

Hlavlomy a teorie grafů

Petr Kovář¹

petr.kovar@vsb.cz

¹Vysolá škola báňská – Technická univerzita Ostrava,

Škola matematického modelování, 2009

Osnova

Pojem grafu

Vrcholy a hrany

Eulerovské grafy

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

Stavový graf

Úloha s vínem

Barycentrické

souřadnice

Hanojské věže

Závěr

Přehled přednášky

Pojem grafu

Vrcholy a hrany

Eulerovské grafy

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

Stavový graf

Úloha s vínem

Barycentrické souřadnice

Úloha hanojských věží

Závěr

Osnova

Pojem grafu

Vrcholy a hrany

Eulerovské grafy

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

Stavový graf

Úloha s vínem

Barycentrické

souřadnice

Hanojské věže

Závěr

Osnova

Pojem grafu

Vrcholy a hrany

Eulerovské grafy

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

Stavový graf

Úloha s vínem

Barycentrické

souřadnice

Hanojské věže

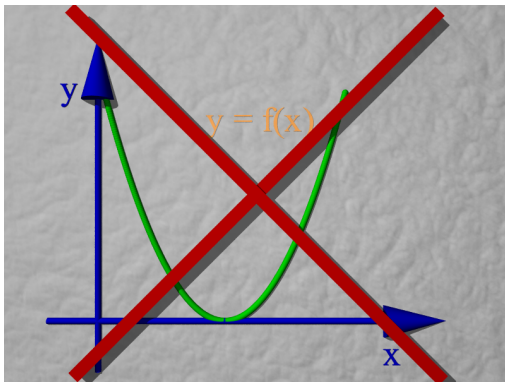
Závěr

Pojem grafu

Co není (náš) graf ...

Definice

Graf je dvojice množin (V, E) . V je neprázdná množina vrcholů, E je množina dvouprvkových podmnožin množiny V .



Hlavlomy a grafy

Osnova

Pojem grafu

Vrcholy a hrany

Eulerovské grafy

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

Stavový graf

Úloha s vínem

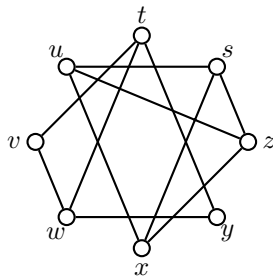
Barycentrické
souřadnice

Hanojské věže

Závěr

Definice (přeformulovaná)

Graf je dvojice množin (V, E) . V je množina bodů v rovině a množina hran E obsahuje spojnice vrcholů v rovině.



Osnova

Pojem grafu

Vrcholy a hrany

Eulerovské grafy

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

Stavový graf

Úloha s vínem

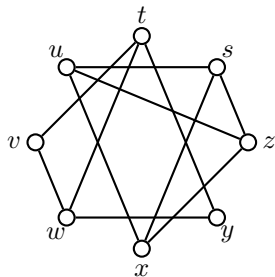
Barycentrické

souřadnice

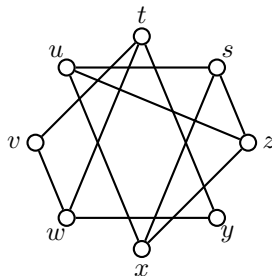
Hanojské věže

Závěr

Graf je šikový díky přehlednému znázornění.



- ▶ objekty – vrcholy
- ▶ objekty spolu souvisí – mezi vrcholy je hrana
- ▶ objekty spolu nesouvisí – mezi vrcholy není hrana



- ▶ **Stupeň vrcholu** – počet hran, které vycházejí z vrcholu.
- ▶ **Tah v grafu** – posloupnost vrcholů a hran, které na sebe “navazují”, žádná hrana se neopakuje.
Například u, s, z, u, x, z .
- ▶ **Souvislý graf** – mezi každými dvěma vrcholy v grafu najdeme tah.

Osnova

Pojem grafu

Vrcholy a hrany

Eulerovské grafy

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

Stavový graf

Úloha s vínem

Barycentrické

souřadnice

Hanojské věže

Závěr

Osnova

Pojem grafu

Vrcholy a hrany

Eulerovské grafy

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

Stavový graf

Úloha s vínem

Barycentrické
souřadnice

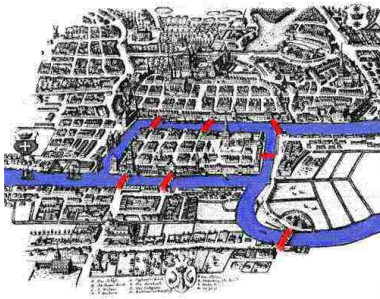
Hanojské věže

Závěr

Eulerovské grafy

Problém mostů města Královce 1736

Pruské město Královec leží na řece Pregole. Řeka vytváří dva ostrovy, které byly s městem spojeny sedmi mosty.



