Procházky v grafech

Petr Kovář[1]
petr.kovar@vsb.cz

[1]Vysolá škola báňská – Technická univerzita Ostrava,

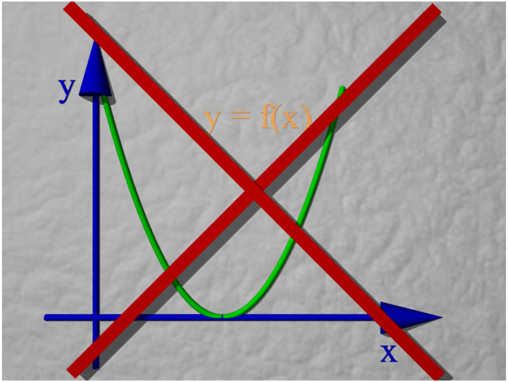
Škola matematického modelování, 2008

Přehled přednášky

Co není (náš) graf ...

Definice

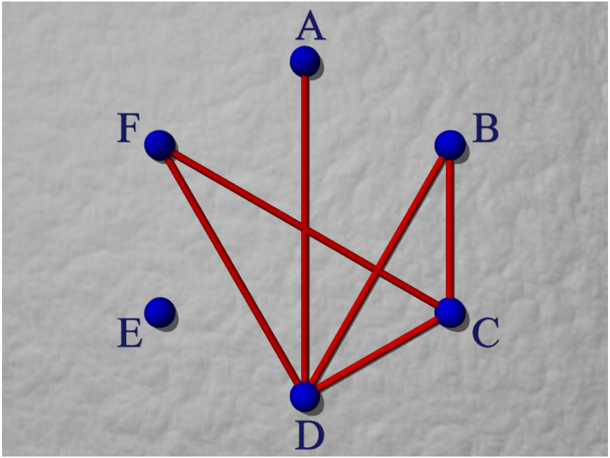
Graf je dvojice množin (V, E). *V je neprázdná množina vrcholů a E je množina dvouprvkových podmnožin množiny V.*



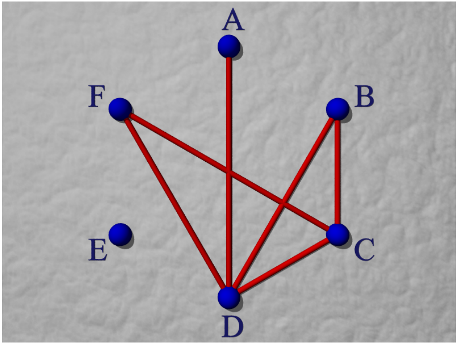
Co je graf?

Definice (přeformulovaná)

Graf je dvojice množin (V, E). V je množina bodů v rovině a množina hran E obsahuje spojnice vrcholů v rovině.

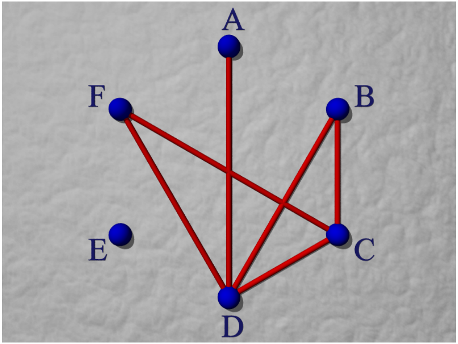


Graf je šikovný díky přehlednému znázornění.



- objekty – vrcholy
- objekty spolu souvisí – mezi vrcholy je hrana
- objekty spolu nesouvisí – mezi vrcholy není hrana

Další (jednoduché) pojmy

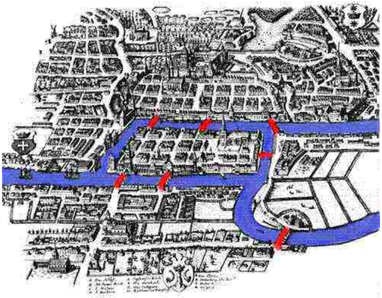


- **Stupeň vrcholu** – počet hran, které končí ve vrcholu.
- **Tah v grafu** – posloupnost vrcholů a hran, které na sebe "navazují", žádná hrana se neopakuje.
  Tah začíná a končí vždy vrcholem.
  $A, AD, D, DC, C, CF, F, FD, D, DB, B, BC, C.$
- **Souvislý graf** – mezi každými dvěma vrcholy v grafu najdeme tah.

Historie pojmu graf

Problém mostů města Královce 1736

Pruské město Královec leží na řece Pregole. Řeka vytváří dva ostrovy, které byly s městem spojeny sedmi mosty.



Otázka

Mohu všechny mosty přejít tak, abych vstoupil na každý most pouze jednou?

