K čemu slouží určitý integrál

Petra Šarmanová

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Tento text byl zpracován pro účely Školy matematického modelování ŠKOMAM 2008 konané v Ostravě ve dnech 19. 2. – 21. 2. 2007.

Předpokládáme, že studenti znají pojem derivace, základní pravidla pro derivování a geometrický význam derivace. Na několika příkladech si ukážeme historický vývoj pojmu integrál, provedeme konstrukci Riemannova určitého integrálu, vysvětlíme vztah mezi určitým integrálem a primitivní funkcí, tzv. Newtonovu–Leibnizovu formuli, a probereme jednoduché geometrické aplikace.

Prezentované materiály jsou součástí multimediálního výukového CD určeného pro výuku matematické analýzy I v prvním ročníku VŠB-TU Ostrava. Toto CD obsahuje výukový text obohacený o animace, interaktivní programy a testy. Vysvětlení dané problematiky je vždy následováno množstvím řešených příkladů, kontrolních otázek, neřešených příkladů a autotestů. Některé definice, věty, případně příklady jsou dynamicky ilustrovány pomocí animací. Všechny materiály jsou volně k dispozici na adrese www.am.vsb.cz/sarmanova/cd

Kapitola 2

Určitý integrál

2.1. Jak to všechno začalo

Chceme-li naznačit historický vývoj integrálního počtu, musíme začít od výpočtů obsahů a objemů. Na následujících stranách se pokusíme ukázat, kam až sahají kořeny dnes používaných postupů výpočtů.

Již ve starém Egyptě byli nuceni vyměřovat pole, tj. počítat obsahy. Znali obsah čtverce, obdélníku, trojúhelníka a tím i libovolného mnohoúhelníka. Mnohoúhelník rozdělili na trojúhelníky, spočítali jejich obsahy a ty potom sečetli. Uměli počítat i objemy krychle, válce nebo komolého jehlanu se čtvercovou základnou (pyramidy).

2.1.1. Řecko

Řekové se snažili plochu neznámého obrazce vypočítat pomocí obsahů mnohoúhelníků P_1, P_2, ... P_n, kterými obrazec „vyčerpávali“. Podstatou jejich přístupu bylo to, že obsah tohoto mnohoúhelníku snadno vypočítali tím, že jej rozložili na vzájemně se nepřekrývající trojúhelníky. Obsah mnohoúhelníku je pak roven součtu obsahů jednotlivých trojúhelníků. Tuto metodu, která byla později nazvána *exhaustivní*, rozpracoval **Eudoxos** (asi 408–355 před n. l.).

Exhaustivní (vyčerpávací) metoda umožňuje již poměrně přesné výpočty obsahů a objemů a je považována za geniální předchůdkyni pozdějších infinitezimálních úvah. Zpočátku se exhaustivní metody využívalo pouze k důkazům vět, ke kterým se došlo jinými metodami.

Archimédes (asi 287–212 před n. l.) byl největším matematikem helénistického období. Archimédovým nejvýznamnějším přínosem v matematice jsou věty o obsahu rovinných útvarů a o objemu těles. Archimédovy práce zabývající se obsahy, objemy a délkami jsou: *Měření kruhu, Kvadratura paraboly, O kouli a válci, O spirálách, O konoidech a sféroidech* a *Metoda*.

Prvních pět prací rozvíjí exhaustivní metodu, kterou Archimédes aplikoval na širokou škálu problémů, které jsou dnes typickými aplikacemi integrálního počtu. Šestá práce, neznámá do roku 1906, popisuje heuristickou infinitezimální metodu — metodu, pomocí níž objevoval nové výsledky dříve, než je opatřil důkazem.

Archimédovy práce znamenaly obrovský krok ve výpočtech obsahů a objemů. Při výpočtech však vždy vychází z geometrických vlastností dané plochy nebo tělesa. To je charakteristické pro celou další etapu vývoje výpočtu obsahu plochy. Při určování obsahů a objemů různých ploch a těles se vždy využívaly nějaké charakteristické vlastnosti studovaného útvaru. Nejednalo se tedy o jednotný postup, který by se dal použít k určení obsahu, příp. objemu, libovolného útvaru.

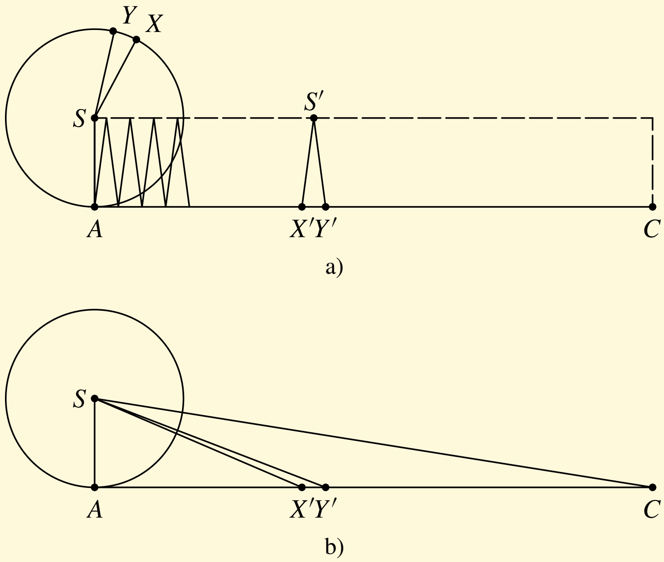
2.1.2. Matematika v období renesance

Po plodném období řecké vědy ve 2. stol. př. n. l. následovalo mnoho století stagnace vědy, kdy se obzvláště v Evropě na poli matematiky nedělo nic. Teprve ve 12. a 13. století se začínají překládat stará řecká díla Eukleida, Archiméda, Apollónia atd. Začaly vznikat první univerzity. Ale teprve v 16. století se novodobá matematika dostává nad rámec řecké matematiky.

16. a 17. století bylo renesancí kultury a vědy, a tedy i matematiky. Popsat toto období by bylo tématem na samostatnou kapitolu. Připomeňme jen jména některých matematiků, kteří se zabývali určováním obsahů a objemů a tím významně přispěli k dalšímu vývoji diferenciálního a integrálního počtu. Byli to Johann Kepler, Galileo Galilei, Bonaventura Cavalieri, John Wallis, Pierre de Fermat, Blaise Pascal, Georg Riemann, Isaac Newton, Gottfried Leibniz, Augustin-Louis Cauchy, aj.

Johann Kepler (1571–1630) ve svém díle *Nová stereometrie vinných sudů* (1615) počítal objemy těles, které vznikly rotací částí kuželoseček kolem osy ležící v jejich rovině. Při svých výpočtech postupoval metodou rozdělení tělesa na nekonečně mnoho nekonečně malých „kusů“, jejichž objem lze jednoduše určit. Použil tedy úvahu, které se říká infinitezimální. Např. při určování objemu koule při známém povrchu rozdělil kouli na nekonečně mnoho jehlanů s vrcholy ve středu koule a základnou na povrchu koule a výškou rovnou poloměru koule. Sečetl objemy těchto jehlanů a dostal $V = \frac{1}{3}Sr$, kde $S = 4\pi r^2$ je povrch koule. Odtud získal objem koule $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Ještě známější je jeho určování obsahu kruhu. Každou z (nekonečně malých) částí ohraničující kružnice považuje za základnu rovnoramenného trojúhelníka s vrcholem ve středu kruhu. Obsah kruhu je pak roven součtu obsahů všech takových trojúhelníků. Představme



Obr. 2.1 : Keplerův výpočet obsahu kruhu

si (viz obr. 2.1 a)), že kružnice se středem S je rozvinuta do úsečky AC (její délka je rovna obvodu o kruhu) tak, že poloměr SA je k ní kolmý. Nekonečně malému XY na kružnici odpovídá dílek $X'Y'$ na úsečce AC. Trojúhelníky XYS, $X'Y'S'$ mají výšku i základnu stejné délky, a tedy mají stejný obsah (Kepler zde považuje délku oblouku XY a délku jemu odpovídající úsečky $X'Y'$ za stejné).

