Paradoxy geometrické pravděpodobnosti

Ondřej Grunt

Katedra aplikované matematiky

1. června 2009

Úvod

Cíle práce :

- Analýza Bertrandova paradoxu.
- Tvorba simulačního softwaru.

Osnova

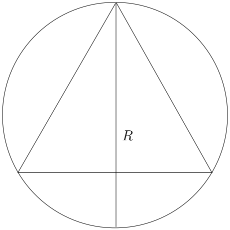
Osnova

Osnova

Osnova

Bertrandův problém

V rovině je zadán kruh o poloměru $R > 0$. Zvolme „náhodně“ přímku tak, aby protínala zadaný kruh. Jaká je pravděpodobnost, že vzniklá tětiva má délku větší než je délka strany rovnostranného trojúhelníka vepsaného příslušné hraniční kružnici.

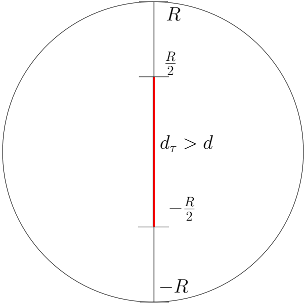


Bertrandův problém

Protože můžeme mnoha způsoby definovat „stejně možné“ šance umístění tětivy, můžeme dojít k různým výsledkům.Níže popíšeme tři „intuitivně věrohodná“ řešení problému.

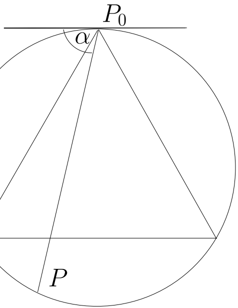
Řešení A

- $P_A = \frac{1}{2}$



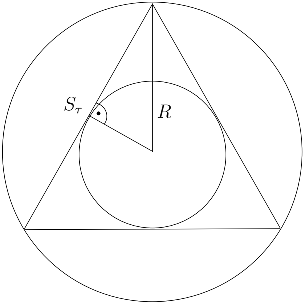
Řešení B

- $P_B = \frac{1}{3}$



Řešení C

- $P_C = \frac{1}{4}$



Invariance

Pro diskusi řešení problému jsme užili následující tři principy:

- Invariance vůči rotaci.
- Invariance vůči změně měřítka.
- Invariance vůči posunutí.

Invariance

Pro diskusi řešení problému jsme užili následující tři principy:

- Invariance vůči rotaci.
- Invariance vůči změně měřítka.
- Invariance vůči posunutí.

Invariance

Pro diskusi řešení problému jsme užili následující tři principy:

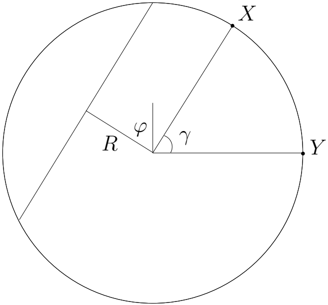
- Invariance vůči rotaci.
- Invariance vůči změně měřítka.
- Invariance vůči posunutí.

Invariance

Pro diskusi řešení problému jsme užili následující tři principy:

- Invariance vůči rotaci.
- Invariance vůči změně měřítka.
- Invariance vůči posunutí.

Invariance



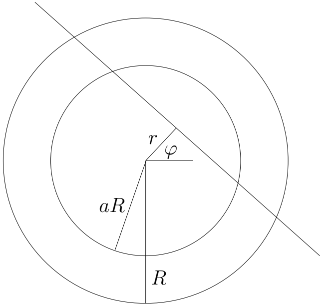
Obrázek: Znázornění invariance vůči rotaci.

Invariance

Invariance vůči rotaci

- Představme si dva pozorovatele sledující problém. Ačkoliv jej oba vidí pod jiným úhlem, problém se jim bude jevit stejný.
- Všechna navrhovaná řešení jsou slučitelná s rotační invariancí.

Invariance



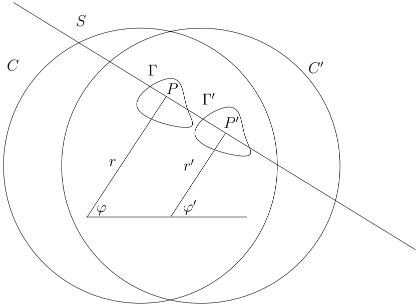
Obrázek: Znázornění invariance vůči změně měřítka.

