přehled matlabovských proměnných a příkazů, kterým se budeme věnovat.

### Prostředí

- *help, demos, intro, who, whos, clear, size, length*

### Proměnné

- Skaláry
- Vektory
- Matice

### Příkazy

- Skalární funkce - *sin, cos, tan, cot, exp, log, abs, sqrt, round*
- Vektorové funkce a generování vektorů - *max, min, sort*
- Maticové funkce a generování matic - *det, rand, ones, zeros, eye*
- Skalární operace - *+, -, \*, /, ^*
- Maticové a vektorové operace - *+, -, \*, ' (transponování), \ (A \setminus v = x \Leftrightarrow Ax = v)*  
Operace „po prvcích“ - *.\*, .^, ./*
- 2D grafika (vykreslení grafů funkcí jedné proměnné) - *plot, hold on, hold off, figure*
- 3D grafika (vykreslení grafů funkcí dvou proměnných) - *meshgrid, mesh, contour, hold on, hold off, figure*
- Řídící příkazy - *if* (podmíněný příkaz), *for, while* (příkazy cyklu se známým počtem opakování a podmínkou na začátku)
- Relace a logické operace - *<, >, <=, >=, ==, ~=, &, |, ~*
- Skripty a funkce - *function*

---

<sup>1</sup>MATrix LABoratory

Vše si nyní vyzkoušíme při řešení následujících úloh.

**Cvičení 1.1** Kolik členů harmonické řady<sup>2</sup> musíme nejméně sečíst, aby tento částečný součet řady měl hodnotu alespoň 10 (15, 20)?

**Cvičení 1.2** Zkuste odhadnout s využitím Matlabu součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \right).$$

**Cvičení 1.3** Sestrojte grafy následujících funkcí:

- $f(x) := x^2$
- $f(x) := \sqrt{1-x^2}$
- $f(x) := x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$
- $f(x) := |x|$

**Cvičení 1.4** Sestrojte grafy následujících funkcí:

- $f(x, y) := x^2 + y^2$
- $f(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$
- $f(x, y) := (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$
- $f(x, y) := \sqrt{|xy|}$

---

<sup>2</sup>Řadou (reálných čísel) rozumíme výraz  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots =: \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , kde pro každé  $n \in \mathbb{N}$  je  $a_n \in \mathbb{R}$ . Harmonickou nazýváme řadu  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ .

Velmi často se (nejen) matematik setkává s úkolem, kdy je třeba vyřešit nějakou nelineární rovnici. Tento úkol bývá většinou složitý a řešení nelineární rovnice často nelze najít analyticky. Proto je užitečné vědět, jak lze rovnice řešit pomocí numerických metod. V následujícím textu si ukážeme dvě jednoduché iterační metody, které umožňují nalézt alespoň přibližné řešení nelineární rovnice.

### Metoda prosté iterace

**Definice 2.1** Bod  $x^* \in \mathbb{R}$  nazýváme pevným bodem funkce  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ , pokud

$$f(x^*) = x^*.$$

**Věta 2.1** Buď  $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}$  uzavřený interval a  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ . Nechť  $f$  je spojitá v  $\Omega$  a nechť  $f$  má spojitou derivaci v  $\Omega$ . Ať navíc existuje  $\lambda \in \mathbb{R}$  takové, že

$$|f'(x)| \leq \lambda < 1 \quad \text{pro všechna } x \in \Omega.$$

Zvolme bod  $x_0$  v  $\Omega$ .

Jestliže posloupnost  $(x_n)$  definovaná předpisem

$$x_{n+1} := f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

leží v  $\Omega$ , pak existuje  $x^* \in \Omega$  takové, že

$$f(x^*) = x^* = \lim x_n,$$

tj.  $(x_n)$  konverguje k pevnému bodu  $f$ .