Tyto trojúhelníky lze zaměnit jinými (viz obr. 2.1 b)), se stejnými základnami a výškou, přičemž „horní“ vrcholy všech trojúhelníků se posunou do středu kružnice S. Takto vzniklé trojúhelníky mají

Obsah
8. strana ze 44
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka / Okno
V okně:
Zobrazit / Skrýt ikony
Zobrazit / Skrýt menu

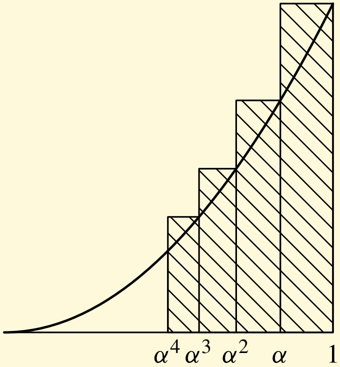
stejné obsahy jako původní trojúhelníky a dohromady vyplňují trojúhelník ACS.

Obsah kruhu je tedy roven obsahu pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami AC a AS, kde velikost strany AC je rovna velikosti obvodu o kruhu. Odtud plyne

$$S = \frac{1}{2}ro = \frac{1}{2}r \cdot 2\pi r = \pi r^2.$$

2.1.3. Počátky infinitezimálního počtu

Práci matematiků té doby ilustrujme na díle **Pierra de Fermata** (1601–1665). Stejně jako všichni matematikové této doby se i Fermat věnoval kvadraturám hyperbol a parabol zadaných rovnicemi $y^n = kx^{\pm m}$, kde $m, n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{R}$. Ukažme, jak Fermat postupoval při výpočtu obsahu plochy ohraničené parabolou $y = x^2$, osou x a přímkou $x = 1$.



Obr. 2.2

Nejdříve zvolil libovolné číslo $\alpha \in (0, 1)$ a sestrojil posloupnost čísel $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots$. Uvažovanou plochu pokryl nekonečně mnoha obdélníky s výškami rovnými funkčním hodnotám funkce $y = x^2$ v bodech $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots$, tj. s výškami $1, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^6, \dots$ a šířkami

$1-\alpha, \alpha-\alpha^2, \alpha^2-\alpha^3, \dots$. Součet obsahů těchto obdélníků je

$$1(1-\alpha)+\alpha^2(\alpha-\alpha^2)+\alpha^4(\alpha^2-\alpha^3)+\dots=$$
$$=1-\alpha+\alpha^3(1-\alpha)+\alpha^6(1-\alpha)+\dots=(1-\alpha)(1+\alpha^3+\alpha^6+\dots)=$$
$$=\frac{1-\alpha}{1-\alpha^3}=\frac{1-\alpha}{(1-\alpha)(1+\alpha+\alpha^2)}=\frac{1}{1+\alpha+\alpha^2}\,.$$

Jestliže nyní zmenšujeme základny obdélníčků, tj. číslo α se přibližuje k číslu jedna, pak se podíl $\frac{1}{1+\alpha+\alpha^2}$ bude blížit k $\frac{1}{3}$.

Obdobně Fermat postupoval při určování kvadratury paraboly $y=x^{\frac{p}{q}}$ pro $p>0$ a $q>0$ na intervalu $\langle 0, b\rangle$.

On i další matematikové této doby již tušili, že existuje souvislost mezi derivováním a integrováním. Dokázat tuto souvislost se však podařilo až Issacu Newtonovi a Gottfriedu Wilhelmu Leibnizovi, kteří jsou proto považováni za zakladatele diferenciálního a integrálního počtu. Nezávisle na sobě a každý jinou cestou nalezli propojení mezi integrováním a derivováním. Vybudovali ucelenou teorii, do které zahrnuli všechny roztříštěné objevy svých předchůdců.

2.1.4. Newtonova–Leibnizova formule

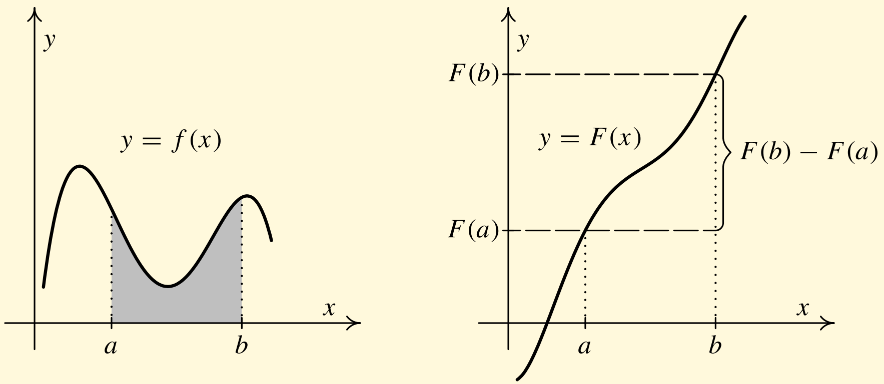
Klíčovým prostředkem ke konkrétnímu výpočtu určitého integrálu je následující věta. Ta obsahuje formuli pojmenovanou podle dvou matematiků, kteří se velkou měrou zasloužili o vybudování

Obsah
12. strana ze 44
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka / Okno
V okně:
Zobrazit / Skrýt ikony
Zobrazit / Skrýt menu

základů diferenciálního a integrálního počtu funkcí jedné proměnné — Newtona[1] a Leibnize[2].

Věta 2.1 (Newtonova-Leibnizova formule). *Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $F(x)$ je její primitivní funkce spojitá na $\langle a, b\rangle$. Pak platí, že*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \tag{2.1}$$



Obr. 2.3: Newtonova-Leibnizova formule

[1]**Isaac Newton** (1643–1727) (čti njútn) — anglický matematik, fyzik, mechanik a astronom. Položil základy diferenciálního a integrálního počtu, který potřeboval pro vybudování klasické mechaniky.

[2]**Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646–1716) (čti lajbnyc) — německý matematik, fyzik, filosof, vynálezce, právník, historik a jazykovědec. Položil základy diferenciálního a integrálního počtu.

Animace

K lepšímu pochopení Newtonovy-Leibnizovy formule slouží následující **animace**.

Poznámka 2.2.

1. Pro rozdíl $F(b) - F(a)$ se vžilo označení $[F(x)]_a^b$, takže rovnost (2.4) obvykle zapisujeme jako
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b.$$

2. Na obr. 2.3 je znázorněna Newtonova-Leibnizova formule geometricky. Integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ je roven přírůstku primitivní funkce $F(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ (obě funkce mohou být definovány na širším intervalu, než je $\langle a, b\rangle$, jako je tomu např. v tomto případě). Všimněte si, že důsledkem toho, že v tomto případě je $f(x)$ kladná, je, že primitivní funkce $F(x)$ je rostoucí. Platí totiž $F'(x) = f(x) > 0$ a z diferenciálního počtu víme, že kladná derivace na intervalu znamená, že funkce $F(x)$ roste. To je ve shodě s názorem, který nám říká, že při zafixované dolní mezi a a zvětšující se horní mezi b se plocha pod grafem musí zvětšovat, tj. $F(x)$ musí růst, aby se zvětšoval přírůstek $F(b) - F(a)$.

Nyní nastal čas, abychom si upřesnili všechny pojmy, o nichž jsme doposud mluvili. Zavedeme pojem primitivní funkce a určitý integrál.

Obsah
14. strana ze 44
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka / Okno
V okně:
Zobrazit / Skrýt ikony
Zobrazit / Skrýt menu

2.2. Primitivní funkce

Zabývejme se nyní úlohou, která je v jistém smyslu inverzní k derivování. K zadané funkci f hledáme funkci F takovou, aby platilo $F' = f$. Ptáme se tedy, jakou funkci je nutné derivovat, abychom dostali zadanou funkci f. Tj.