Invariance

Invariance vůči změně měřítka

- Mějme dva pozorovatele s různou velikostí oční bulvy. Problémy spojené s velikostí kruhů se jim budou zdát totožné.
- Tato invariance vede v důsledku k vyloučení řešení B.
- $f(r) = \frac{qr^{q-2}}{2\pi R^q}, \quad 0 < q < \infty$

Invariance



Obrázek: Znázornění invariance vůči posunutí.

Invariance

Invariance vůči posunutí

- Problémy spojené s oběma od sebe posunutými kruhy se budou dvěma od sebe málo vzdáleným pozorovatelům zdát totožné.
- Tato invariance vede v důsledku k vyloučení řešení C.

Programová simulace

- tetivy.jar
- čtyři možnosti volby sítě bodů :
    - Čtvercová síť sestávající se ze všech bodů
    - Čtvercová síť sestávající se z krajních bodů
    - Kruhová síť sestávající se ze všech bodů
    - Kruhová síť sestávající se z krajních bodů

Programová simulace

- tetivy.jar
- čtyři možnosti volby sítě bodů :
  - Čtvercová síť sestávající se ze všech bodů
  - Čtvercová síť sestávající se z krajních bodů
  - Kruhová síť sestávající se ze všech bodů
  - Kruhová síť sestávající se z krajních bodů

Programová simulace

- tetivy.jar
- čtyři možnosti volby sítě bodů :
  - Čtvercová síť sestávající se ze všech bodů
  - Čtvercová síť sestávající se z krajních bodů
  - Kruhová síť sestávající se ze všech bodů
  - Kruhová síť sestávající se z krajních bodů

Programová simulace

- tetivy.jar
- čtyři možnosti volby sítě bodů :
  - Čtvercová síť sestávající se ze všech bodů
  - Čtvercová síť sestávající se z krajních bodů
  - Kruhová síť sestávající se ze všech bodů
  - Kruhová síť sestávající se z krajních bodů

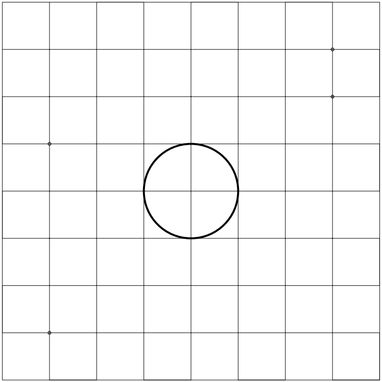
Programová simulace

- tetivy.jar
- čtyři možnosti volby sítě bodů :
  - Čtvercová síť sestávající se ze všech bodů
  - Čtvercová síť sestávající se z krajních bodů
  - Kruhová síť sestávající se ze všech bodů
  - Kruhová síť sestávající se z krajních bodů

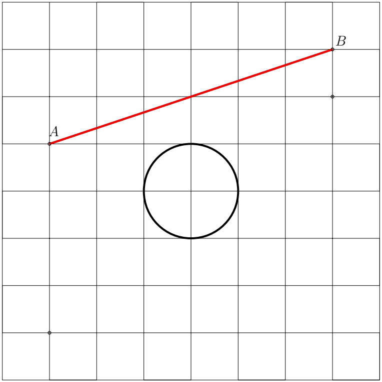
Programová simulace

- tetivy.jar
- čtyři možnosti volby sítě bodů :
    - Čtvercová síť sestávající se ze všech bodů
    - Čtvercová síť sestávající se z krajních bodů
    - Kruhová síť sestávající se ze všech bodů
    - Kruhová síť sestávající se z krajních bodů

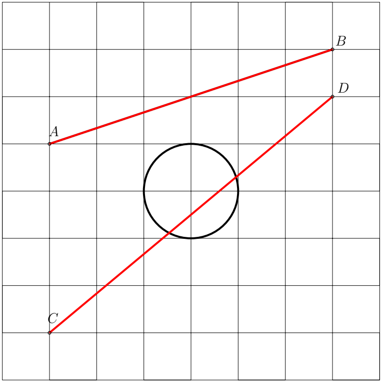
Ukázka algoritmu v případě čtvercové sítě



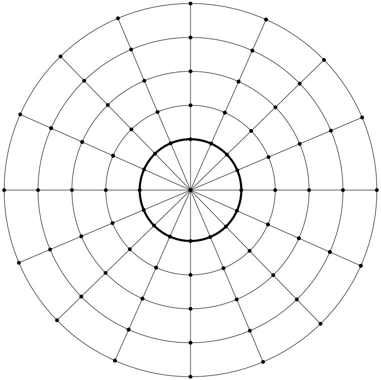
Ukázka algoritmu v případě čtvercové sítě