Otázka

Mohu všechny mosty přejít tak, abych vstoupil na každý most pouze jednou?

Osnova

Pojem grafu

Vrcholy a hrany

Eulerovské grafy

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

Stavový graf

Úloha s vínem

Barycentrické

souřadnice

Hanojské věže

Závěr

Osnova

Pojem grafu

Vrcholy a hrany

Eulerovské grafy

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

Stavový graf

Úloha s vínem

Barycentrické

souřadnice

Hanojské věže

Závěr



Leonhard Euler (1707–1783)

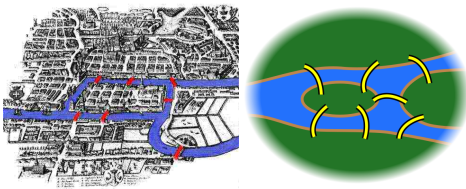
Problém byl vyřešen Leonhardem Eulerem v roce 1736.
Euler dokázal, že to možné není.

Věta

Graf G lze nakreslit jedním otevřeným tahem právě když G je souvislý a právě dva vrcholy v G jsou lichého stupně.

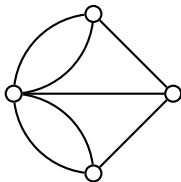
Přeformulování do řeči teorie grafů

Hlvolamy a grafy



Sestavíme graf:

- ▶ vrcholy – oba břehy a oba ostrovy
- ▶ hrany – mosty, které břehy a ostrovy spojují



Procházka v grafu:

posloupnost vrcholů a hran, které na sebe navazují.

Osnova

Pojem grafu

Vrcholy a hrany

Eulerovské grafy

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

Stavový graf

Úloha s vínem

Barycentrické

souřadnice

Hanojské věže

Závěr

Věta o kreslení jedním tahem

Definice

Tah v grafu G je taková posloupnost vrcholů a hran

$$v_0, v_0 v_1, v_1, v_1 v_2, v_2, \dots, v_{n-1} v_n, v_n,$$

kde v_i jsou vrcholy grafu G a $v_i v_{i+1}$ jsou hrany grafu G a žádná hrana se neopakuje. V **cestě** se neopakují ani vrcholy. Počet hran tahu nazveme **délkou tahu/cesty** $v_0 v_n$.

Definice

Eulerovský tah je tah, který obsahuje všechny hrany daného grafu. Graf, ve kterém existuje eulerovský tah se nazývá **eulerovský graf**.

Věta

Graf G je možno nakreslit jedním (uzavřeným) tahem, právě když G je souvislý a všechny vrcholy v G jsou sudého stupně.

Důkaz matematickou indukcí vzhledem k počtu hran.

Procházka Královcem není možná

Hlavlomy a grafy

Osnova

Pojem grafu

Vrcholy a hrany

Eulrovské grafy

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

Stavový graf

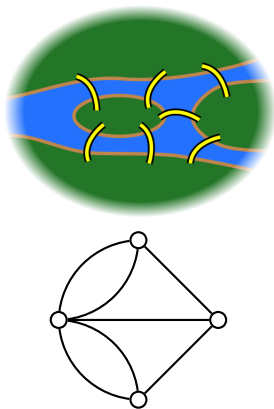
Úloha s vínem

Barycentrické

souřadnice

Hanojské věže

Závěr



Vidíme ihned, užitím Eulerovy věty.

Indukcí vzhledem k počtu hran (jen myšlenka důkazu).

► Základ indukce:

Lze použít triviální graf. Pro netriviální souvislý graf G je každý vrchol stupně alespoň 2. Nejmenší takový graf je cyklus C_n . G je jistě možno nakreslit jedním uzavřeným tahem (proč?).

► Indukční krok:

Předpokládejme, že každý souvislý graf s méně než $|E|$ hranami je možno nakreslit jedním uzavřeným tahem. V G najdeme cyklus C (každý vrchol stupně alespoň 2). V grafu $G - C$ jsou vrcholy sudého stupně a nebo izolované vrcholy. Pokud $G - C$ není souvislý, lze každou jeho komponentu dle indukčního předpokladu nakreslit jedním tahem.

