Počítačová cvičení
Škola matematického modelování

Petr Beremlijski, Marie Sadowská

Katedra aplikované matematiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
VŠB - Technická univerzita Ostrava
2010

Poděkování

Autoři textu chtějí poděkovat Mgr. Bohumilu Krajcovi, Ph.D. a Doc. RNDr. Jiřímu Bouchalovi, Ph.D. za pozorné přečtení a řadu cenných připomínek k tomuto textu. Jejich poděkování patří také MUDr. Michalu Pětrošovi za trpělivé a laskavé uvedení do problematiky farmakokinetiky.

Část z těchto textů vznikla při realizaci projektu Matematika pro inženýry 21. století (registrační číslo CZ.1.07/2.2.00/07.0332). Jeho webová stránka je http://mi21.vsb.cz.

Abychom se mohli věnovat numerickému řešení matematických úloh, potřebujeme vhodné prostředí, které nám to umožní. A tak jako fyzik či chemik mají svou laboratoř nebo patolog pitevnu, mají i numeričtí matematici svojí Maticovou laboratoř[1] - Matlab. Podrobně se tomuto pracovnímu prostředí a jeho příkazům věnuje přiložený Matlabovský slabikář ([6]). My si v tomto textu uvedeme pouze stručný přehled matlabovských proměnných a příkazů, které budeme potřebovat.

Prostředí

help, demos, intro, who, whos, clear, size, length

Proměnné

- Skaláry
- Vektory
- Matice

Příkazy

- Skalární funkce - *sin, cos, tan, exp, log, abs, sqrt, round*
- Vektorové funkce a generování vektorů - *max, min, sort*
- Maticové funkce a generování matic - *det, rand, ones, zeros, eye*
- Skalární operace - $+, -, *, /, \hat{}$
- Maticové a vektorové operace - $+, -, *, '$ (transponování), $\backslash$ ($A\backslash v = x \Leftrightarrow Ax = v$)
  Operace "po prvcích"- $.*$, $.\hat{}$, $./$
- 2D grafika (vykreslení grafů funkcí jedné proměnné) - *plot, hold on, hold off, figure*
- 3D grafika (vykreslení grafů funkcí dvou proměnných) - *meshgrid, mesh, contour, hold on, hold off, figure*
- Řídící příkazy - *if* (podmíněný příkaz), *for* (příkaz cyklu se známým počtem opakování), *while* (příkaz cyklu s podmínkou na začátku)

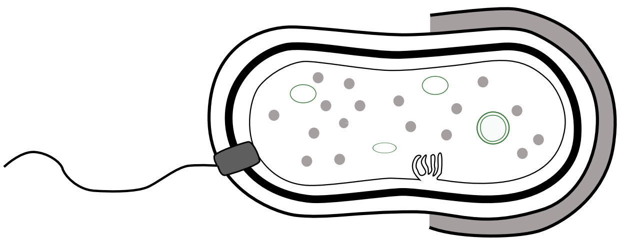
[1]MATrix LABoratory

- Relace a logické operace - <, >, <=, >=, ==, ˜=, &, |, ˜
- Skripty a funkce - *function*

Použití výše zmíněných příkazů si v MATLABu vyzkoušíme při řešení následujících úloh.

Příklad 1 Legenda říká, že když byly vymyšleny šachy, tak se místnímu vládci (někde v Asii) tato hra tak zalíbila, že se rozhodl odměnit jejich vynálezce a za odměnu mu nabídl cokoliv, co si bude přát. Vynálezce mu na to odpověděl, že si nepřeje nic jiného než několik zrnek rýže. A aby se to dobře počítalo, tak že chce za první políčko šachovnice dostat jedno zrnko rýže, za druhé dvě zrnka rýže, za třetí čtyři zrnka, za čtvrté osm zrnek a tak dále. Tedy ať za každé další pole šachovnice dostane dvojnásobný počet zrnek rýže ve srovnání s polem předchozím. Kolik kilogramů rýže žádal, jestliže 30 000 zrnek rýže váží 1 kilogram?[2]

Příklad 2 Bakterie Yersinia pestis, která způsobuje onemocnění morem, se v příznivých podmínkách dělí jednou za 100 minut. Jak dlouho by trvalo, pokud by nedocházelo k úhynu bakterií a mohly se bez omezení množit, než by jejich hmotnost překročila hmotnost Země? Předpokládejme, že v čase $t = 0$ žije jedna bakterie Yersinia pestis. Předpokládejme, že hmotnost jedné bakterie je $6 \cdot 10^{-15}$ kg a hmotnost Země je $6 \cdot 10^{24}$ kg.



Obrázek 1: Bakterie

[2]Pro zajímavost: Dle Ústavu zemědělské ekonomiky a informací by měla světová produkce rýže v hospodářském roce 2009/2010 dosáhnout 449,5 milionů tun.

Příklad 3 Sestrojte v Matlabu grafy následujících funkcí:

- $f(x) = x^2$,
- $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$,
- $f(x) = x^2 \cdot \sin \frac{1}{x^2}$,
- $f(x) = |x|$.

Příklad 4 Sestrojte v Matlabu grafy následujících funkcí:

- $f(x, y) = x^2 + y^2$,
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$,
- $f(x, y) = (x^2 + y^2) \cdot \sin \frac{1}{x^2+y^2}$,
- $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$.