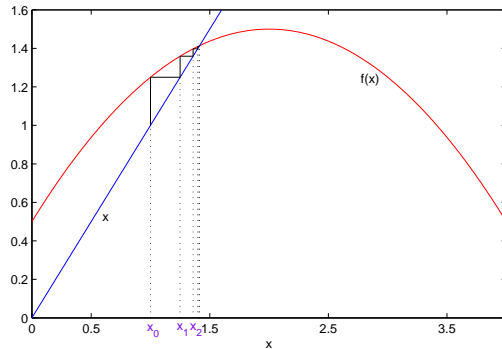
**Příklad 2.1** Posloupnost  $(x_n)$  daná předpisem

$$x_{n+1} := x_n - \frac{1}{4}(x_n^2 - 2), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

konverguje k  $\sqrt{2}$  pro libovolné  $x_0 \in (0, 4)$ . (Všimněte si, že  $\pm\sqrt{2}$  jsou pevné body funkce  $f(x) := x - \frac{1}{4}(x^2 - 2)$ .)

**Algoritmus 2.1** (Metoda prosté iterace)

- 1)  $\varepsilon > 0$  (přesnost),  $x_0$  (počáteční aproximace),  $x_1 := f(x_0)$ ,  $k := 0$
- 2) while  $|x_{k+1} - x_k| \geq \varepsilon$ 
  - $k := k + 1$
  - $x_{k+1} := f(x_k)$
- end
- 3)  $x_{k+1}$  aproximuje s přesností  $\varepsilon$  řešení rovnice  $f(x) = x$



Obrázek 1: Ilustrace konvergence metody prosté iterace k příkladu 2.1.

Na obrázku 1 je ilustrována konvergence posloupnosti  $(x_n)$  z příkladu 2.1 k pevnému bodu  $\sqrt{2}$  funkce  $f$  pro  $x_0 := 1$ .

**Příklad 2.2** Nalezněme pomocí metody prosté iterace přibližné řešení rovnice

$$g(x) := 10 e^{-\frac{x}{10}} - x = 0. \quad (1)$$

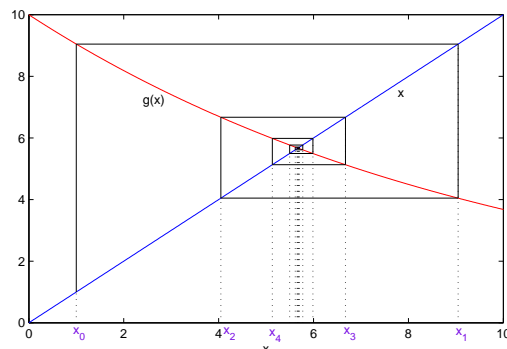
Řešení rovnice (1) převedeme na řešení rovnice

$$f(x) := 10 e^{-\frac{x}{10}} = x;$$

tj. budeme nyní hledat pevný bod funkce  $f$ . Lze si rozmyslet, že posloupnost  $(x_n)$  daná předpisem

$$x_{n+1} := 10 e^{-\frac{x_n}{10}}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

konverguje k pevnému bodu funkce  $f$  pro libovolné  $x_0 > 0$ . Na obrázku 2 je ilustrována konvergence této posloupnosti k pevnému bodu funkce  $f$  pro  $x_0 := 1$ .



Obrázek 2: Ilustrace konvergence metody prosté iterace k příkladu 2.2.

## Newtonova metoda

Zabývejme se nyní řešením rovnice

$$g(x) = 0. \quad (2)$$

Předpokládejme, že  $g$  je spojitá a má spojitou a nenulovou derivaci v nějakém okolí  $\mathcal{U}(x^*)$ , kde  $x^*$  řeší rovnici (2). Budeme vycházet z metody prostých iterací. Jestliže  $x^*$  řeší rovnici (2), pak  $x^*$  řeší také rovnici

$$x = f(x) := x - \frac{g(x)}{h(x)},$$

kde  $h(x) \neq 0$  pro každé  $x$  z okolí  $\mathcal{U}(x^*)$ . Předpokládejme navíc, že  $h$  má derivaci v okolí  $\mathcal{U}(x^*)$ . Pak dále platí

$$f'(x) = 1 - \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h^2(x)} \quad \text{pro všechna } x \in \mathcal{U}(x^*).$$

Pro „dobrou“ konvergenci budeme požadovat  $f'(x^*) = 0$ , tj.

$$1 - \frac{g'(x^*)}{h(x^*)} = 0.$$

Odtud  $h(x^*) = g'(x^*)$ . Volíme proto  $h(x) = g'(x)$ . Dostáváme tak, že posloupnost  $(x_n)$  definovaná předpisem

$$\boxed{x_{n+1} := x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,} \quad (3)$$

konverguje k řešení  $x^*$  rovnice (2), pokud  $x_0$  je dostatečně blízko  $x^*$  a posloupnost  $(x_n)$  splňuje  $|f'(x_n)| \leq \lambda < 1$ .