- Ze znalosti směrnic tečen ke grafu funkce f chceme najít tuto funkci f.
- Ze znalosti okamžité rychlosti bodu chceme zjistit polohu tohoto bodu.
- Ze znalosti okamžitého zrychlení bodu chceme určit jeho okamžitou rychlost.

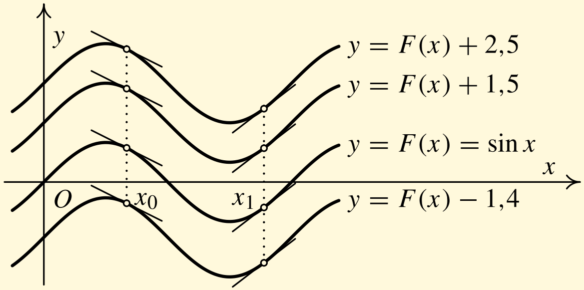
Definice 2.3. Nechť funkce f je definována na otevřeném intervalu (a, b) $(a, b \in \mathbb{R}^\star, a < b)$. Pak funkci F, pro kterou platí $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$, nazýváme *primitivní funkcí k funkci f na intervalu* (a, b).

Chceme např. najít nějakou primitivní funkci k funkci $f\colon\ y = \cos x,\ x \in \mathbb{R}$. Není těžké uhodnout, že taková funkce je např. $F(x) = \sin x$, protože $(\sin x)' = \cos x$. Ale také např. $F(x) = \sin x + 5$ je primitivní funkcí, protože $(\sin x + 5)' = \cos x$. Obecně $F(x) = \sin x + c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je primitivní funkce k funkci f.

Grafy jednotlivých primitivních funkcí jsou posunuty ve směru osy y. Pro pevně zvolené x jsou tečny ke grafům funkcí $F(x) + c$ v bodech $[x, F(x) + c]$ pro lib. $c \in \mathbb{R}$ navzájem rovnoběžné, tj. mají stejné směrnice.

Věta 2.4. *Je-li funkce F primitivní funkcí k funkci f na otevřeném intervalu (a, b), tvoří funkce definované předpisy $F(x) + c$, kde $c \in \mathbb{R}$, právě všechny primitivní funkce k funkci f na intervalu* (a, b).

Obsah
15. strana ze 44
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka / Okno
V okně:
Zobrazit / Skrýt ikony
Zobrazit / Skrýt menu



Obr. 2.4: Primitivní funkce k funkci $\cos x$

K dané funkci f tedy existuje nekonečně mnoho primitivních funkcí, které se navzájem „liší o konstantu“, tj. je-li F primitivní funkce k f, pak množina všech primitivních funkcí k f je množina $\{F + c, c \in \mathbb{R}\}$. Jinými slovy, jsou-li funkce F_1, F_2 primitivními funkcemi k funkci f na intervalu (a, b), potom je jejich rozdíl $F_1 - F_2$ konstantní funkce.

Označení: Je-li F primitivní funkcí k funkci f, píšeme

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

a mluvíme o *neurčitém integrálu* funkce f.

Toto označení vychází z historických důvodů – znamení $\int$ vzniklo modifikací velkého „S“.

Při výpočtech však vzniká problém, kterou z primitivních funkcí takto označíme. Není dost dobře možné vybrat z množiny primitivních funkcí nějakého „vhodného reprezentanta“. Domluvme se tedy, že symbol $\int f(x)dx$ značí některou z primitivních funkcí k funkci f (každou další bychom dostali přičtením vhodné konstanty). Stává se tedy, že použijeme-li při výpočtu konkrétního neurčitého integrálu různé metody, dostáváme různé výsledky (různé primitivní fukce). Tyto výsledky se však musí lišit o konstantu.

Ještě poznamenejme, že mluvíme-li o primitivní funkci, máme vždy na mysli i nějaký otevřený interval, na němž je tato funkce definována.

Věta 2.5. *Je-li f spojitá na intervalu (a, b), pak na tomto intervalu existuje alespoň jedna primitivní funkce k funkci f.*

Dále si uvědomme, že každá primitivní funkce je spojitá. To plyne přímo z definice primitivní funkce: F je primitivní funkcí k f na intervalu (a, b), jestliže pro všechna $x \in (a, b)$ platí $F'(x) = f(x)$. Tedy F má vlastní derivaci všude na (a, b) a je proto na tomto intervalu spojitá.

2.3. Konstrukce určitého integrálu

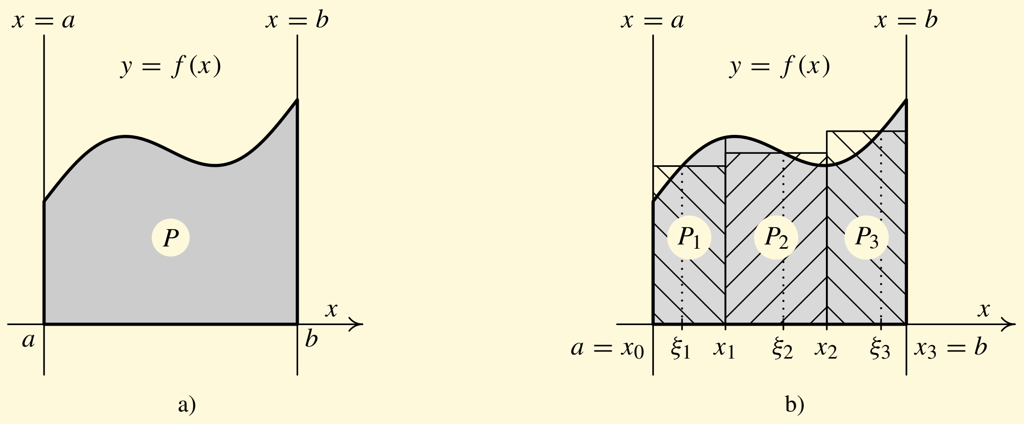
Než popíšeme formálně obecnou konstrukci určitého integrálu, vysvětlíme si na geometrickém příkladě myšlenku, která k této na první pohled poněkud komplikované konstrukci vede. Podobných motivačních úloh, pocházejících z geometrie, fyziky a dalších technických oborů, bychom mohli uvést mnoho.

Geometrická motivace

Představme si, že máme nezápornou ohraničenou funkci $f(x)$, definovanou na intervalu $\langle a, b\rangle$, která je pro jednoduchost spojitá. Graf této funkce společně se dvěma svislými přímkami $x = a$ a $x = b$ a osou x ohraničuje jistý rovinný obrazec P — viz obr. 2.5 a). Naším úkolem je určit jeho obsah.

Označíme-li obsah nějaké množiny $A \subset \mathbb{R}^2$ symbolem $m_2(A)$ (m od slova míra, dvojka v indexu, protože jednotkami jsou délkové jednotky na druhou, např. cm^2), rozhodně by obsah měl mít následující vlastnosti:

- Je to nezáporné číslo, tj. $m_2(A) \geqq 0$.
- Rozdělíme-li množinu A na dvě disjunktní části B a C, tj. $A = B \cup C$, $B \cap C = \emptyset$, je obsah A roven součtu obsahů B a C, tj. $m_2(A) = m_2(B) + m_2(C)$.
- Obsah obdélníku O o velikostech stran a a b je roven číslu ab, tj. $m_2(O) = ab$.



Obr. 2.5: Výpočet obsahu rovinné množiny

Navrhneme způsob, jak by se dalo při určení obsahu množiny P postupovat — viz obr. 2.5 b).