Začněme následující definicí. Funkci $F\colon\ \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ nazveme primitivní funkcí k funkci $f\colon\ \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$, pokud pro každé $x \in I$ platí

$$F'(x) = f(x).$$

Lze ukázat, že pokud je f spojitá na otevřeném intervalu I, je existence primitivní funkce F k f na tomto intervalu zaručena.

Primitivní funkce je důležitým nástrojem pro výpočet určitého integrálu funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$. Platí totiž následující tvrzení: jsou-li funkce f a F spojité na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a je-li F primitivní k f na (a, b), vypočteme určitý integrál funkce f na $\langle a, b\rangle$ takto

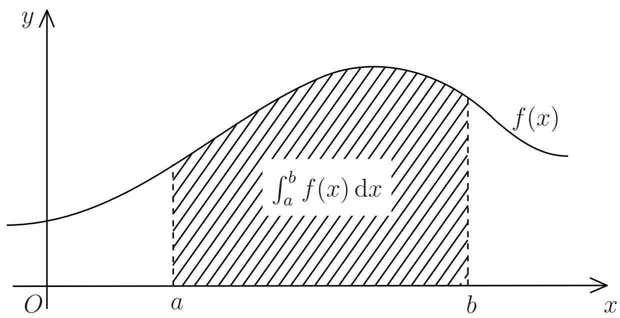
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \overset{\text{ozn.}}{=} [F(x)]_a^b. \tag{1}$$

Vztah (1) se často nazývá Newtonův-Leibnizův vzorec a pro výpočet určitého integrálu má zásadní význam.

Připomeňme si ještě geometrický význam určitého integrálu. Nejprve předpokládejme, že je funkce f spojitá a nezáporná na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak integrál

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

je roven obsahu rovinného obrazce ohraničeného osou x, grafem funkce f a přímkami $x = a$ a $x = b$, viz obrázek 2. Nyní rozšiřme naše úvahy na spojité funkce, které mohou



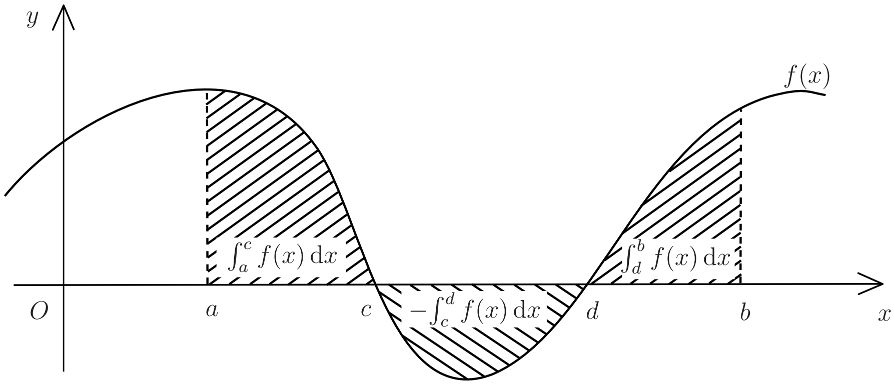
Obrázek 2: Význam určitého integrálu

být v intervalu $\langle a, b\rangle$ záporné. Nechť je např. funkce f záporná na intervalu $(c, d) \subset \langle a, b\rangle$, viz obrázek 3. Potom také

$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x < 0.$$

Chceme-li pak tímto integrálem vypočíst obsah plochy ohraničené osou x, grafem funkce f a přímkami $x = c$ a $x = d$, musíme na této části vzít integrál s opačným znaménkem. Bude-li nás dále zajímat obsah plochy, kterou ohraničuje osa x, graf funkce f a přímky

$x = a$ a $x = b$, a bude-li funkce f protínat v intervalu $\langle a, b\rangle$ osu x, musíme tyto průsečíky najít a rozdělit interval $\langle a, b\rangle$ na intervaly, na nichž má f totéž znaménko. Na těchto intervalech spočteme integrály funkce f. Výsledný obsah plochy pak dostaneme jako součet všech vypočtených integrálů, přičemž integrály na těch intervalech, kde je f nekladná, musíme uvažovat se záporným znaménkem (viz obrázek 3).



Obrázek 3: Obsah rovinného obrazce a určitý integrál

Přibližný výpočet určitého integrálu

V případě, že primitivní funkci nelze vyjádřit elementárními nebo tabelovanými funkcemi, Newtonův-Leibnizův vzorec (1) nemůžeme přímo použít. Někdy zase může být hledání primitivní funkce příliš složité či časově náročné. V těchto případech často přistupujeme k tzv. numerickému výpočtu daného určitého integrálu, který nám dá přibližnou hodnotu integrálu s danou přesností. V následující textu si přiblížíme dvě základní metody přibližného výpočtu určitého integrálu, a to obdélníkové a lichoběžníkové pravidlo.