Nyní přidáme do cyklu C uzavřený tah pro každý vrchol další v_i , který leží v některé komponentě. Získáme uzavřený tah grafem G .

Podle principu matematické indukce je důkaz hotov.

Osnova

Pojem grafu

Vrcholy a hrany

Eulerovské grafy

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

Stavový graf

Úloha s vínem

Barycentrické

souřadnice

Hanojské věže

Závěr

Věta

Graf G lze nakreslit jedním otevřeným tahem, právě když G je souvislý a právě dva vrcholy v G jsou lichého stupně.

Věta

Graf G lze nakreslit k otevřenými tahy, právě když G je souvislý a právě $2k$ vrcholů v G je lichého stupně.

Dokáží se jako důsledek první věty.

Osnova

Pojem grafu

Vrcholy a hrany

EuleroVské grafy

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

Stavový graf

Úloha s vínem

Barycentrické

souřadnice

Hanojské věže

Závěr

Jednotažky

- ▶ kdy jde obrázek nakreslit jedním tahem?
- ▶ kdy nejde obrázek nakreslit jedním tahem?
- ▶ kolika (minimálně) tahy jde obrázek nakreslit?

Příklady, kdy preferujeme “kreslení jedním tahem”

- ▶ uklízení sněhu z ulic
- ▶ vyvážení odpadků
- ▶ roznášení pošty
- ▶ vyšívání
- ▶ v teorii kódování

Samozřejmě někdy má smysl řešit úlohy více tahy.

Osnova

Pojem grafu

Vrcholy a hrany

Eulerovské grafy

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

Stavový graf

Úloha s vínem

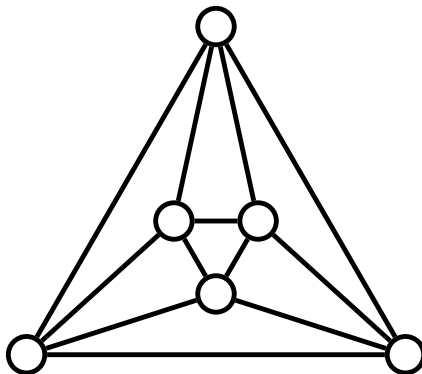
Barycentrické

souřadnice

Hanojské věže

Závěr

Jde následující obrázek nakreslit jedním tahem?



Ano!

Osnova

Pojem grafu

Vrcholy a hrany

Eulerovské grafy

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

Stavový graf

Úloha s vínem

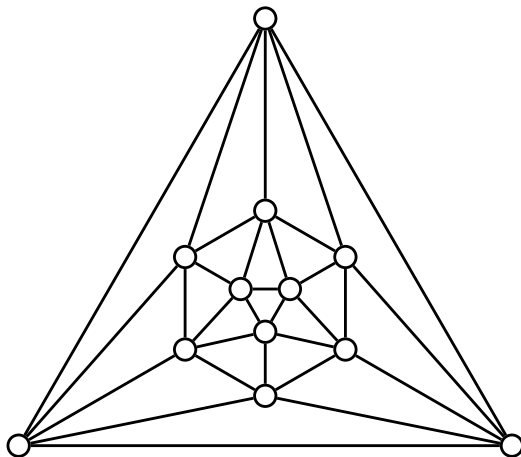
Barycentrické

souřadnice

Hanojské věže

Závěr

Jde následující obrázek nakreslit jedním tahem?



Ne!

Osnova

Pojem grafu

Vrcholy a hrany

Eulerovské grafy

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

Stavový graf

Úloha s vínem

Barycentrické

souřadnice

Hanojské věže

Závěr

Osnova

Pojem grafu

Vrcholy a hrany

Eulerovské grafy

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

Stavový graf

Úloha s vínem

Barycentrické
souřadnice

Hanojské věže

Závěr

Stavový graf

Máme osmi litrovou nádobu s vínem a dvě prázdné nádoby – pětilitrovou a třilitrovou. Rozdělte osm litrů na čtyři a čtyři litry jen s užitím těchto nádob, bez použití odměrky.

Ve zjednodušené verzi použito ve filmu *Smrtonosná past 3*: John McClain (Bruce Willis) a Zeus (Samuel L. Jackson) musí odměřit 4 galony vody; mají k dispozici nádoby o objemu tři a pět galonů.



Úlohu zformulujeme v řeči teorie grafů, vyřešíme, zobecníme a zobecněnou úlohu také vyřešíme.