1. Rozdělíme množinu P rovnoběžkami s osou y na „pásky“ (na obrázku 2.5 b) jsou tři, označené P_1, P_2 a P_3). Bude platit

$$m_2(P) = m_2(P_1) + m_2(P_2) + m_2(P_3).$$

2. Spočítáme obsahy jednotlivých „pásků“. To však bohužel obecně neumíme, neboť ze tří stran jsou ohraničené sice úsečkami, ale ze čtvrté grafem funkce $f(x)$. Uděláme to tedy přibližně. Uvnitř základny každého „pásku“ zvolíme bod (na našem obrázku jsou označené postupně ξ_1, ξ_2 a ξ_3), vypočteme v něm funkční hodnotu a v této výšce ho zarovnáme rovnoběžkou s osou x na obdélník. Tím se samozřejmě dopustíme určité chyby — někde obdélník „pásek“ přesahuje, někde ho zase

Obsah
19. strana ze 44
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka / Okno
V okně:
Zobrazit / Skrýt ikony
Zobrazit / Skrýt menu

nepokrývá. Při označení z obr. 2.5 b) dostaneme přibližnou hodnotu obsahu množiny P:

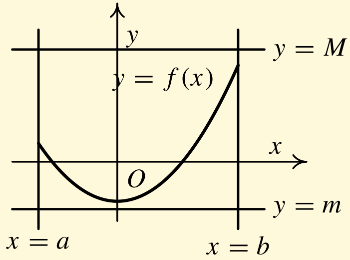
$$m_2(P) \doteq (x_1 - x_0) f(\xi_1) + (x_2 - x_1) f(\xi_2) + (x_3 - x_2) f(\xi_3). \tag{2.2}$$

(Uvědomte si, že $x_1 - x_0$ je délka základny prvního obdélníku, $f(\xi_1)$ je jeho výška atd.)

3. U „rozumných“ funkcí lze předpokládat, že čím více „pásků“ uděláme a čím budou užší, tím menší bude chyba, které se dopustíme nahrazením obdélníků za „pásky“. Provedeme-li tedy jakýsi limitní přechod, tj. budeme-li neomezeně zvětšovat počet „pásků“ a současně je zužovat, měla by se přibližná hodnota (daná součtem ploch obdélníků) čím dál víc přibližovat k přesné hodnotě obsahu $m_2(P)$. Zdá se tedy, že při řešení této úlohy bude užitečné vyšetřovat součty mající tvar pravé strany (2.2), kde ovšem počet sčítanců bude neomezeně narůstat.

Nejprve zavedeme několik potřebných pojmů a označení, abychom mohli definovat určitý integrál.

Uvažujme funkci $f(x)$, která je definovaná na *ohraničeném uzavřeném intervalu* $\langle a, b\rangle$ a která je na tomto intervalu *ohraničená*. Musejí tedy existovat konstanty m a M takové, že pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ platí $m \leqq f(x) \leqq M$. Graf funkce je tedy uzavřen v obdélníku, jehož strany jsou určeny přímkami $x = a$, $x = b$, $y = m$ a $y = M$ — viz obr. 2.6. (Studenti často zapomínají na předpoklad ohraničenosti, který je pro naši konstrukci určitého integrálu podstatný.)



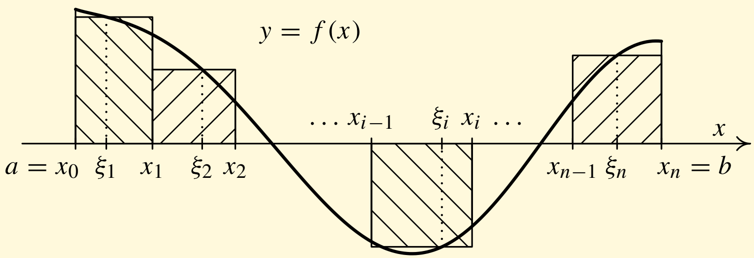
Obr. 2.6

Integrální součet

1. Posloupnost $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$, $n \in \mathbb{N}$, kde $x_0 = a$ a $x_n = b$, nazveme *dělením intervalu* $\langle a, b\rangle$. Dělení budeme značit písmenem D. Interval $\langle a, b\rangle$ tedy bude rozdělen na n intervalů $\langle x_0, x_1\rangle$, $\langle x_1, x_2\rangle$,. . . , $\langle x_{n-1}, x_n\rangle$, kterým říkáme intervaly dělení D.
2. *Normou dělení D* nazveme číslo

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\},$$

které budeme značit $\nu(D)$. Toto číslo nám říká, jaká je délka největšího intervalu dělení. (Samozřejmě intervalů s touto maximální délkou může být víc; zejména všechny intervaly mohou být např. stejně dlouhé — tzv. *ekvidistantní dělení*.) Norma tudíž charakterizuje, jak jemné je dělení D.



Obr. 2.7: Znázornění integrálního součtu

3. V každém intervalu dělení D vybereme jeden bod. Označíme-li bod vybraný v i-tém intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$, písmenem ξ_i, bude platit

$$x_0 \leqq \xi_1 \leqq x_1 \leqq \xi_2 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_{n-1} \leqq \xi_n \leqq x_n.$$

Obsah
21. strana ze 44
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno
V okně:
Zobrazit/Skrýt ikony
Zobrazit/Skrýt menu

Množinu $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ těchto bodů nazveme *výběrem reprezentantů dělení D*.

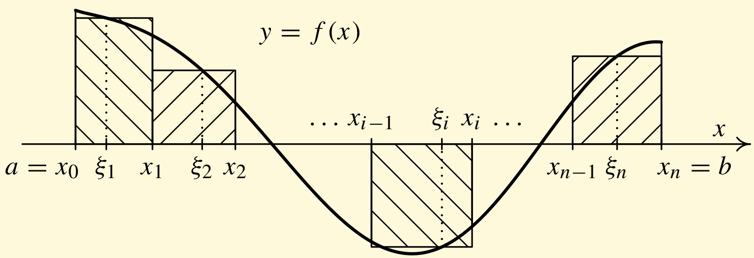
4. Je-li D dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ a Ξ výběr reprezentantů tohoto dělení, definujeme *integrální součet* $\mathscr{S}(f, D, \Xi)$ odpovídající funkci f, dělení D a výběru reprezentantů Ξ vztahem

$$\mathscr{S}(f, D, \Xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

resp. rozepíšeme-li sumu,

$$\mathscr{S}(f, D, \Xi) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}).$$

Geometrický význam integrálního součtu je znázorněn na obr. 2.8. Vlastně jde o součet ploch obdélníků s délkami základen $x_i - x_{i-1}$ a výškami $f(\xi_i)$, kde $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$. Pochopitelně pokud je $f(\xi_i) < 0$, je příspěvek daného obdélníku záporný. Integrální součet kromě funkce f závisí rovněž na konkrétním dělení a jeho výběru reprezentantů.



Obr. 2.8: Znázornění integrálního součtu

Obsah
22. strana ze 44
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka / Okno
V okně:
Zobrazit / Skrýt ikony
Zobrazit / Skrýt menu

Animace

Pro lepší představu a pochopení pojmu integrální součet slouží následující animace. Ta zobrazuje vytváření integrálních součtů funkce $\sin x$ na intervalu $\langle a, b\rangle$, $-10 \leqq a < b \leqq 10$. Tyto meze je možné v uvedeném rozsahu zvolit. Použije se ekvidistantní dělení o normě $(b-a)/n$, kde číslo n je rovněž možné zvolit. Hodnota integrálního součtu pak ještě závisí na volbě výběru reprezentantů. Animace znázorňuje čtyři takové volby — levé konce dělících intervalů, pravé konce dělících intervalů, středy dělících intervalů a náhodně vybrané zástupce dělících intervalů. Animaci spustíte stisknutím následujícího tlačítka: **animace**.

Nyní již můžeme vyslovit definici určitého integrálu.

Definice 2.6. Nechť $f(x)$ je funkce, která je definovaná a ohraničená na ohraničeném a uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, $a < b$.
Řekneme, že funkce $f(x)$ je *integrovatelná* neboli že má *určitý integrál* na intervalu $\langle a, b\rangle$, jestliže existuje číslo $I \in \mathbb{R}$ s následující vlastností:

> K libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ lze nalézt číslo $\delta > 0$ tak, že pro libovolné dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ takové, že $\nu(D) < \delta$, a pro libovolný výběr reprezentantů Ξ tohoto dělení platí $\left|\mathscr{S}(f, D, \Xi) - I\right| < \varepsilon$.