Obdélníkové pravidlo

Rozdělme nejprve interval $\langle a, b\rangle$ na n stejných dílků o délce

$$h = \frac{b-a}{n}. \tag{2}$$

Krajní body i-tého dílku postupně označme x_{i-1} a x_i; platí tedy

$$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b. \tag{3}$$

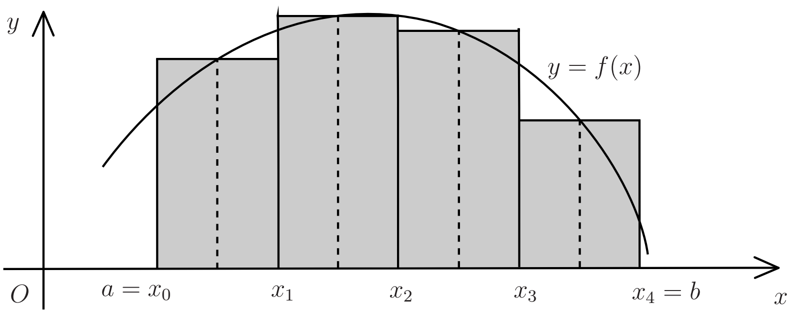
Vypočteme si dále středy jednotlivých dílků:

$$c_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Na i-tém dílku pak funkci f nahradíme konstantní funkcí o hodnotě $f(c_i)$ a hledaný integrál budeme aproximovat takto:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx hf(c_1) + hf(c_2) + \cdots + hf(c_n) = h\sum_{i=1}^{n} f(c_i).$$

Například integrál funkce f z obrázku 4 na intervalu $\langle a, b\rangle$ tak nahrazujeme součtem obsahů příslušných obdélníků.



Obrázek 4: Aproximace obdélníky ($n = 4$)

Lze ukázat, že pokud existuje spojitá f'' na $\langle a, b\rangle$, potom pro `chybu aproximace` platí

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - h\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\right| \le \frac{(b-a)^3}{24n^2} \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f''(x)|.$$

<u>`Lichoběžníkové pravidlo`</u>

Interval $\langle a, b\rangle$ rozdělíme stejně jako u obdélníkového pravidla na dílky shodné délky, viz (2) a (3). Hledaný integrál budeme aproximovat takto:

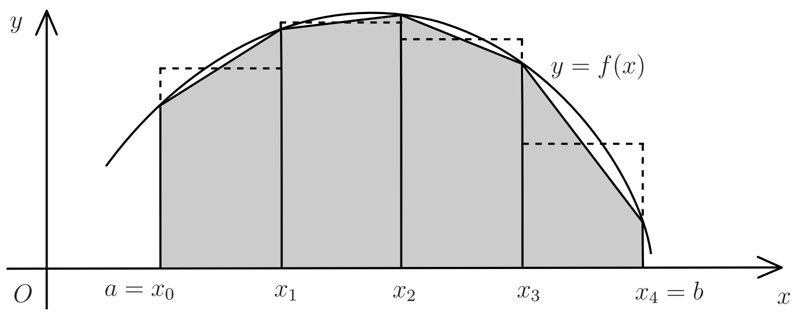
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx h\,\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h\,\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \cdots + h\,\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2} =$$

$$= \frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)) = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right).$$

Například integrál funkce f z obrázku 5 na intervalu $\langle a, b\rangle$ tak nahrazujeme součtem obsahů příslušných lichoběžníků.

Je možné ukázat, že pokud existuje spojitá f'' na $\langle a, b\rangle$, potom pro `chybu aproximace` platí

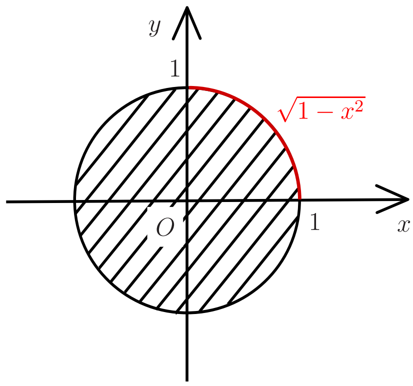
$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;-\; \frac{h}{2}\left(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)\right| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f''(x)|.$$



Obrázek 5: Aproximace lichoběžníky ($n = 4$)

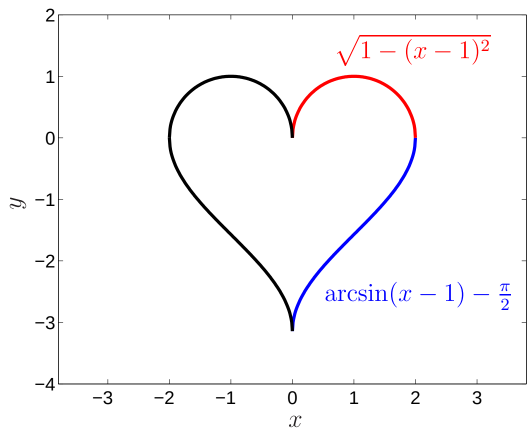
Všimněme si, že u lichoběžníkového pravidla máme odhad chyby aproximace horší než u obdélníkového pravidla, přestože u obdélníkového pravidla užíváme nahrazení konstantními funkcemi a u lichoběžníkového pravidla používáme nahrazení lineárními funkcemi. Z uvedených vzorců pro odhad chyby aproximace lze určit, jaký počet dílků zaručí požadovanou přesnost aproximace. Jelikož ovšem odhady obsahují druhé derivace, jejichž hodnoty není vždy lehké odhadnout, může být výpočet počtu potřebných dílků náročný a výsledek odhadu pesimistický. Čtenář, který se chce seznámit s problematikou určitého integrálu a jeho numerickým výpočtem podrobněji, tak může učinit v [1], [3] nebo [5].