Osnova

Pojem grafu

Vrcholy a hrany

Eulerovské grafy

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

Stavový graf

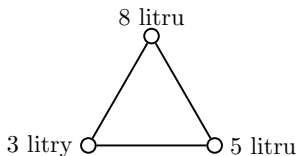
Úloha s vínem

Barycentrické

souřadnice

Hanojské věže

Závěr



Je třeba vhodně zvolit graf. Evidentně nestačí.

Sestavíme tzv. **stavový graf**:

- ▶ každý vrchol reprezentuje přípustné rozdělení osmi litrů do tří nádob
- ▶ hrany spojí dva vrcholy, pokud je možno z jednoho rozdělení obdržet přelitím druhé rozdělení a naopak

Orientované hrany, kdy je možné přelití jen jedním směrem, zavádět nebudeme.

Osnova

Pojem grafu

Vrcholy a hrany

Eulerovské grafy

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

Stavový graf

Úloha s vínem

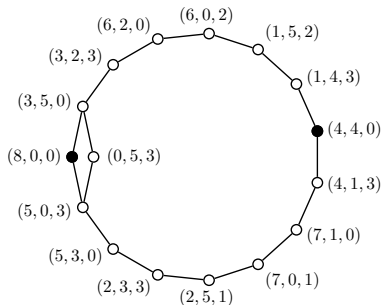
Barycentrické

souřadnice

Hanojské věže

Závěr

Dostaneme následující graf a snadno najdeme řešení.



- ▶ existuje několik řešení (kolik?)
- ▶ nejkratší na sedm přelití

Osnova

Pojem grafu

Vrcholy a hrany

Eulerovské grafy

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

Stavový graf

Úloha s vínem

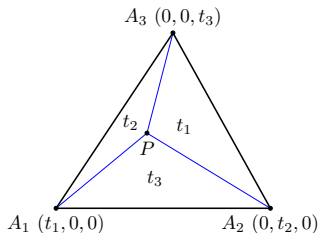
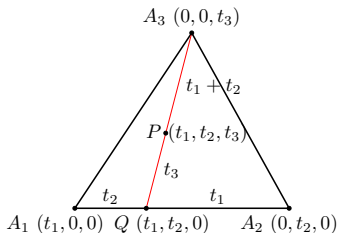
Barycentrické

souřadnice

Hanojské věže

Závěr

Zvolíme v rovině libovolný trojúhelník $A_1A_2A_3$.



P je hmotný střed soustavy s hmotnostmi t_1 , t_2 , t_3 ve vrcholech A_1 , A_2 , A_3 .

Pro každý bod v rovině můžeme zvolit vhodné (i záporné) hmotnosti t_i , dostaneme **barycentrické souřadnice**.

Osnova

Pojem grafu

Vrcholy a hrany

Eulerovské grafy

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

Stavový graf

Úloha s vínem

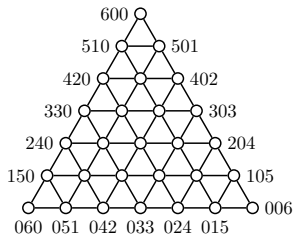
Barycentrické
souřadnice

Hanojské věže

Závěr

Rozmístíme-li do vrcholů A_1, A_2, A_3 body o součtu hmotností $t_1 + t_2 + t_3 = k$, dostaneme síť:

- ▶ vrcholy na obrázku mají celočíselné souřadnice,
- ▶ hrana, jestliže se dvě souřadnice liší o jedničku.



- ▶ Jak zobecnit pro více bodů?
- ▶ Jak by vypadal graf pro čtyřmi celočíselné souřadnice?

Osnova

Pojem grafu

Vrcholy a hrany

Eulerovské grafy

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

Stavový graf

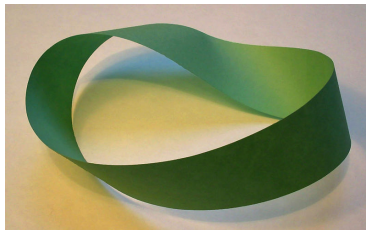
Úloha s vínem

Barycentrické
souřadnice

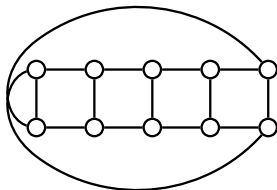
Hanojské věže

Závěr

August Möbius (1790 – 1868)



Barycentrické souřadnice zavedl August Möbius, matematik a astronom.