Číslo I pak nazýváme hodnotou určitého integrálu a píšeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I. \tag{2.3}$$

Číslo a nazýváme *dolní mez*, číslo b *horní mez*, interval $\langle a, b\rangle$ *integrační obor* a funkci f *integrand*. Horní a dolní mez nazýváme společně *integrační meze*.

Názorný význam předchozí definice je následující: Vytváříme-li integrální součty pro čím dál jemnější dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, pak se (při libovolných výběrech reprezentantů) hodnoty $\mathscr{S}(f, D, \Xi)$ „ustalují“ kolem čísla I. Pokud tomu tak není (integrální součty „oscilují“ i pro velmi jemná dělení), funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ určitý integrál nemá.

Poznámka 2.7.

1. Snadno se ukáže, že pokud číslo I s vlastností uvedenou v předchozí definici existuje, je jediné. Určitý integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ je tudíž definován jednoznačně.
2. Integrál z definice 2.6 se nazývá *Riemannův*[1]. Ukazuje se, že tento integrál nemá zcela ideální vlastnosti a pro některé teoretičtější úvahy jsou vhodné jiné, obecnější, ale složitější konstrukce. Takových konstrukcí existuje celá řada. Největší význam a rozšíření má asi *Lebesgueův*[2] integrál. Nejobecnější v tomto směru je asi *Henstockův-Kurzweilův* integrál. Pro běžné potřeby inženýrů je však Riemannův integrál zcela dostačující.
3. Často se Riemannův integrál zavádí jiným způsobem. Místo integrálních součtů se používají horní a dolní součty. Lze ukázat, že obě definice jsou ekvivalentní).

2.4. Výpočet určitého integrálu — Newtonova-Leibnizova formule

Nyní, když už známe pojem primitivní funkce a určitý integrál, můžeme se pustit do konkrétních výpočtů pomocí Newtonovy–Leibnizovy formule. Ještě jednou si ji připomeňme:

[1]**Georg Friedrich Bernhard Riemann** (1826–1866) (čti ríman) — vynikající německý matematik. Zabýval se teorií funkcí, geometrií, matematickou a teoretickou fyzikou a diferenciálními rovnicemi. Jeden z největších matematiků všech dob. Jeho tzv. Riemannova hypotéza o rozložení nul ζ-funkce je dodnes nevyřešena a je považována za jeden z nejtěžších matematických problémů.

[2]**Henri Leon Lebesgue** (1875–1941) (čti lebeg) — významný francouzský matematik. Zabýval se teorií funkcí a integrálu. Jím zavedená míra a integrál významně ovlivnily moderní matematiku.

Věta 2.8 (Newtonova-Leibnizova formule). *Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $F(x)$ je její primitivní funkce spojitá na $\langle a, b\rangle$. Pak platí, že*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \tag{2.4}$$

Pár příkladů

$$\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

$$\int_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^4 x^{1/2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^4 = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^4 = \frac{2}{3}\sqrt{4^3} - 0 = \frac{16}{3}.$$

$$\int_0^\pi \sin u\,\mathrm{d}u = [-\cos u]_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = 2.$$

Obsah

26. strana ze 44

Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

V okně:

Zobrazit/Skrýt ikony

Zobrazit/Skrýt menu

Kapitola 3

Geometrické aplikace určitého integrálu

Všimneme si výpočtu délek, obsahů a objemů. Každý z vás má určitě představu, co tyto pojmy znamenají pro některé jednoduché útvary. Např. délka úsečky nebo kružnice, obsah čtverce, obdélníku, lichoběžníku nebo kulové plochy, objem kvádru, kužele nebo koule atd. Podobně asi máte intuitivní představu, co je to délka např. nějaké prostorové spirály a dokážete si představit, jak by se změřila přiložením ohebného krejčovského metru. Obdobně máte jistě představu, že např. elipsa má nějaký obsah, i když třeba nevíte, jak by se určil. Pokud bychom se však zeptali, jaká je třeba délka množiny racionálních čísel ležících mezi nulou a jedničkou, asi byste s odpovědí hodně váhali. Potíž je v tom, že pojmy délka, obsah a objem nebyly nijak precizně zavedeny.

Vzhledem k rozsahu této přednášky není možné potřebné pojmy přesně zavádět. Šlo by o poměrně komplikovaný a rozsáhlý výklad z teorie míry a dalších náročných matematických partií. Pro naše potřeby se bez těchto precizních matematických definic obejdeme, jelikož se omezíme na jednoduché objekty, u nichž bude intuitivně jasné, že mají nějakou délku, obsah resp. objem. Níže uvedené vzorce nám řeknou, jak se potřebná hodnota určí.

Je-li A množina, označíme jí příslušnou hodnotu $\mathrm{m}(A)$, kde písmeno m připomíná slovo „míra“. Musíme však rozlišit, zda jde o délku, obsah nebo objem. K tomu použijeme index, který odpovídá tomu, v jakých jednotkách (délkových, plošných, objemových) se daná veličina měří. Tedy $\mathrm{m}_1(A)$ bude značit *délku*, $\mathrm{m}_2(A)$ *obsah* a $\mathrm{m}_3(A)$ *objem* množiny A (pokud má příslušná veličina pro danou množinu A rozumný smysl — u křivek budeme počítat délku, u ploch obsah a u těles objem; avšak co je to křivka, plocha resp. těleso chápeme pouze intuitivně, přesné definice nemáme k dispozici).

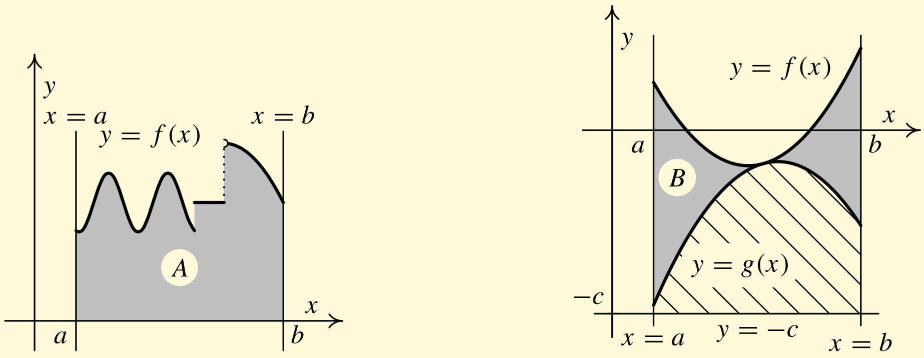
3.1. Obsah rovinné množiny

Výpočet obsahu rovinné množiny jako speciálního případu plochy patří k nejdůležitějším aplikacím určitého integrálu. Použili jsme ho také jako hlavní motivaci.

Nechť $f(x)$ je nezáporná funkce definovaná na ohraničeném uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Množina v rovině definovaná vztahem

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqq x \leqq b,\ 0 \leqq y \leqq f(x)\}$$

se obvykle nazývá *podgrafem funkce* $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$. Vlastně jde o množinu bodů v rovině, která je ohraničená osou x, rovnoběžkami s osou y o rovnicích $x = a$ a $x = b$ a grafem funkce $f(x)$. Funkce nemusí být spojitá — viz obr. 3.1 a).



a) b)

Obr. 3.1: Výpočet obsahu množiny

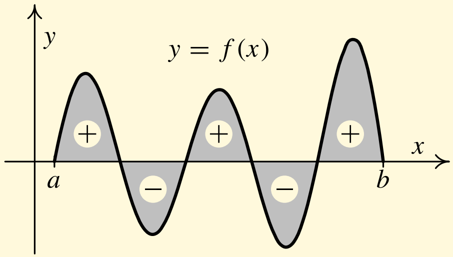
Věta 3.1. *Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$ a je zde nezáporná. Pak pro obsah množiny A platí:*

$$\boxed{\mathrm{m}_2(A) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.} \tag{3.1}$$

Zdůrazněme, že funkce musí být na intervalu $\langle a, b\rangle$ nezáporná. Je však celkem zřejmé, že pro funkci $f(x)$, která je naopak nekladná, bude integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ roven obsahu množiny omezené grafem funkce $f(x)$, osou x a přímkami $x = a$ a $x = b$ (ležící tentokrát *pod* osou x), avšak opatřenému znaménkem mínus. K důkazu stačí zaměnit $f(x)$ funkcí $-f(x)$, která bude nezáporná (množina A se překlopí kolem osy x), a vytknout číslo -1.