Příklad 1 Pomocí obdélníkového a lichoběžníkového pravidla spočtěte přibližně obsah jednotkového kruhu a porovnejte výsledky pro $n = 10^2$ a $n = 10^4$ se skutečným obsahem daného kruhu.



Obrázek 6: Jednotkový kruh

Příklad 2 Pomocí obdélníkového a lichoběžníkového pravidla spočtěte přibližně obsah srdce na obrázku 7 a porovnejte výsledky pro $n = 10^2$ a $n = 10^4$ se skutečným obsahem.



Obrázek 7: Matematické srdce

Příklad 3 Aproximujte hodnotu integrálu

$$\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x$$

pomocí obdélníkového pravidla tak, aby chyba aproximace byla nejvýše 10^{-4}. Určete počet dílků dělení intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, který zaručí dosažení požadované přesnosti.

V tomto cvičení se pokusíme vytvořit matematický model, který popisuje, jakým způsobem se mění koncentrace léku v krvi v závislosti na čase. Abychom mohli takovýto model sestrojit, potřebujeme pracovat se speciálním typem rovnice - s tzv. diferenciální rovnicí. Navíc musíme vědět, jak můžeme diferenciální rovnice numericky řešit. Tomu se budeme věnovat nyní.

Obyčejnou diferenciální rovnicí 1. řádu rozumíme rovnici tvaru

$$y'(t) = f(t, y(t)),$$

kde $f\colon \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ je zadaná funkce. Řešením této rovnice na otevřeném intervalu (a, b) rozumíme každou funkci $\bar{y}\colon (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ $(a < b)$ takovou, že pro všechna $t \in (a, b)$ platí

$$\bar{y}'(t) = f(t, \bar{y}(t)).$$

Například funkce $\bar{y}(t) = t$, $t \in (0, +\infty)$, je řešením diferenciální rovnice $y'(t) = \frac{y(t)}{t}$ na intervalu $(0, +\infty)$. Jiným řešením této rovnice na intervalu $(0, +\infty)$ je například funkce $\bar{y}(t) = 2t$, $t \in (0, +\infty)$, či $\bar{y}(t) = 3t$, $t \in (0, +\infty)$. Není těžké ukázat, že každá funkce $\bar{y}_k(t) = kt$, $t \in (0, +\infty)$ $(k \in \mathbb{R})$, je řešením diferenciální rovnice $y'(t) = \frac{y(t)}{t}$ na intervalu $(0, +\infty)$. Naše úloha má nekonečně mnoho řešení. Zkusme navíc přidat k naší rovnici například podmínku $y(1) = 2$, tj. chceme nalézt funkci, která řeší naši rovnici a navíc její funkční hodnota v $t = 1$ je rovna 2. Lze ukázat, že taková úloha má na $(0, +\infty)$ pouze jediné řešení $\bar{y}(t) = 2t$.

Úlohu, která se skládá z hledání řešení obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu, které má navíc splňovat tzv. počáteční podmínku $y(t_0) = y_0$, nazýváme Cauchyovou úlohou a zapisujeme ji obecně takto:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{4}$$

Pokud má funkce $f(t, y(t))$ speciální tvar[3], pak existují metody, jak analyticky řešit výše popsanou Cauchyovou úlohu. Často však analytické řešení nalézt nelze nebo by jeho nalezení bylo příliš náročné. V takovém případě se nabízí použití některé z numerických metod pro přibližné řešení diferenciálních rovnic 1. řádu s počáteční podmínkou. Podívejme se nyní na jednu z těchto metod – Eulerovu metodu[4]. O funkci f budeme dále předpokládat, že je v množině $D = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t_0 \leq t\}$ spojitá a také jsou v D spojité derivace této funkce podle proměnné y.

[3]Například f závisí lineárně na y, tj. $f(t, y) = a(t)y + b(t)$, kde a a b jsou reálné funkce.
[4]Publikoval ji významný švýcarský matematik a fyzik Leonhard Euler v roce 1768.

`Eulerova metoda`

Eulerova metoda je nejjednodušší způsob numerického řešení Cauchyových úloh. Výstup Eulerovy metody nám aproximuje řešení Cauchyovy úlohy (4) na intervalu $\langle t_0, t_N \rangle$. Metoda využívá aproximace derivace[5] funkce y v bodě t pomocí tzv. diference y v tomto bodě

$$y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h},$$

kde h je „malé".

Po jednoduché úpravě dostaneme

$$y(t+h) \approx y(t) + hy'(t).$$

Použijeme-li (4), pak získáme vztah

$$y(t+h) \approx y(t) + hf(t, y(t)). \tag{5}$$

Dále zvolme „dostatečně malou" pevnou velikost h a sestrojme posloupnost

$$t_0,\ t_1 \overset{\text{def.}}{=} t_0 + h,\ t_2 \overset{\text{def.}}{=} t_0 + 2h,\ \ldots,\ t_N \overset{\text{def.}}{=} t_0 + Nh$$

Označme pomocí y_n aproximaci hodnoty přesného řešení $y(t_n)$. Z (5) dostaneme rekurzivní vztah

$$\boxed{\begin{array}{l} y_0 = y(t_0), \\ y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n),\ n = 0, 1, \ldots, N, \end{array}}$$

který použijeme pro numerické řešení Cauchyovy úlohy (4). Dá se ukázat, že chyba aproximace řešení pomocí Eulerovy metody v bodě t_1 je přímo úměrná druhé mocnině velikosti kroku h. Chyba aproximace řešení v bodě t_N je přímo úměrná velikosti h.