### **Algoritmus 2.2** (Newtonova metoda)

- |   |
|---|
| 1) $\varepsilon > 0$ (přesnost), $x_0$ (počáteční aproximace), $x_1 := x_0 - g(x_0)/g'(x_0)$ , $k := 0$ |
| 2) while $ x_{k+1} - x_k  \geq \varepsilon$   |
| $k := k + 1$  |
| $x_{k+1} := x_k - g(x_k)/g'(x_k)$   |
| end   |
| 3) $x_{k+1}$ aproximuje s přesností $\varepsilon$ řešení rovnice $g(x) = 0$                             |

**Pozorování 2.1** Rovnice tečny  $t$  grafu funkce  $g$  v dotykovém bodě  $(x_n, g(x_n))$  má tvar

$$t: \quad y = g'(x_n)(x - x_n) + g(x_n).$$



Hledáme-li průsečík přímky  $t$  a osy  $x$ , tak řešíme rovnici

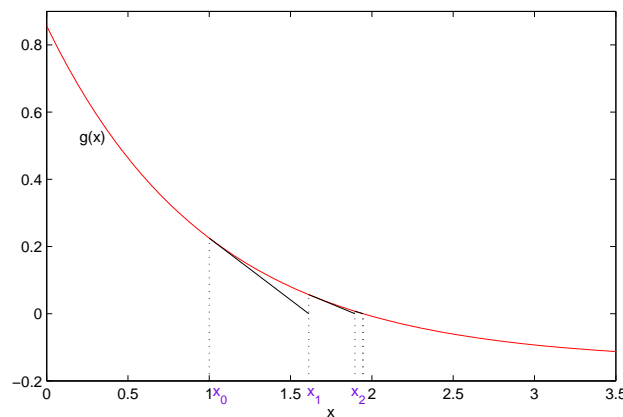
$$g'(x_n)(x - x_n) + g(x_n) = 0. \quad (4)$$

Je-li  $g'(x_n) \neq 0$ , pak lze řešení rovnice (4) psát ve tvaru

$$x = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}.$$

Porovnáme-li pak poslední rovnost s iterační formulí (3), zjistíme, že každé  $x_{n+1}$  vytvoříme jako průsečík tečny sestrojené ke grafu funkce  $g$  v dotykovém bodě  $(x_n, g(x_n))$  a osy  $x$ . Proto se Newtonova metoda často nazývá metodou tečen.

**Příklad 2.3** Na obrázku 3 ilustrujeme přibližné řešení rovnice  $g(x) := e^{-x} - 1/7 = 0$  pomocí Newtonovy metody pro  $x_0 := 1$ .



Obrázek 3: Ilustrace konvergence Newtonovy metody k příkladu 2.3.

**Cvičení 2.1** Pomocí Newtonovy metody aproximujte řešení rovnice

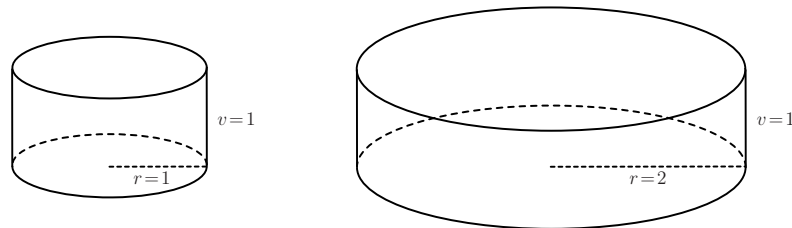
1)  $\ln x + (x - 1)^3 = 0$ ,

2)  $x - e^{-x^2} = 1$ .