Möbiův žebřík

Hlavlomy a grafy

Osnova

Pojem grafu

Vrcholy a hrany

Eulerovské grafy

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

Stavový graf

Úloha s vínem

Barycentrické
souřadnice

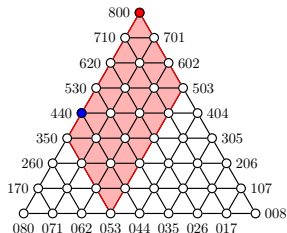
Hanojské věže

Závěr

Řešení užitím barycentrických souřadnic

Sestavíme graf:

- ▶ vrcholy – body o celkové hmotnosti 8,
- ▶ hrany – dva vrcholy, jejichž barycentrické souřadnice se liší o jedničku ve dvou složkách.



První souřadnice odpovídá osmlitrové nádobě, druhá pětilitrové nádobě a třetí třílitrové nádobě.

Červené hrany ohraničují oblast, která odpovídá omezením úlohy.

Osnova

Pojem grafu

Vrcholy a hrany

Eulerovské grafy

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

Stavový graf

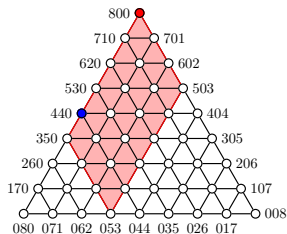
Úloha s vínem

**Barycentrické
souřadnice**

Hanojské věže

Závěr

Řešení užitím barycentrických souřadnic



Červeně – výchozí stav.

Modře – hledané řešení.

Musíme vždy přelít

- ▶ celý obsah jedné nádoby
- ▶ nebo dolít jinou nádobu do plna.

Pohybu po hranách uvnitř červeného oblasti “od kraje ke kraji”.

Hledáme posloupnost čar z červeného vrcholu do modrého vrcholu.

Osnova

Pojem grafu

Vrcholy a hrany

Eulerovské grafy

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

Stavový graf

Úloha s vínem

Barycentrické
souřadnice

Hanojské věže

Závěr

Vrcholy a hrany

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

Barycentrické

souřadnice

Hanojské věže

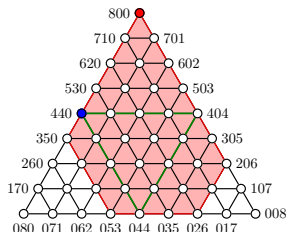
Závěr

1. naplníme pětilitrovou nádobu; přejdeme do (350).
2. z 5-litrové naplníme 3-litrovou; přejdeme do (323).
3. obsah 3-litrové do 8-litrové; přejdeme do (620).
4. obsah 5-litrové do 3-litrové nádoby; přejdeme do (602).
5. z 8-litrové 5-litrovou nádobu; přejdeme do (152).
6. z 5-litrové odlijeme do 3-litrové 1litr; přejdeme do (143).
7. obsah 3-litrové do 8-litrové nádoby; přejdeme do (440).

Proč tak složité?

Hodí se pro složitější problém!

Změňte objem jedné nádoby tak, aby úloha neměla řešení.



Nemusíme zkoušet různá čísla, z grafu s barycentrickými souřadnicemi uvidíme hned: třeba 8, 6 a 5 litrů.

Na zelenou “smyčku” není možné podle pravidel vstoupit!

Osnova

Pojem grafu

Vrcholy a hrany

Eulerovské grafy

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

Stavový graf

Úloha s vínem

Barycentrické
souřadnice

Hanojské věže

Závěr



Máme tři kolíky a sadu osmi disků různých velikostí. Všechny disky jsou seřazeny podle velikosti na prvním kůlu. Úkolem je přemístit všechny disky na jiný kůl.

- ▶ Vždy se přesune pouze jeden disk,
- ▶ nikdy nesmí ležet větší disk na menším.

Najděte nejmenší možný počet přesunů, které jsou nutné pro přemístění celé věže.

Osnova

Pojem grafu

Vrcholy a hrany

Eulerovské grafy

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

Stavový graf

Úloha s vínem

Barycentrické

souřadnice

Hanojské věže

Závěr



Édouard Lucas (1842 – 1891)

Osnova

Pojem grafu

Vrcholy a hrany

Eulerovské grafy

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

Stavový graf

Úloha s vínem

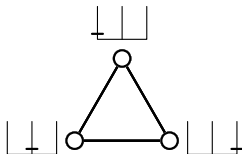
Barycentrické
souřadnice

Hanojské věže

Závěr

Při řešení opět sestavíme stavový graf:

- ▶ vrcholy – každé rozmístění disků na kůly
- ▶ hrany – existuje regulérní tah mezi vrcholy



Úloha s jediným diskem.