Nyní přichází čas sestrojit si jednoduchý model pro odhad poklesu koncentrace dané látky v krvi člověka. Nechť funkce $C(t)$ udává okamžitou koncentraci látky (vhodného léku) v krvi v čase t (v $\mu g/ml$). Lékařskými pokusy bylo zjištěno, že rychlost poklesu koncentrace této látky v krvi je přímo úměrný její samotné koncentraci, tj. platí:

$$C'(t) = -kC(t),$$

kde $k > 0$ je konstanta[6]. Tato konstanta popisující úbytek dané látky je určena dvěma farmakokinetickými parametry, kterými jsou *clearance* (míra schopnosti organismu eliminovat látku) a *distribuční objem* (míra kapacity zdánlivého prostoru, který je v organismu pro tuto látku k dispozici). Clearance budeme dále značit Cl a jeho jednotky budou ml/min,

[5] Pro jistotu zde připomínáme její definici $y'(t) \overset{\text{def.}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{y(t+h)-y(t)}{h}$.

[6] Hodnota k závisí na léku a pacientovi.

distribuční objem označíme v_d a jeho jednotky budou l. Pokud zvolíme jako jednotku času hodiny, můžeme konstantu k popsat následující závislostí

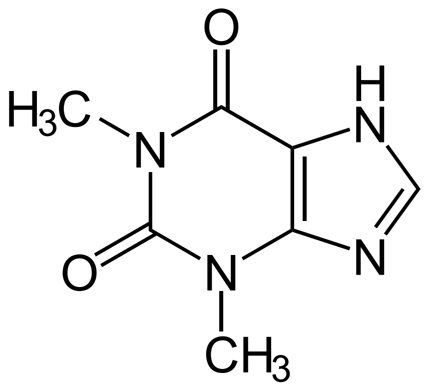
$$k = \frac{Cl \cdot \frac{60}{1000}}{v_d}.$$

Dále pro jednoduchost předpokládejme, že látka je distribuována do krve intravenózní injekcí a rozšiřuje se do krve okamžitě. Předpokládejme, že tímto způsobem byla v čase $t = 0$ dodáno do krve takové množství látky, že její koncentrace v krvi měla hodnotu C_0. Tím jsme získali jednoduchý model, popisující hodnoty koncentrace látky v krvi po její intravenózní aplikaci:

$$\begin{cases} C'(t) = -kC(t), \\ C(0) = C_0. \end{cases} \tag{6}$$

U léčiv je dalším významným farmakokinetickým parametrem *účinná koncentrace*. Ta udává hodnotu koncentrace či interval hodnot koncentrací, při kterých látka působí prospěšně na organismus. Pokud známe hodnotu výše zmíněných farmakokinetických parametrů pro konkrétní léčivo, můžeme využít řešení úlohy (6) pro odpověď na otázku, jak často lék obsahující tuto látku pacientovi aplikovat pro zajištění úspěšné léčby. V následujících příkladech předpokládáme, že pacientem je průměrná osoba s tělesnou hmotností 70 kg. Hodnoty farmakokinetických parametrů pro léčiva z těchto příkladů byly převzaty z [4], kde se lze seznámit s oblastí farmakokinetiky daleko detailněji.

Příklad 1 Pro léčbu nemocného s průduškovým astmatem se používá theofylin. Jeho



Obrázek 8: Molekula theofylinu

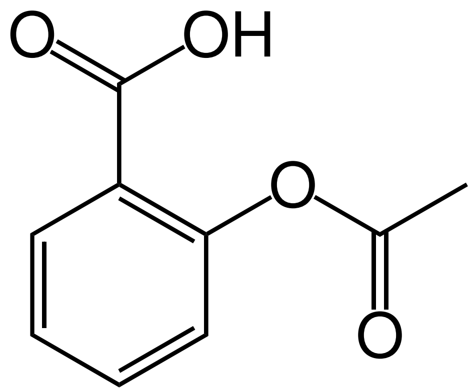
farmakokinetické parametry jsou:

$$Cl = 48\,(ml/min),\;\; v_d = 35\,(l),\;\; \text{účinná koncentrace} = 10 - 20\,(\mu g/ml).$$

Toto léčivo musíme pacientovi podávat v pravidelných časových intervalech tak, aby jeho koncentrace v krvi léčené osoby nepřesáhla horní mez účinné koncentrace a neklesla pod její dolní mez. Na začátku léčby byla aplikována zaváděcí dávka, která způsobila, že v čase $t = 0$

byla koncentrace theofylinu v krvi $C_0 = 20(\mu g/ml)$. Další dávky chceme aplikovat vzhledem k pohodlí pacienta tak, aby interval podávání léku byl co největší. Zjistěte po jakém čase (v hodinách) je nutné lék obsahující theofylin znovu podat pacientovi. Připomeňme, že aby byla léčba účinná, je třeba lék pacientovi podat dříve než koncentrace theofylinu klesne pod dolní mez účinné koncentrace.