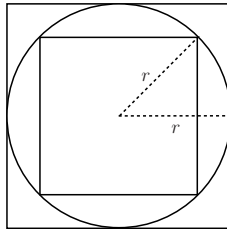
**Cvičení 2.2** Pomocí Newtonovy metody najděte (s danou přesností) hodnoty čísel  $\pi$  a  $\sqrt{2}$ .

### CVIČENÍ 3: MONTE CARLO

Hledejme obsah kruhu o poloměru  $r$  (představme si, že neznáme příslušný vzorec a nic nevíme o číslu  $\pi$ ). Prvním nápadem by mohlo být zhotovení válcových nádob s různými poloměry podstav (např. s poloměry o délce 1 a 2 jednotek) a jednotkovou výškou.



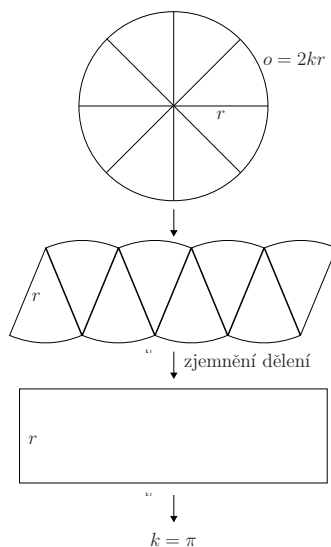
Objem vody, který se do takových nádob vejde, je roven obsahu podstavy válce, tj. obsahu kruhu s poloměrem  $r$ . Rychle si všimneme, že pokud zvětšíme poloměr podstavy dvakrát, zvětší se objem čtyřikrát, a následně odvodíme, že obsah kruhu je přímo úměrný druhé mocnině poloměru. Také zjistíme, že druhou mocninu poloměru kruhu musíme vynásobit vhodnou konstantou, abychom dostali správnou hodnotu obsahu daného kruhu. Tuto konstantu označíme  $\pi$ . Existuje mnoho možností, jak tuto konstantu odhadnout. Snad nej-jednodušší způsob, jak stanovit meze pro  $\pi$ , je vepsat do kruhu o poloměru  $r$  čtverec a stejnému kruhu opsat jiný čtverec.



Protože je snadné spočítat obsahy daných čtverců, zjistíme, že  $\pi \in (2, 4)$  (délka strany menšího čtverce je  $\sqrt{2}r$ , délka strany většího čtverce je  $2r$ ). Mnohem rozumnější výsledek získáme, pokud budeme danému kruhu vepisovat  $n$ -úhelníky a počítat jejich obsahy. Tuto metodu nazýváme vyčerpávací (exhaustní) a pravděpodobně první ji použil Eudoxos<sup>3</sup>.

Než se budeme věnovat odhadům čísla  $\pi$ , podívejme se krátce na výpočet obvodu kruhu. Jistě víme, že obvod kruhu je přímo úměrný dvojnásobku jeho poloměru, ale abychom dostali správnou hodnotu, je nutno  $2r$  vynásobit vhodnou konstantou. Na následujícím obrázku provedeme přeuspořádání kruhu na útvar, který se pro zjemňující se dělení kruhu blíží obdélníku. Porovnáním obsahu kruhu a vzniklého obdélníku je názorně vidět, že tato konstanta je opět  $\pi$ .

<sup>3</sup>Eudoxos (410 nebo 408 př. n. l. – 355 nebo 347 př. n. l.) – řecký astronom, matematik a fyzik, student Platóna



Nyní si ukážeme několik způsobů, jak nalézt přibližnou hodnotu čísla  $\pi$ .

### Buffonova metoda

Řešením tzv. Buffonova<sup>4</sup> problému s jehlou je aproximace čísla  $\pi$ . Úloha spočívá v opakovaném házení jehly o délce  $\ell$  na rovinu, na které máme vyznačenu síť rovnoběžek se vzdáleností  $2\ell$ . Jestliže jehlu hodíme  $n$ -krát a  $x$ -krát nám během těchto pokusů po dopadu zkříží některou z rovnoběžek, pak číslo

$$\frac{n}{x}$$

aproximuje číslo  $\pi$ .