Obsah
29. strana ze 44
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka / Okno
V okně:
Zobrazit / Skrýt ikony
Zobrazit / Skrýt menu

Z předchozí úvahy a aditivity určitého integrálu vzhledem k integračnímu oboru vyplývá, že v obecném případě, kdy funkce $f(x)$ může libovolně měnit znaménko, je $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ názorně řečeno roven ploše omezené grafem funkce $f(x)$, osou x a přímkami $x = a$ a $x = b$, přičemž části ležící nad osou x se berou kladně, zatímco části ležící pod osou x se berou záporně — viz obr. 3.2.



Obr. 3.2

Tudíž např. z tvaru grafu funkce sinus resp. kosinus je zřejmé, že musí platit $\int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 0$ resp. $\int_0^{2\pi} \cos x\,\mathrm{d}x = 0$. Nakreslete si příslušné obrázky.

Předchozí větu 3.1 lze snadno zobecnit na případ množiny znázorněné na obr. 3.1 b). Předpokládejme, že graf funkce $f(x)$ leží na intervalu $\langle a, b\rangle$ nad grafem funkce $g(x)$ (připouští se i rovnost, tj. musí být $g(x) \leqq f(x)$). Označme

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqq x \leqq b,\ g(x) \leqq y \leqq f(x)\}.$$

Jde tedy o množinu ohraničenou přímkami $x = a$ a $x = b$ a dvojicí grafů funkcí. Někdy se pro ni používá název *křivočarý obdélník* nebo *křivočarý lichoběžník*.

Věta 3.2. *Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ jsou integrovatelné na intervalu $\langle a, b\rangle$ a platí $g(x) \leqq f(x)$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$. Pak pro obsah množiny B platí:*

$$\boxed{\mathrm{m}_2(B) = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x.} \tag{3.2}$$

Platnost vzorce je celkem zřejmá. Stačí množinu B posunout o vhodnou konstantu nahoru tak, aby funkce $g(x) + c$ (a tudíž samozřejmě i funkce $f(x) + c$) byla na intervalu $\langle a, b\rangle$ nezáporná. To je určitě možné, protože funkce $g(x)$ je integrovatelná, a tedy i zdola ohraničená. Obsah se tím nezmění. Přímka $y = -c$ v obr. 3.1 b) pak hraje roli nové osy x.

Nyní je jasné, že posunutá množina B je množinovým rozdílem podgrafu funkce $f(x) + c$ a podgrafu funkce $g(x) + c$ (je šrafován). Její obsah bude proto rozdílem obsahů těchto podgrafů. Tedy $\mathrm{m}_2(B) = \int_a^b [f(x) + c]\,\mathrm{d}x - \int_a^b [g(x) + c]\,\mathrm{d}x = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$. Věta 3.1 je speciálním případem pro $g(x) = 0$.

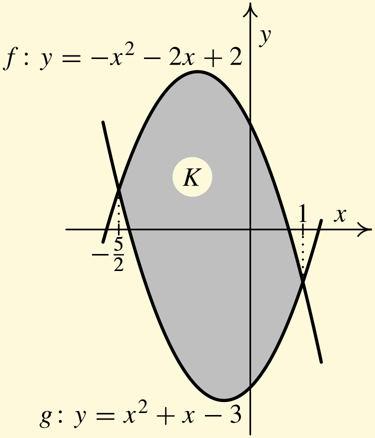
Obsah
31. strana ze 44
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka / Okno
V okně:
Zobrazit / Skrýt ikony
Zobrazit / Skrýt menu

Příklad 3.3. Vypočtěte obsah množiny K ohraničené grafy funkcí $g\colon\ y = x^2 + x - 3$ a $f\colon\ y = -x^2 - 2x + 2$.

Řešení. U příkladů tohoto typu se často neobejdeme bez náčrtku. Nejprve musíme určit meze. K tomu musíme najít průsečíky grafů zadaných funkcí, tj. musíme řešit rovnici $f(x) = g(x)$. V našem případě je $x^2 + x - 3 = -x^2 - 2x + 2$, odkud

$$2x^2 + 3x - 5 = 0 \quad\Rightarrow\quad x_{1,2} = \frac{-3 \pm 7}{4} = \begin{cases} -\frac{5}{2}\,, \\ 1. \end{cases}$$

Protože jde o kvadratické funkce, grafy jsou paraboly. Podle znaménka u x^2 rozhodneme, která parabola je otočená nahoru a která dolů. Výsledek je na obr. 3.3. Na intervalu $\langle -5/2, 1\rangle$ je skutečně $f(x) \geqq g(x)$. Pokud by tomu tak nebylo, museli bychom ve vzorci (3.2) funkce prohodit.



Obr. 3.3

Obsah
32. strana ze 44
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka / Okno
V okně:
Zobrazit / Skrýt ikony
Zobrazit / Skrýt menu

Pro obsah množiny K tudíž platí:

$$\begin{aligned}
\mathrm{m}_2(K) &= \int_{-5/2}^{1} \left[(-x^2 - 2x + 2) - (x^2 + x - 3)\right] \mathrm{d}x = \\
&= \int_{-5/2}^{1} (-2x^2 - 3x + 5)\, \mathrm{d}x = \\
&= \left[-\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x\right]_{-5/2}^{1} = \\
&= \left(-\frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 5\right) - \left(\frac{250}{24} - \frac{75}{8} - \frac{25}{2}\right) = \frac{343}{24}\,. \quad \blacktriangle
\end{aligned}$$

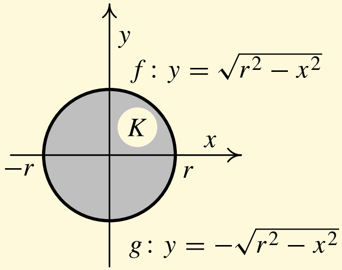
Na základní a střední škole jste se seznámili se vzorci pro délku kružnice, obsah kruhu a kulové plochy a objem koule. Vzhledem k aparátu, který jste měli k dispozici, jste nemohli tyto vzorce pochopitelně dokázat. Nyní si tyto vzorce postupně dokážeme. První na řadě bude obsah kruhu.

Příklad 3.4. Vypočtěte obsah kruhu K o poloměru $r > 0$.

Řešení. Střed kruhu si umístíme do počátku, na obsah to nemá vliv. Rovnice hraniční kružnice pak je $x^2 + y^2 = r^2$. Odtud máme $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$. Označíme si $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ a $g(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in \langle -r, r\rangle$ — viz obr. 3.4. Pro obsah kruhu tudíž platí

$$\mathrm{m}_2(K) = \int_{-r}^{r} [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_{-r}^{r} \left[\sqrt{r^2 - x^2} - \left(-\sqrt{r^2 - x^2}\right)\right] \mathrm{d}x = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Použijeme substituční metodu. Zvolíme $\varphi(t) = r\sin t$, tudíž $x = r\sin t$. Funkce $\sin t$ zobrazuje prostě interval $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$ na interval $\langle -1, 1\rangle$, takže funkce $\varphi(t)$ zobrazí interval $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$ na interval $\langle -r, r\rangle$. Pro hledanou hodnotu $\mathrm{m}_2(K)$ tedy dostaneme



Obr. 3.4

$$\mathrm{m}_2(K) = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} x = r\sin t \\ \mathrm{d}x = r\cos t\,\mathrm{d}t \\ -r \rightsquigarrow -\frac{\pi}{2},\ r \rightsquigarrow \frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t} \cdot r\cos t\,\mathrm{d}t =$$

$$= 2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r|\cos t| \cdot r\cos t\,\mathrm{d}t =$$

$$= 2r^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = 2r^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t = r^2\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= r^2\left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2}\right) - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right] = \pi r^2.$$

Obsah
34. strana ze 44
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka/Okno
V okně:
Zobrazit/Skrýt ikony
Zobrazit/Skrýt menu

Při úpravě jsme využili toho, že na intervalu $\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$ je $\cos t \geqq 0$.