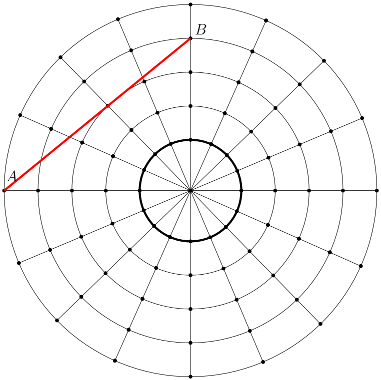
Ukázka algoritmu v případě čtvercové sítě



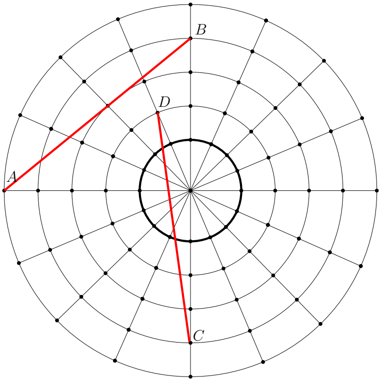
Ukázka algoritmu v případě kruhové sítě



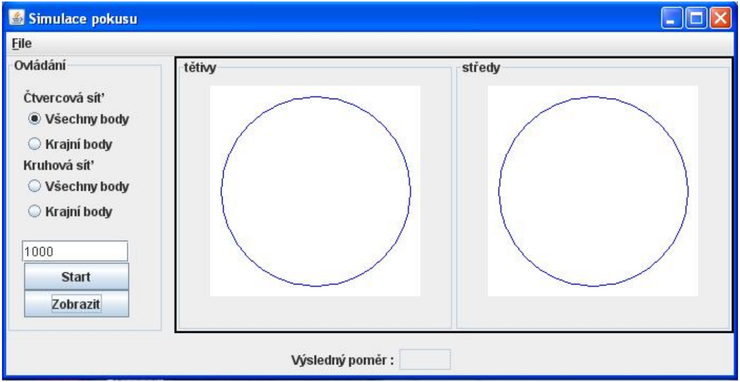
Ukázka algoritmu v případě kruhové sítě



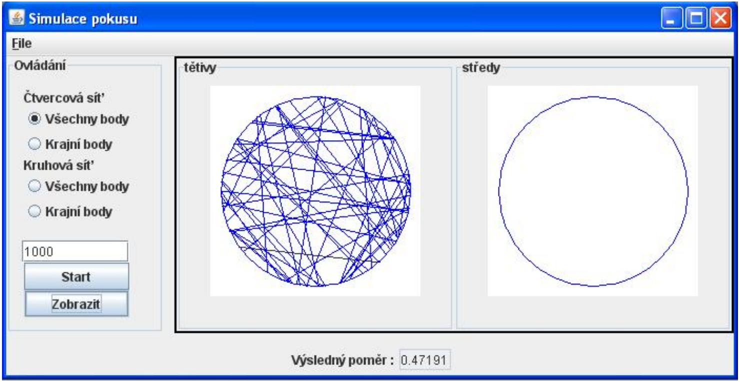
Ukázka algoritmu v případě kruhové sítě



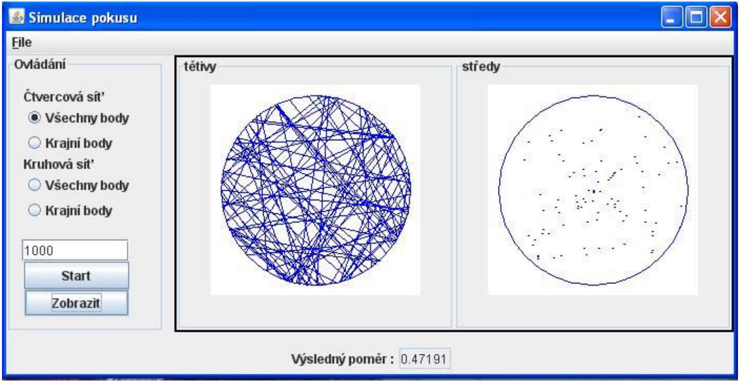
Screenshot programu



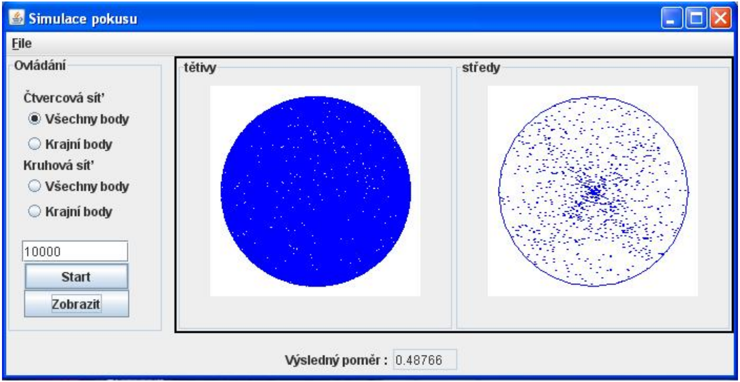
Screenshot programu



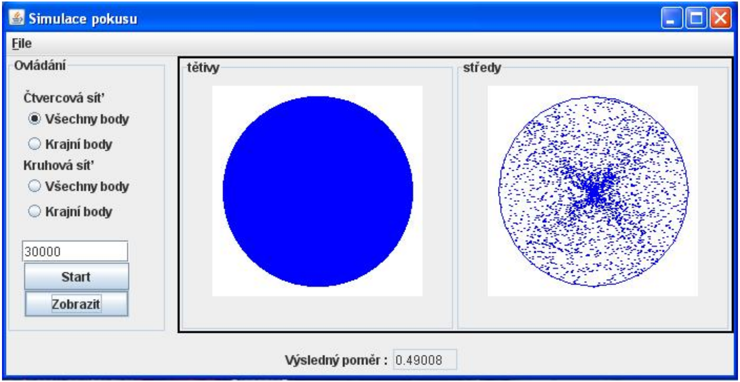
Screenshot programu



Screenshot programu



Screenshot programu



Reálný pokus

Experiment č.1

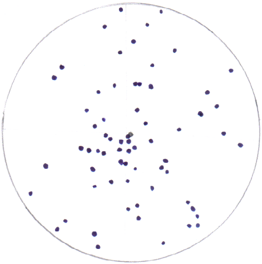
- špejlí vrženo 300-krát.
- 34 z 66 změřených tětiv bylo delších než strana vepsaného rovnostranného trojúhelníka.
- $P_1 = 0,515$.

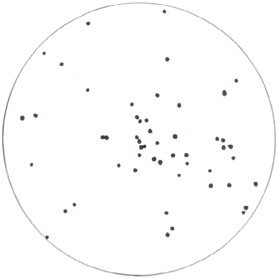
Reálný pokus

Experiment č.2

- špejlí vrženo 400-krát.
- 24 z 52 změřených tětiv bylo delších než strana vepsaného rovnostranného trojúhelníka.
- $P_2 = 0,462$.

Reálný pokus - souřadnice středů tětiv





Obrázek: Výsledky pokusů

Reálný pokus - test

χ^2 test dobré shody

i	interval R	n_i	$n \cdot \pi_{0,i}$	n_i	$n \cdot \pi_{0,i}$