V roce 1975 Perlman a Wichera publikovali tento výsledek týkající se přesnosti Buffonovy metody: S pravděpodobností 95 procent nemá chyba aproximace hodnotu větší než  $5/\sqrt{n}$ . Tzn. například pro 10000 pokusů nám s pravděpodobností 95 procent chyba nepřekročí hodnotu 0,05.

**Cvičení 3.1** Implementujte Buffonovu metodu a použijte ji k aproximaci čísla  $\pi$ . Porovnejte vaši aproximaci se „skutečnou“ hodnotou čísla  $\pi$  a určete chybu aproximace.

### Metoda Monte Carlo

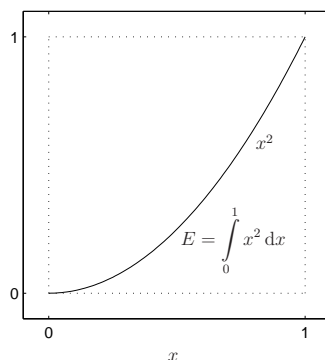
Monte Carlo je třída výpočetních algoritmů založená na provádění náhodných experimentů. Této metody se často používá pro simulaci fyzikálních a matematických systémů. Výsledkem provedení velkého množství experimentů je obvykle pravděpodobnost určitého jevu. Na základě získané pravděpodobnosti a známých vztahů pak spočítáme potřebné

---

<sup>4</sup>G. L. Buffon (1707–1788) – francouzský přírodovědec

výsledky. Protože metoda vyžaduje generování velkého souboru náhodných dat, je vhodné pro její implementaci použití počítače. Metod Monte Carlo se používá v případě, kdy je příliš pracné nebo nemožné nalézt přesný výsledek jiným způsobem. Její výhodou je jednoduchá implementace, nevýhodou relativně malá přesnost. Metoda byla vytvořena skupinou fyziků pracujících na projektu jaderné pumy v Los Alamos, jméno metody bylo navrženo v roce 1940 von Neumannem<sup>5</sup>.

V matematice se Monte Carlo používá zejména pro výpočet určitých integrálů (zejména vícenásobných určitých integrálů), které je obtížné či nemožné vyčíslit analyticky nebo jinou vhodnou numerickou metodou. Např. obsah plochy ohraničené grafem funkce  $y = x^2$ , osou  $x$  a přímkou  $x = 1$  (tj.  $\int_0^1 x^2 dx$ ) je možné metodou Monte Carlo vypočítat následujícím způsobem. Nechť náš program generuje náhodně dvojice čísel  $[x, y]$ , přičemž každé z čísel  $x$  a  $y$  je vybráno nezávisle z intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ . Tuto dvojici budeme chápat jako souřadnice bodu, který je náhodně zvolen ve čtverci  $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ . Pravděpodobnost toho, že bod leží uvnitř zadaného čtverce, je 1. Pravděpodobnost toho, že bod leží uvnitř podmnožiny  $E$  jednotkového čtverce (tj. čtverce, jehož strana má jednotkovou velikost), je rovna obsahu plochy  $E$ . Takže obsah plochy, která je podmnožinou jednotkového čtverce, můžeme odhadnout jako pravděpodobnost, že náhodně zvolený bod leží v této podmnožině.



**Cvičení 3.2** Implementujte metodu Monte Carlo pro výpočet  $\int_0^1 x^2 dx$ .

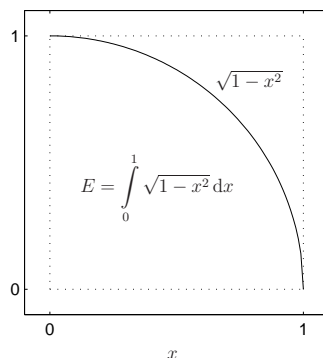
Pro odhad přesnosti metody Monte Carlo platí: S pravděpodobností 95 procent nemá chyba aproximace hodnotu větší než  $1/\sqrt{n}$ . Tzn. například pro 10000 pokusů nám s pravděpodobností 95 procent chyba nepřekročí hodnotu 0,01.