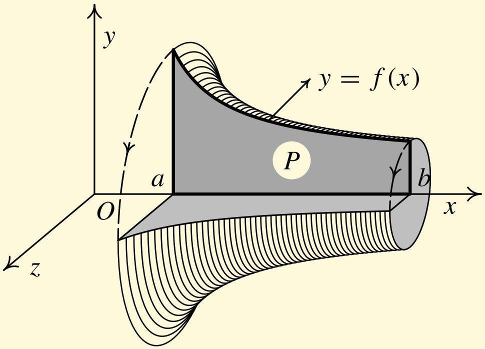
Vzhledem k symetrii bylo rovněž možné určit obsah čtvrtiny kruhu v prvním kvadrantu a výsledek vynásobit čtyřmi. Dolní ohraničující funkce by byla $g(x) = 0$ a integrační obor by byl $\langle 0, r\rangle$, tedy $\mathrm{m}_2(K) = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$. ▲

3.2. Objem rotačního tělesa a obsah pláště rotačního tělesa

Uvažujme spojitou nezápornou funkci $f(x)$, která je definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$. Ta nám určí křivočarý obdélník (podgraf funkce f)

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqq x \leqq b,\ 0 \leqq y \leqq f(x)\}. \tag{3.3}$$

Rotací kolem osy x vznikne *rotační těleso* V — obr. 3.5. Povrch tohoto tělesa je tvořen *pláštěm* Q a dvěma postranními kruhy. Cílem je vypočítat objem rotačního tělesa V a obsah jeho pláště Q.



Obr. 3.5: Rotační těleso

Animace

Pro získání lepší prostorové představy, jak vzniká rotační těleso, slouží následující dvě animace:

animace 1 **animace 2**

Pro objem rotačního tělesa platí následující věta:

Věta 3.5. *Nechť funkce $f(x)$ je spojitá a nezáporná na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak pro objem rotačního tělesa V, které vznikne rotací křivočarého obdélníku P daného vztahem (3.3), platí:*

$$\boxed{\mathrm{m}_3(V) = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.} \tag{3.4}$$

V případě obsahu pláště nestačí předpokládat spojitost funkce $f(x)$, předpoklady na tuto funkci

Obsah
36. strana ze 44
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka / Okno
V okně:
Zobrazit / Skrýt ikony
Zobrazit / Skrýt menu

je třeba zesílit, aby existovala dvourozměrná míra pláště. Platí tato věta:

Věta 3.6. *Nechť funkce $f(x)$ je nezáporná na intervalu $\langle a, b\rangle$ a má zde spojitou derivaci. Pak pro obsah pláště Q rotačního tělesa V, které vznikne rotací křivočarého obdélníku P daného vztahem* (3.3)*, platí:*

$$\boxed{\mathrm{m}_2(Q) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.} \tag{3.5}$$

Chceme-li určit obsah celého povrchu, stačí k obsahu pláště přičíst obsah obou postranních „pokliček“, což jsou kruhy o poloměrech $f(a)$ a $f(b)$.

Nyní si použití obou vět ilustrujeme na příkladech. Zatímco objem lze spočítat pro poměrně složité funkce určující křivočarý obdélník, u obsahu pláště i v případě velmi jednoduchých funkcí mohou nastat problémy s integrací výrazu obsahujícího odmocninu. Výsledek pak musíme určit pouze přibližně.

Příklad 3.7. Vypočtěte objem koule a obsah kulové plochy o poloměru $r > 0$.

Řešení. Rovnice kružnice se středem v počátku a poloměrem r je $x^2 + y^2 = r^2$. Rotací horního půlkruhu P kolem osy x dostaneme kouli — viz obr. 3.6. Rovnice horní půlkružnice je $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in \langle -r, r\rangle$.

Podle vzorce (3.4) tedy pro objem koule V platí:

$$\mathrm{m}_3(V) = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r} =$$

$$= \pi\left(r^3 - \frac{1}{3}r^3\right) - \pi\left(-r^3 + \frac{1}{3}r^3\right) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Obsah
37. strana ze 44
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka / Okno
V okně:
Zobrazit / Skrýt ikony
Zobrazit / Skrýt menu

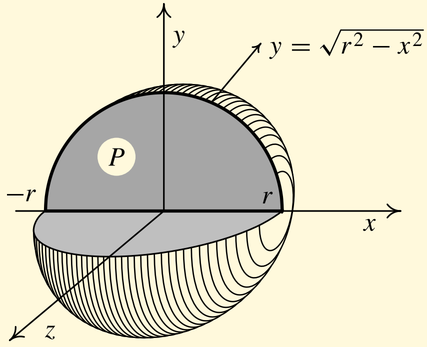
Před dalším výpočtem si připravíme výraz $1 + y'^2$:

$$y' = \frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-1/2}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad \Rightarrow \quad 1 + y'^2 = 1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}.$$

Nyní podle vzorce (3.5) pro obsah pláště Q, tj. pro obsah kulové plochy, vyjde

$$\mathrm{m}_2(Q) = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, \mathrm{d}x = 2\pi r \int_{-r}^{r} \mathrm{d}x = 2\pi r \left[x\right]_{-r}^{r} = 4\pi r^2.$$

Předchozí výpočet nebyl korektní. Derivace y' není definovaná pro $\pm r$ (v tomto bodě existují nevlastní jednostranné derivace). Po zkrácení sice vznikl integrand, který už byl definovaný i v těchto bodech (zbyla jednička), nicméně předpoklady věty 3.6 nebyly splněny. Mohli bychom ale vypočítat integrál na intervalu $\langle -r + \delta, r - \delta \rangle$, kde $\delta > 0$ je malé (vlastně bychom odřízli po stranách dva malé kulové vrchlíky). Jeho hodnota by byla $4\pi r(r - \delta)$. Pak bychom provedli limitní přechod pro $\delta \to 0^+$. Dostali bychom stejný výsledek. Pro naše účely to však takto stačí. ▲



Obr. 3.6

Obsah
38. strana ze 44
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka / Okno
V okně:
Zobrazit / Skrýt ikony
Zobrazit / Skrýt menu

3.3. Délka křivky

Další důležitou aplikací určitého integrálu je výpočet délky rovinné křivky. Omezíme se nejprve na případ, kdy jde o graf funkce $y = f(x)$.

Věta 3.8. *Nechť funkce $f(x)$ je definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$ a má zde spojitou derivaci. Pak pro délku jejího grafu G platí:*

$$\boxed{\mathrm{m}_1(G) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.} \tag{3.6}$$

Příklad 3.9. Určete délku grafu G funkce $f\colon\ y = \ln x$, $x \in \left\langle \sqrt{3}, \sqrt{15} \right\rangle$.