Příklad 2 Pro léčbu horečnatých stavů, bolesti hlavy, svalů či kloubů se používá kyselina acetylsalicylová[7]. Její farmakokinetické parametry jsou:



Obrázek 9: Molekula kyseliny acetylsalicylové

$$Cl = 650\,(ml/min),\ \ v_d = 11\,(l),\ \ \text{účinná koncentrace} = 150 - 300\,(\mu g/ml).$$

Toto léčivo musíme pacientovi podávat v pravidelných časových intervalech tak, aby jeho koncentrace v krvi léčené osoby nepřesáhla horní mez účinné koncentrace a neklesla pod její dolní mez. Na začátku léčby byla aplikována zaváděcí dávka, která způsobila, že v čase $t = 0$ byla koncentrace kyseliny acetylsalicylové v krvi $C_0 = 300(\mu g/ml)$. Další dávky chceme aplikovat vzhledem k pohodlí pacienta tak, aby interval podávání léku byl co největší. Zjistěte po jakém čase (v hodinách) je nutné lék obsahující kyselinu acetylsalicylovou znovu podat pacientovi. Aby byla léčba účinná, je třeba lék pacientovi podat dříve než koncentrace kyseliny acetylsalicylové klesne pod dolní mez účinné koncentrace.

[7] Je hlavní složkou léků jako je Aspirin, Acylpirin či Anopyrin.

Cvičení 4: Tak je to padělek nebo to není padělek aneb jak poznat stáří některých „Vermeerových“ obrazů?

Než se začneme zabývat tvorbou dalšího matematického modelu, vrátíme se v čase do doby krátce po konci druhé světové války. Těsně po válce zjistila nizozemská policie, že během války bylo prodáno několik Vermeerových[8] obrazů německému ministrovi letectví Hermannu Göringovi. Tuto transakci zprostředkoval Han van Meegeren. Na základě těchto zjištěných faktů byl 29.5.1945 van Meegeren zadržen a obviněn z kolaborace s nepřítelem. 12.7.1945 van Meegeren vydal prohlášení, že Göringovi nikdy žádný Vermeerův obraz neprodal. Naopak Göringa napálil, protože obrazy, které mu prodal, jsou podvrhy Vermeerových obrazů a sám je vytvořil.

A aby dokázal své tvrzení, začal jeden z „Vermeerových“ obrazů[9] napodobovat. Van Meegeren přizvaným znalcům předvedl způsob, jakým vytváří barvy, jak připravuje plátno, či jak zařídí, aby povrch malby vypadal jako u několik set let starého obrazu. Těsně před dokončením podvrhu Vermeerova obrazu se van Meegeren dozvěděl, že obvinění z kolaborace, bude nahrazeno obviněním z padělatelství, a tak odmítl tuto kopii dokončit. I tak ale většina přizvaných odborníků uznala, že obrazy prodané Göringovi jsou pravděpodobně falzum a van Meegeren byl 12.10.1947 odsouzen za padělatelství na rok do vězení, ve kterém 30.12.1947 na infarkt zemřel.

I přesto, že komise, která posuzovala pravost „Vermeerových“ obrazů uznala, že to jsou pravděpodobně podvrhy vytvořené van Meegerenem, zůstávali odborníci u některých obrazů, k jejichž autorství se také van Meegeren přihlásil, na pochybách. Zejména zpochybňování pravosti obrazu Emauzští učedníci, který zakoupilo muzeum v Rotterdamu za 170 000 dolarů, vyvolával velké spory. Proto se přistoupilo u tohoto obrazu v roce 1967 k metodě radioaktivního datování, která měla tyto pochyby rozhodnout.

Metoda radioaktivního datování využívá toho, že některé tzv. radioaktivní prvky jsou nestabilní a část jejich atomů se samovolně rozpadá na atomy jiných prvků. Experimenty bylo zjištěno, že rychlost rozpadu atomů radioaktivních prvků je přímo úměrná počtu těchto atomů. Pokud funkci udávající počet atomů radioaktivního prvku v čase t v gramu látky označíme jako $N(t)$, pak výše zmíněnou závislost můžeme popsat diferenciální rovnicí

$$N'(t) = -\lambda N(t), \tag{7}$$

kde λ je konstanta, která popisuje rychlost rozpadu atomů daného radioaktivního prvku. Tato konstanta je dána pro každý radioaktivní prvek tímto vztahem

$$\lambda = \frac{\ln 2}{\text{poločas rozpadu prvku v minutách}}.$$

Čas t v našem modelu budeme měřit v minutách a jednotka konstanty λ je v min^{-1}.

Metoda radioaktivního datování je založena na jednoduchém pozorování. Pokud bychom věděli, kolik atomů radioaktivního prvku měla látka v jednom svém gramu při svém vzniku

[8] Jan Vermeer (1632 - 1675) byl nizozemský malíř.