Pokud chceme použít metodu Monte Carlo k aproximaci čísla  $\pi$ , vypočteme  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ . Snadno si uvědomíme, že tímto způsobem získáme aproximaci hodnoty  $\pi/4$ .

---

<sup>5</sup>John von Neumann (1903–1957) – významný maďarský matematik

**Cvičení 3.3** Implementujte metodu Monte Carlo pro výpočet  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$  a použijte ji k aproximaci čísla  $\pi$ . Porovnejte vaši aproximaci se „skutečnou“ hodnotou čísla  $\pi$  a určete chybu aproximace.



### Číselné řady

Poslední metodou nalezení aproximace čísla  $\pi$ , kterou si v tomto přehledu ukážeme, je využití číselných řad. K této aproximaci použijeme Gregoryho<sup>6</sup> řadu, která je rozvojem funkce  $\arctg x$ :

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots =: \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

Tato řada má konečný součet pro  $x \in \langle -1, 1 \rangle$  (říkáme, že řada konverguje), navíc platí, že čím více je  $|x|$  menší než 1, tím méně členů řady potřebujeme použít k nahrazení  $\arctg x$  s „uspokojivou“ přesností. První možností, jak aproximovat  $\pi$ , je tudíž nahradit  $\arctg 1$  Gregoryho řadou ( $\arctg 1 = \pi/4$ ). Aproximaci s rychlejší konvergencí získáme, pokud použijeme rovnost  $\arctg 1 = \arctg(1/2) + \arctg(1/3)$ .

**Cvičení 3.4** Implementujte metodu, která využije Gregoryho řadu k nalezení aproximace čísla  $\pi$ .

---

<sup>6</sup>James Gregory (1638 – 1675) – skotský matematik a astronom

---

#### CVIČENÍ 4: ŘEŠÍME OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 1. ŘÁDU

---

V tomto cvičení vytvoříme matematický model, který popisuje, jakým způsobem se mění náboj v jednoduchém obvodu s rezistorem a kondenzátorem v závislosti na čase. Abychom mohli takovýto model sestavit, potřebujeme pracovat se speciálním typem rovnice – s tzv. diferenciální rovnicí. Navíc si povíme, jak lze diferenciální rovnice numericky řešit.

Obyčejnou diferenciální rovnicí 1. řádu rozumíme rovnici tvaru

$$y'(t) = f(t, y(t)),$$

kde  $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  je zadaná funkce. Řešením této rovnice na otevřeném intervalu  $(a, b)$  rozumíme každou funkci  $\bar{y}: (a, b) \mapsto \mathbb{R}$  takovou, že pro všechna  $t \in (a, b)$  platí

$$\bar{y}'(t) = f(t, \bar{y}(t)).$$

Například funkce  $\bar{y}(t) := t$ ,  $t \in (0, +\infty)$ , je řešením diferenciální rovnice

$$y'(t) = y(t)/t \tag{5}$$

na intervalu  $(0, +\infty)$ . Jiným řešením této rovnice na intervalu  $(0, +\infty)$  je například funkce  $\bar{y}(t) := 2t$ ,  $t \in (0, +\infty)$ , či  $\bar{y}(t) := 3t$ ,  $t \in (0, +\infty)$ . Není těžké ukázat, že každá funkce  $\bar{y}(t) := kt$ ,  $t \in (0, +\infty)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , je řešením diferenciální rovnice  $y'(t) = y(t)/t$  na intervalu  $(0, +\infty)$ . Úloha (5) má tedy nekonečně mnoho řešení. Zkusme navíc přidat k naší rovnici například podmínku  $y(1) = 2$ , tj. chceme nalézt funkci, která řeší naši rovnici a navíc její funkční hodnota v  $t = 1$  je rovna 2. Lze ukázat, že taková úloha již má na  $(0, +\infty)$  pouze jediné řešení, a to  $\bar{y}(t) := 2t$ ,  $t \in (0, +\infty)$ .