Leonhard Euler

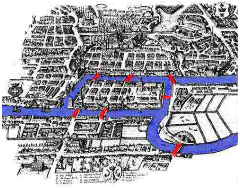
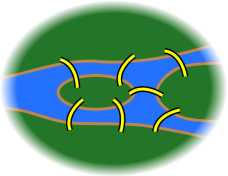
Leonhard Euler (1707–1783)

Problém byl vyřešen Leonhardem Eulerem v roce 1736. Euler dokázal, že to možné není.

Věta

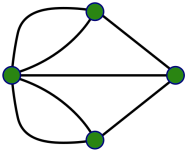
Graf G lze nakreslit jedním otevřeným tahem právě když G je souvislý a právě dva *vrcholy v G jsou lichého stupně.*

Přeformulování do řeči teorie grafů

Sestavíme graf:

- vrcholy – oba břehy a oba ostrovy
- hrany – mosty, které břehy a ostrovy spojují



Procházka v grafu:
posloupnost vrcholů a hran, které na sebe navazují.

Věta o kreslení jedním tahem

Definice

Tah v grafu G je taková posloupnost vrcholů a hran

$$v_0, v_0v_1, v_1, v_1v_2, v_2, \ldots, v_{n-1}v_n, v_n,$$

kde v_i jsou vrcholy grafu G a v_iv_{i+1} jsou hrany grafu G a žádná hrana se neopakuje.
Počet hran tahu nazveme délkou tahu v_0v_n.

Definice

Eulerovský tah je tah, který obsahuje všechny hrany daného grafu. Graf, ve kterém existuje eulerovský tah se nazývá eulerovský graf.

Věta

Graf G je možno nakreslit jedním (uzavřeným) tahem, právě když G je souvislý a všechny vrcholy v G jsou sudého stupně.

Důkaz matematickou indukcí vzhledem k počtu hran.

Myšlenka důkazu

Indukcí vzhledem k počtu hran (jen myšlenka důkazu).

- Základ indukce:
  Lze použít triviální graf. Pro netriviální souvislý graf G je každý vrchol stupně alespoň 2. Nejmenší takový graf je *cyklus* C_n. G je jistě možno nakreslit jedním uzavřeným tahem (proč?).
- Indukční krok:
  Předpokládejme, že každý souvislý graf s méně než $|E|$ hranami je možno nakreslit jedním uzavřeným tahem.
  V G najdeme cyklus C (každý vrchol stupně alespoň 2).
  V grafu $G - C$ jsou vrcholy sudého stupně a nebo izolované vrcholy. Pokud $G - C$ není souvislý, lze každou jeho komponentu dle indukčního předpokladu nakreslit jedním tahem.
  Nyní přidáme do cyklu C uzavřený tah pro každý vrchol další v_i, který leží v některé komponentě. Získáme uzavřený tah grafem G.

Podle principu matematické indukce je důkaz hotov.

Další věta o kreslení jedním a více tahy tahem

Věta

Graf G lze nakreslit jedním otevřeným tahem, právě když G je souvislý a právě dva *vrcholy v G jsou lichého stupně.*

Věta

Graf G lze nakreslit k otevřenými tahy, právě když G je souvislý a právě $2k$ *vrcholů v G je lichého stupně.*

Dokáží se jako důsledek první věty.

Další aplikace

Jednotažky

- kdy jde obrázek nakreslit jedním tahem?
- kdy nejde obrázek nakreslit jedním tahem?
- kolika (minimálně) tahy jde obrázek nakreslit?

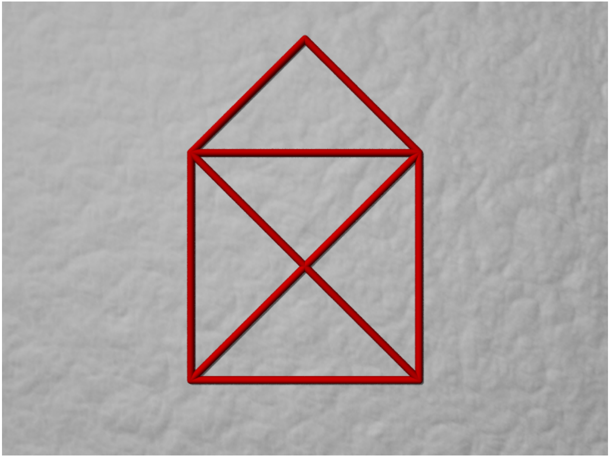
Příklady, kdy preferujeme “kreslení jedním tahem”

- uklízení sněhu z ulic
- vyvážení odpadků
- roznášení pošty
- vyšívání
- v teorii kódování

Samozřejmě někdy má smysl řešit úlohy více tahy.