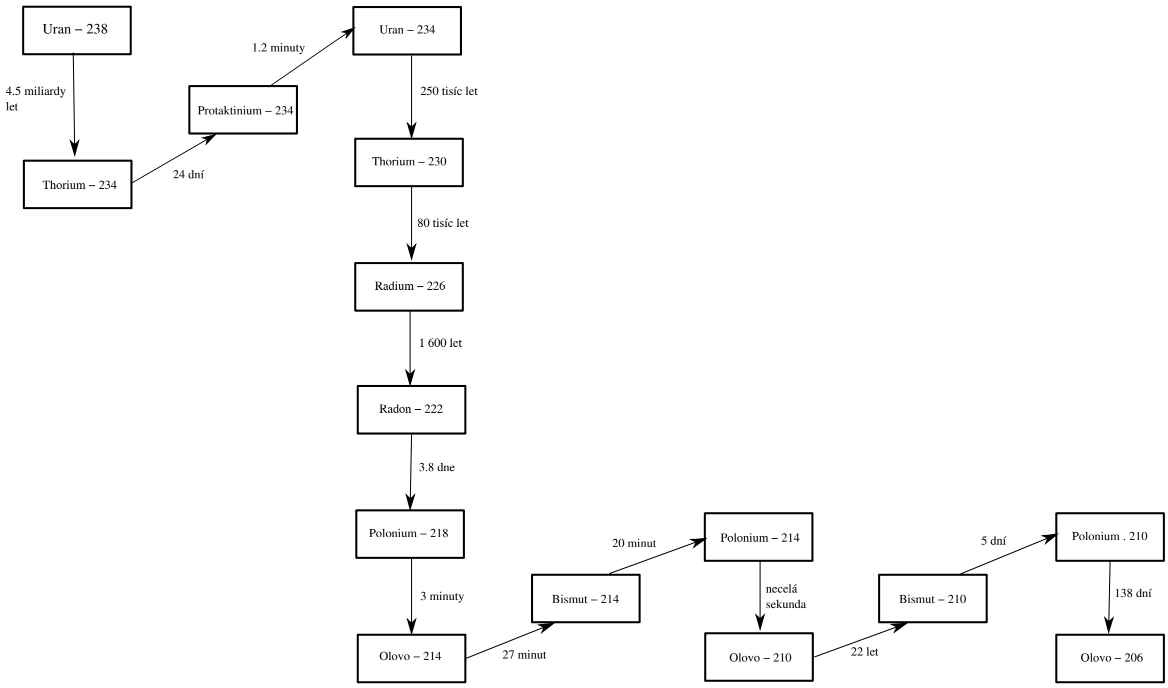
[9] „Ježíš mezi znalci Písma“

(tzn. známe hodnotu N_0, pro kterou platí $N(0) = N_0$), a znali bychom také aktuální počet těchto atomů v gramu látky, mohli bychom řešením úlohy

$$\begin{cases} N'(t) = -\lambda N(t), \\ N(0) = N_0. \end{cases} \tag{8}$$

zjistit, jak je tato látka stará.

Než se začneme zabývat datováním „Vermeerových“ obrazů, uvědomme si, že všechny horniny na Zemi obsahují malé množství radioaktivního uranu, který se rozpadá na atomy dalšího prvku. Tyto atomy se opět samovolně mění na další atomy atd. (viz obrázek 10).



Obrázek 10: Uranová rozpadová řada (časy u šipek udávají poločasy rozpadu jednotlivých radioaktivních prvků)

Dále je známo, že olovnatá běloba používaná na malbách obsahuje oxid olovnatý, který obsahuje malé množství olova-210 a ještě menší množství radia-226. V okamžiku, kdy je barva obsahující oxid olovnatý vyrobena, začnou se atomy olova-210 velmi rychle rozpadat s poločasem rozpadu 22 let a množství olova-210 v této barvě klesá. Na druhé straně vzniká malé množství olova-210 rozpadem radia-226 (a prvků, které následují v rozpadové řadě za ním). Tento proces můžeme popsat následující diferenciální rovnicí

$$\begin{cases} N'(t) = -\lambda N(t) + r(t), \\ N(0) = N_0, \end{cases} \tag{9}$$

kde $N(t)$ je funkce udávající počet atomů olova-210 v čase t v gramu látky, $r(t)$ je funkce udávající počet atomů olova-210, které vzniknou v čase t v gramu oxidu olovnatého za minutu.

Protože poločas rozpadu radia-226 je 1600 let a metodu radioaktivního datování chceme použít pro rozpoznání stáří obrazů, které měly v roce 1967 přibližně buď 300 let nebo 20 let, můžeme funkci $r(t)$ považovat za konstantní. Pak $r(t) = r =$ konst. a rovnici (9) můžeme nahradit rovnicí

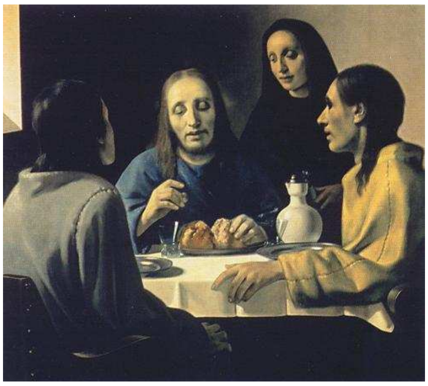
$$\begin{cases} N'(t) = -\lambda N(t) + r, \\ N(0) = N_0. \end{cases} \tag{10}$$

Mnohem více podrobností o metodě radioaktivního datování může čtenář nalézt v [2].

Také v případě rovnice (10) jsme schopni, pokud známe počet atomů olova-210 v gramu oxidu olovnatého v době výroby olovnaté běloby určit stáří obrazu, na kterém je tato barva použita. K řešení této rovnice můžeme opět použít Eulerovu metodu, se kterou jste se seznámili v minulém cvičení. V naší úloze počet atomů olova-210 v gramu oxidu olovnatého v době výroby barvy bohužel neznáme. I přesto jsme schopni rozlišit obraz jehož stáří je 300 let od obrazu, který má 20 let. Je totiž známo, jaké bývají koncentrace radioaktivního olova-210 v rudách, ze kterých se vyrábí oxid olovnatý. Je naprosto nemožné, aby počet atomů olova-210 v gramu rudy, ze které se oxid olovnatý vyrobil přesáhl počet $5 \cdot 10^{11}$. Proto můžeme zjistit, pokud známe potřebné parametry, zda je možné, aby bylo stáří obrazu 300 let. V následujících příkladech použijte: 1 rok = 525 600 minut.