Úlohu, jež se skládá z hledání řešení obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu, které má navíc splňovat tzv. počáteční podmínku  $y(t_0) = y_0$ , nazýváme Cauchyovou úlohou a zapisujeme ji takto:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{6}$$

Pokud má funkce  $f(t, y(t))$  speciální tvar<sup>7</sup>, pak existují metody, jak analyticky řešit výše popsanou Cauchyovu úlohu. Často však analytické řešení nalézt nelze nebo by jeho nalezení bylo příliš náročné. V takovém případě se nabízí použití některé z numerických metod pro přibližné řešení diferenciálních rovnic 1. řádu s počáteční podmínkou. Podívejme se nyní na jednu z těchto metod – Eulerovu metodu<sup>8</sup>. O funkci  $f$  budeme předpokládat, že je v množině  $D := \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t_0 \leq t\}$  spojitá a že je v  $D$  spojitá i derivace této funkce podle proměnné  $y$ .

---

<sup>7</sup>Například  $f$  závisí lineárně na  $y$ , tj.  $f(t, y) = a(t)y + b(t)$ , kde  $a$  a  $b$  jsou reálné funkce.

<sup>8</sup>Publikoval ji významný švýcarský matematik a fyzik Leonhard Euler (1707 – 1783) v roce 1768.

## Eulerova metoda

Eulerova metoda je nejjednodušší způsob numerického řešení Cauchyových úloh. Výstup Eulerovy metody nám aproximuje řešení Cauchyovy úlohy (6) na intervalu  $\langle t_0, t_N \rangle$ . Metoda využívá aproximace derivace funkce  $y$  v bodě  $t$  pomocí tzv. diference  $y$  v tomto bodě

$$y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h},$$

kde  $h$  je „malé“ ( $0 < h \ll 1$ ).

Použijeme-li diferenci k aproximaci  $y'(t)$  v rovnici úlohy (6), dostáváme vztah

$$y(t+h) \approx y(t) + hf(t, y(t)). \quad (7)$$

Dále zvolme „dostatečně malé“  $h > 0$  a sestrojme body

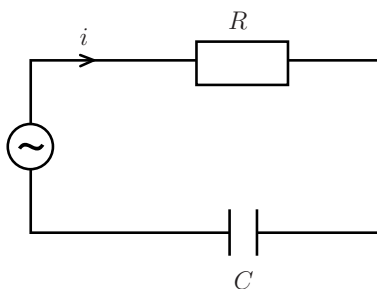
$$t_0, t_1 := t_0 + h, t_2 := t_0 + 2h, \dots, t_N := t_0 + Nh.$$

Označme pomocí  $y_n$  aproximaci hodnoty přesného řešení  $y(t_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ . Z (7) a počáteční podmínky pak dostaneme rekurzivní vztah

$$\boxed{\begin{aligned} y_0 &= y(t_0), \\ y_{n+1} &= y_n + hf(t_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots, N, \end{aligned}}$$

který použijeme pro numerické řešení Cauchyovy úlohy (6). Lze ukázat, že chyba aproximace řešení pomocí Eulerovy metody v bodě  $t_1$  je přímo úměrná druhé mocnině velikosti kroku  $h$ . Chyba aproximace řešení v bodě  $t_N$  je přímo úměrná velikosti  $h$ .

Uvažujme nyní elektrický obvod, ve kterém je sériově zapojen rezistor a kondenzátor. V obvodu je také v sérii zapojen elektrický zdroj, který do sítě dodává elektromotorické napětí. Schéma obvodu je na obrázku 4. Nyní vytvoříme jednoduchý model, který popíše



Obrázek 4: Schéma elektrického obvodu.

hodnotu elektrického náboje  $q$  v obvodu v závislosti na čase  $t$ . Odpor rezistoru označme  $R$  a kapacitu kondenzátoru popíšeme parametrem  $C$ . Elektrický zdroj dodává do obvodu

elektromotorické napětí  $E(t)$  (často  $E(t) := A \sin(\omega t)$ , kde  $\omega, A \in \mathbb{R}$ ). Matematicky lze uvedený systém popsat následující Cauchyovou úlohou

$$\begin{cases} Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = E(t), \\ q(t_0) = q_0, \end{cases} \quad (8)$$