Řešení. Zadaná funkce má derivaci, přičemž platí $f'(x) = \frac{1}{x}$. Podle vzorce (3.6) platí:

$$\mathrm{m}_1(G) = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\cdot x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{c} x^2 + 1 = t^2 \\ x\,\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t \\ \sqrt{3} \rightsquigarrow 2,\ \sqrt{15} \rightsquigarrow 4 \end{array} \right| = \int_2^4 \frac{\sqrt{t^2}}{t^2-1}\cdot t\,\mathrm{d}t = \int_2^4 \frac{t^2}{t^2-1}\,\mathrm{d}t.$$

Při výpočtu jsme použili substituci určenou vztahem $x^2 + 1 = t^2$, tj. $t = \sqrt{x^2+1}$. Tato funkce je rostoucí na intervalu $\left\langle \sqrt{3}, \sqrt{15} \right\rangle$ a převádí ho na interval $\langle 2, 4\rangle$. Obdrželi jsme určitý integrál z racionální neryze lomené funkce. Platí

$$\frac{t^2}{t^2-1} = \frac{t^2-1+1}{t^2-1} = 1 + \frac{1}{t^2-1}\,.$$

Obsah
40. strana ze 44
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka / Okno
V okně:
Zobrazit / Skrýt ikony
Zobrazit / Skrýt menu

Vyniklou ryze lomenou funkci musíme rozložit na parciální zlomky. Jmenovatel má jednoduché reálné kořeny ± 1, takže

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} \qquad \Rightarrow \qquad 1 = A(t+1) + B(t-1).$$

Dosazením kořenů určíme konstanty A a B:

$$\begin{aligned} t &= 1: & 1 &= 2A & &\Rightarrow & A &= \frac{1}{2}, \\ t &= -1: & 1 &= -2B & &\Rightarrow & B &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Celkem dostaneme

$$\begin{aligned} \mathrm{m}_1(G) &= \int_2^4 \left(1 + \frac{1/2}{t-1} - \frac{1/2}{t+1}\right) \mathrm{d}t = \left[t + \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t+1|\right]_2^4 = \\ &= \left(4 + \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 5\right) - \left(2 + \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{2}\ln 3\right) = 2 + \ln 3 - \frac{1}{2}\ln 5. \end{aligned}$$

▲

Nyní si všimneme obecnějšího případu, kdy křivka nemusí být grafem funkce. Vzhledem k rozsahu nemůžeme obecně zavádět pojem křivky. Pro názornost nám postačí představa, že jde vlastně o trajektorii, kterou nakreslí bod, jenž se v čase spojitě pohybuje v rovině. Musíme tedy zadat polohu bodu v rovině v daný okamžik. To uděláme pomocí dvou spojitých funkcí $\varphi(t)$ a $\psi(t)$, udávajících x-ovou a y-ovou souřadnici pohybujícího se bodu. Dostaneme tzv. *parametrické rovnice křivky*. Ty mají tedy tvar

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned} \qquad t \in \langle \alpha, \beta \rangle. \tag{3.7}$$

Proměnnou t nazýváme *parametr* (nemusí mít nutně význam času, může to být např. délka). Speciální případ — parametrické rovnice úsečky — znáte z analytické geometrie. Z fyzikálního pohledu je délka křivky vlastně drahou, kterou bod urazí od okamžiku α do okamžiku β. Pro délku křivky lze dokázat následující tvrzení.

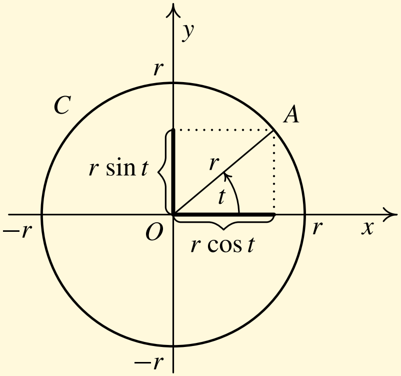
Věta 3.10. *Nechť křivka C je dána parametrickými rovnicemi (3.7), přičemž funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ mají spojité derivace na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Pak platí:*

$$\boxed{\mathrm{m}_1(C) = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, \mathrm{d}t.} \tag{3.8}$$

Graf libovolné funkce $f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$ lze parametrizovat např. rovnicemi $x = t$, $y = f(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, takže $\varphi'(t) = 1$, $\psi'(t) = f'(t)$. Po dosazení do (3.8) ihned vidíme, že jde skutečně o zobecnění vztahu (3.6).

Příklad 3.11. Vypočtěte délku kružnice C o poloměru $r > 0$.

Řešení. Bez újmy na obecnosti lze kružnici umístit středem do počátku. Na délku to nemá vliv. Její rovnice je pak $x^2 + y^2 = r^2$. Nyní bychom mohli určit vzorec např. horní půlkružnice, což je $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, přičemž $x \in \langle -r, r\rangle$, pomocí vzorce (3.6) spočítat její délku a výsledek vynásobit dvěma. Potíž ovšem je, že derivace této funkce má tvar $y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$, a není tudíž definovaná pro $x = -r$ a $x = r$ (v těchto bodech existují nevlastní jednostranné derivace). Předpoklady věty 3.8 nejsou tedy splněny. Dokonce funkce $\sqrt{1 + y'^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}$ není na intervalu $(-r, r)$ ohraničená.



Obr. 3.7

Zkusíme tedy najít parametrické rovnice kružnice C. To není nijak obtížné. Z definice funkcí sinus a kosinus je vidět (viz obr. 3.7), že poloha libovolného bodu $A = (x, y)$ je dána takto: $A = (r\cos t, r\sin t)$, kde t je úhel, který svírá průvodič bodu A s kladnou částí osy x. Měníme-li úhel t od nuly do 2π, proběhne bod A celou kružnici. Označme $\varphi(t) = r\cos t$, $\psi(t) = r\sin t$. Hledané parametrické rovnice jsou:

$$C: \quad \begin{aligned} x &= r\cos t, \\ y &= r\sin t, \end{aligned} \qquad t \in \langle 0, 2\pi\rangle.$$

Protože $\varphi'(t) = (r\cos t)' = -r\sin t$ a $\psi'(t) = (r\sin t)' = r\cos t$, vyjde ze vzorce (3.8), že platí:

Obsah

43. strana ze 44

Zavřít dokument

Konec

Celá obrazovka/Okno

V okně:

Zobrazit/Skrýt ikony

Zobrazit/Skrýt menu

$$\mathrm{m}_1(C) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^{2\pi} r\,\mathrm{d}t = r\big[t\big]_0^{2\pi} = 2\pi r.$$

▲

Poznámka 3.12.

1. Zcela analogicky je možné postupovat v případě prostorové křivky, přibude jen třetí souřadnice polohy bodu. Parametrické rovnice křivky K budou mít tvar

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \qquad t \in \langle\alpha, \beta\rangle, \\ z &= \omega(t), \end{aligned}$$

   a pro její délku bude platit (za předpokladu existence spojitých derivací $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ a $\omega'(t)$)

$$\mathrm{m}_1(K) = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\omega'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

2. Při fyzikální interpretaci, kdy rovnice (3.7) popisují polohu hmotného bodu, má $(\varphi'(t), \psi'(t))$ význam vektoru okamžité rychlosti v čase t. Z analytické geometrie víme, že $\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$ je velikost tohoto vektoru. Vzorec (3.8) tudíž vyjadřuje, že určitý integrál z velikosti okamžité rychlosti přes interval $\langle\alpha, \beta\rangle$ udává dráhu, kterou tento bod urazí od časového okamžiku α do časového okamžiku β. Totéž platí v případě prostorové křivky.
3. Integrál pro výpočet délky křivky obsahuje odmocninu. Proto i pro velmi jednoduché funkce se často stane, že neumíme příslušný neurčitý integrál spočítat pomocí elementárních funkcí. Pak nezbývá než použít nějakou přibližnou metodu.

Obsah
44. strana ze 44
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka / Okno
V okně:
Zobrazit / Skrýt ikony
Zobrazit / Skrýt menu

Literatura

[1] Hošková, Š., Kuben, J., Račková, P. : *Integrální počet funkcí jedné proměnné*. VŠB–TU Ostrava 2006.

[2] Kuben, J., Šarmanová, P.: *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*. VŠB–TU Ostrava 2006.

[3] Schwabik Š., Šarmanová, P. : *Malý průvodce historií integrálu*. Prometheus, Praha, 1996.

Děkuji za pozornost a přeji pěkný den