Příklad 1 Určete, zda je možné, aby byl obraz Emauzští učedníci opravdu starý 300 let a byl tedy pravý, pokud bylo měřením zjištěno, že v čase t platí

$$N(t) = 1,42 \cdot 10^8, \; r = 0,8.$$



Obrázek 11: Emauzští učedníci

Příklad 2 Určete, zda je možné, aby byl obraz Krajkářka opravdu starý 300 let a byl tedy pravý, pokud bylo měřením zjištěno, že v čase t platí

$$N(t) = 0,25 \cdot 10^8, \; r = 1,4.$$

Obrázek 12: Krajkářka

Reference

[1] J. Bouchala: *Matematická analýza 1*. VŠB-TU Ostrava (2000).
(Anglická verze: http://www.am.vsb.cz/bouchala/MA1/MathematicalAnalysis.pdf)

[2] M. Braun: *Differential Equations and Their Applications*. Springer Verlag (1993).

[3] J. Daněk: *Přednáška o numerickém integrování*. ZČU v Plzni.
(http://www.cam.zcu.cz/~danek/Students/2006_LS/soubory/prednasky/NM_prednaska_10.pdf)

[4] B.G. Katzung: *Základní a klinická farmakologie*. H & H (1994).

[5] K. Rektorys a spolupracovníci: *Přehled užité matematiky I*. Prometheus (2000).

[6] K. Sigmon: *Matlab Primer*. University of Florida (1993).

Apendix A: Funkce arkussinus

Uvažujme nejprve funkci $f\colon\ \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Funkci f^{-1}, pro niž současně platí

i) její definiční obor Df^{-1} je roven oboru hodnot funkce f,

ii) pro každé $x \in Df^{-1}$ platí, že $f^{-1}(x) = y \ \Leftrightarrow\ f(y) = x$,

nazveme **funkcí inverzní** k funkci f.

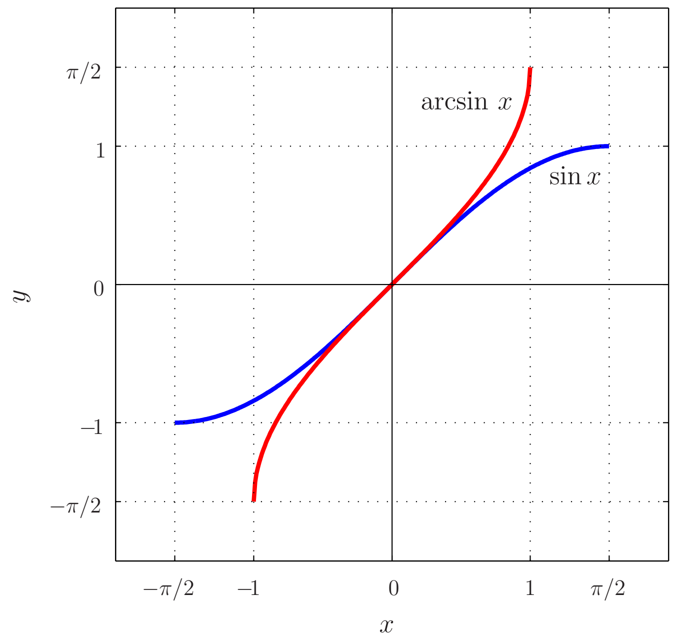
Lze ukázat, že f^{-1} existuje právě tehdy, je-li f prostá. Graf f^{-1} je přitom osově souměrný s grafem f dle přímky $y = x$.

Funkci inverzní k funkci sinus zúžené na interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ nazveme **arkussinus** a označujeme jako arcsin, tj.

$$\arcsin \stackrel{\text{def.}}{=} \left(\sin|_{\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle} \right)^{-1}.$$

Funkce arkussinus má tyto vlastnosti (viz také níže uvedený obrázek):

- definiční obor je roven $\langle -1, 1 \rangle$,
- oborem hodnot je interval $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$,
- funkce arcsin je lichá, tj. $\arcsin x = \arcsin{(-x)}$ pro každé $x \in \langle -1, 1 \rangle$.



- $(c)' = 0,\ c \in \mathbb{R}$ (konst.),
- $(x^r)' = rx^{r-1},\ r \in \mathbb{R},\ x \in (0, +\infty)$,
- $(\sin x)' = \cos x,\ x \in \mathbb{R}$,
- $(\cos x)' = -\sin x,\ x \in \mathbb{R}$,
- $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x,\ x \in \mathbb{R}$,
- $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x},\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$,
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}$,
- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x},\ x \in (0, +\infty)$,

Je-li $x \in \mathbb{R}$, pak platí

- $(cf)'(x) = cf'(x)$, je-li $c \in \mathbb{R}$ konstanta a existuje-li derivace $f'(x)$,
- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$, má-li pravá strana rovnosti smysl,
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, má-li pravá strana rovnosti smysl,
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, má-li pravá strana rovnosti smysl a je-li $g(x) \neq 0$.