1	$(0; 0,3\rangle$	19	15, 6	17	19, 8
2	$(0,3; 0,5\rangle$	5	10, 4	17	13, 2
3	$(0,5; 0,7\rangle$	10	10, 4	9	13, 2
4	$(0,7; 0,9\rangle$	11	10, 4	15	13, 2
5	$(0,9; 1\rangle$	7	5, 2	8	6, 6

Literatura

- Jaynes, E. T., „*The Well-Posed Problem*“, Foundations of Physics 3, 1973.
- Grinstead, Snell, *Introduction to Probability*, AMS Bookstore, 1997.
- Bertrand, J., *Calcul des probabilités*, Gauthier-Villars, Paris, 1989.
- Gnedenko, B. V., *The Theory of Probability*, Chelsea Publ. Co., New York, 1962.
- Poincaré, H., *Calcul des probabilitiés*, Paris, 1912.
- Uspensky, J. V., *Introduction to Mathematical Probability*, 1937.
- Northrup, E. P., *Riddles in mathematics*, McGraw-Hill, 1944.
- Kendall and Moran, *Geometrical Probability*, Hafner Publ. Co., New York, 1963.
- Weaver, W., *Lady Luck: the Theory of Probability*, Doubleday-Anchor, Garden City, New York, 1963.
- Mosteller, F., *Fifty Challenging Problems in Probability*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1965.
- von Mises, R., *in Mathematical Theory of Probability and Statistics*, H. Geiringer ed., Academic Press, New York, 1964

Prostor pro dotazy.

Děkuji Vám za pozornost.