Osnova

Pojem grafu

Vrcholy a hrany

Eulerovské grafy

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

Stavový graf

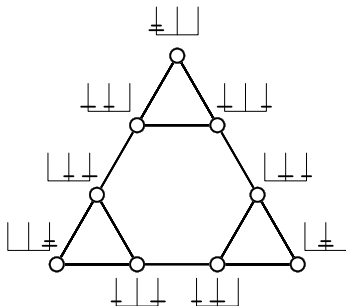
Úloha s vínem

Barycentrické

souřadnice

Hanojské věže

Závěr



Úloha se dvěma disky.

Pro dva disky rozlišíme **tři** možnosti, kde leží největší disk.

Pro každou z nich zkopírujeme stavový graf pro jeden disk.

Přidáme hrany, pokud můžeme přesunout největší disk.

Osnova

Pojem grafu

Vrcholy a hrany

Eulerovské grafy

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

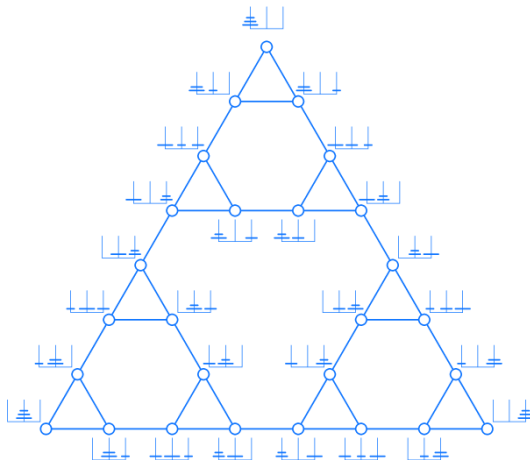
Stavový graf

Úloha s vínem

Barycentrické
souřadnice

Hanojské věže

Závěr



Podobně pro tři disky.

Osnova

Pojem grafu

Vrcholy a hrany

Eulerovské grafy

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

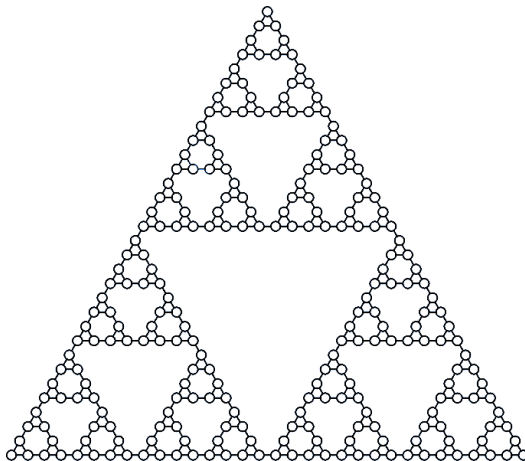
Stavový graf

Úloha s vínem

Barycentrické
souřadnice

Hanojské věže

Závěr



Pro pět disků.

Osnova

Pojem grafu

Vrcholy a hrany

Eulerovské grafy

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

Stavový graf

Úloha s vínem

Barycentrické
souřadnice

Hanojské věže

Závěr

Máme-li n disků, tak

- ▶ existuje 3^n možných stavů
- ▶ graf má 3^n možných stavů
- ▶ všechny disky na jednom kůlu – “rohové” vrcholy grafu
- ▶ nejrychlejší řešení = nejkratší cesta
- ▶ vždy nejméně $2^n - 1$ tahů

Osnova

Pojem grafu

Vrcholy a hrany

Eulerovské grafy

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

Stavový graf

Úloha s vínem

Barycentrické

souřadnice

Hanojské věže

Závěr

- ▶ Problém obchodního cestujícího
- ▶ Jezdec na šachovnici
- ▶ Domino na šachovnici
- ▶ Triomino/tetramino na šachovnici

Reklama:

web: <http://home1.vsb.cz/kov16/ulohy>

Google: “zajímavé úlohy”

Osnova

Pojem grafu

Vrcholy a hrany

Eulerovské grafy

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

Stavový graf

Úloha s vínem

Barycentrické

souřadnice

Hanojské věže

Závěr

Děkuji za pozornost.

Osnova

Pojem grafu

Vrcholy a hrany

Eulerovské grafy

Grafová interpretace

Putování grafem

Příklady

Stavový graf

Úloha s vínem

Barycentrické
souřadnice

Hanojské věže

Závěr