kde  $q_0$  označuje počáteční hodnotu elektrického náboje. Protože elektrický proud  $i$  v čase  $t$  je definován jako okamžitá změna náboje  $q$  a tento vztah můžeme matematicky zapsat jako  $i(t) = q'(t)$ , lze derivováním rovnice v (8) snadno získat rovnici pro hodnotu elektrického proudu  $i$  procházejícího obvodem v závislosti na čase  $t$ :

$$Ri'(t) + \frac{1}{C}i(t) = E'(t).$$

**Cvičení 4.1** Pomocí úlohy (8) popíšeme náboj v elektrickém obvodu, ve kterém je sériově zapojen rezistor s odporem  $R := 2$  [Ohm], kondenzátor s kapacitou  $C := 1$  [Farad] a elektrický zdroj, který do sítě dodává elektromotorické napětí  $E(t) := 10$  [Volt]. Hodnota elektrického náboje je na počátku nulová, tj.  $q(0) = 0$  [Coulomb]. Pomocí Eulerovy metody aproximujte chování elektrického náboje v časovém intervalu  $\langle 0, 10 \rangle$  [s].

**Cvičení 4.2** Uvažujme obvod bez elektrického zdroje se sériově zapojeným rezistorem a kondenzátorem (se stejnými parametry jako v předchozím cvičení). Kondenzátor je na počátku nabit nábojem o hodnotě 10 [Coulomb], tj.  $q(0) = 10$  [Coulomb]. S využitím modelu (8) aproximujte pomocí Eulerovy metody chování elektrického náboje v časovém intervalu  $\langle 0, 10 \rangle$  [s].

Na závěr poznamenejme, že mnoho dalších zajímavých aplikací obyčejných diferenciálních rovnic lze nalézt v [2].



## Reference

- [1] K. Sigmon: *Matlab Primer*. University of Florida (1993).
- [2] M. Tennenbaum, H. Pollard: *Ordinary Differential Equations: An Elementary Textbook for Students of Mathematics, Engineering, and the Sciences*. Dover Publications (1985).

**Definice A.1** Bud'  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  a  $x \in \mathbb{R}$ . Existuje-li

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

značíme ji  $f'(x)$  a nazýváme derivací funkce  $f$  v bodě  $x$ .

**Poznámka A.1** Většinou – a nejinak je to v tomto textu – se pod pojmem derivace rozumí konečná (tzv. vlastní) derivace.

**Věta A.1** Bud'  $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  a  $x \in \mathbb{R}$ . Pak platí

- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$ , má-li pravá strana rovnosti smysl,
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ , existují-li (vlastní) derivace  $f'(x)$  a  $g'(x)$ ,
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ , existují-li (vlastní) derivace  $f'(x)$  a  $g'(x)$  a je-li  $g(x) \neq 0$ .

**Pozorování A.1**

- $(c)' = 0$ ,  $c \in \mathbb{R}$  (konst.),
- $(x^r)' = rx^{r-1}$ ,  $r \in \mathbb{R}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ ,
- $(\sin x)' = \cos x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,
- $(\cos x)' = -\sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$ ,
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ ,
- $(e^x)' = e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

**Definice B.1** Bud'  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ . Funkci  $f^{-1}$ , pro niž platí současně:

- i) definiční obor  $Df^{-1}$  funkce  $f^{-1}$  je roven oboru hodnot funkce  $f$
- ii) pro každé  $x \in Df^{-1}$  platí, že  $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$ ,

nazveme funkcí inverzní k funkci  $f$ .

**Poznámka B.1** Lze ukázat, že  $f^{-1}$  existuje právě tehdy, je-li  $f$  prostá. Graf  $f^{-1}$  je přitom osově souměrný s grafem  $f$  dle přímky  $y = x$ .

**Definice B.2** Funkci inverzní k funkci tangens zúžené na interval  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  nazveme arkustangens a označujeme jako  $\operatorname{arctg}$ , tj.

$$\operatorname{arctg} := \left( \operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \right)^{-1}.$$

**Pozorování B.1** Funkce arkustangens má tyto vlastnosti:

- definiční obor je roven  $\mathbb{R}$ ,
- oborem hodnot je interval  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ,
- funkce  $\operatorname{arctg}$  je lichá, tj.  $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} (-x)$  pro každé  $x \in \mathbb{R}$ .