Příklady

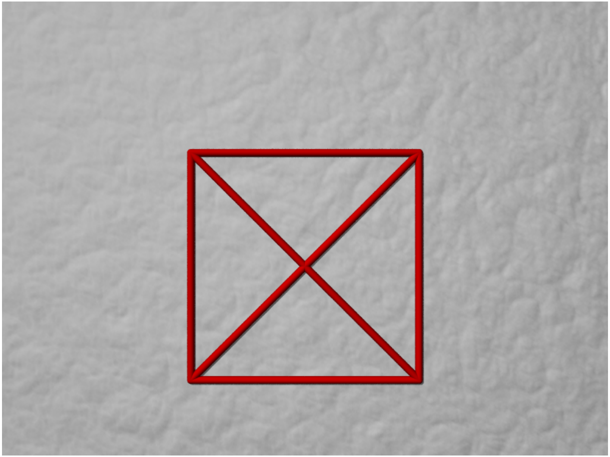
Jde následující obrázek nakreslit jedním tahem?



Ano!

Příklady

Jde následující obrázek nakreslit jedním tahem?



Ne!

Tah a cesta v grafu

Doposud jsme v grafu hledali tahy. Nyní budeme hledat cesty.

Definice

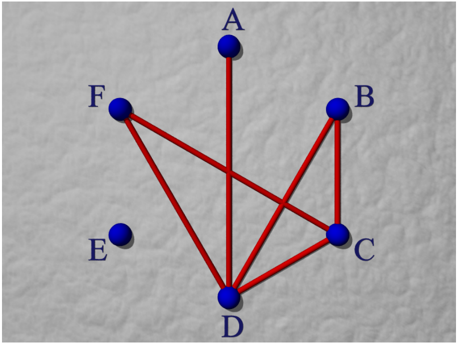
Tah v grafu G je taková posloupnost vrcholů a hran

$$v_0, v_0v_1, v_1, v_1v_2, v_2, \ldots, v_{n-1}v_n, v_n,$$

kde v_i jsou vrcholy grafu G a v_iv_{i+1} jsou hrany grafu G a žádná hrana se neopakuje.

Definice

Cesta je tah, ve kterém se neopakují ani žádné vrcholy. Počet hran cesty nazveme délkou cesty.



- Příklad tahu (délky 6):

$$A, AD, D, DC, C, CF, F, FD, D, DB, B, BC, C.$$

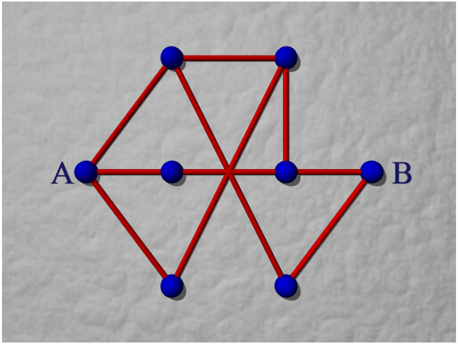
- Příklad cesty (délky 3):

$$C, CF, F, FD, D, DB, B.$$

- Ani tah ani cesta:

$$B, BD, D, DC, C, CD, D.$$

Délka cesty mezi vrcholy

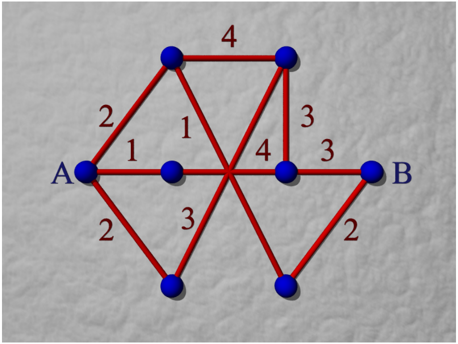


Jaká je délka nejkratší cesty mezi A a B?

Vážený graf

Definice

Ve váženém (ohodnoceném) grafy je navíc každé hraně přiřazeno reálné číslo.

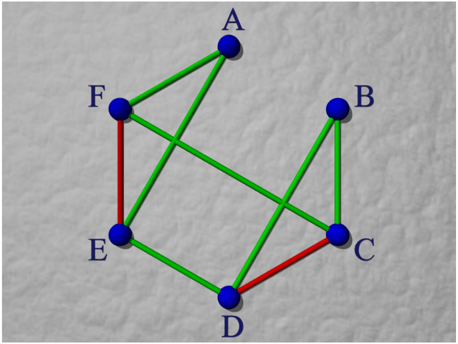


Jaká je délka nejkratší cesty mezi A a B?
Existují obecné metody řešení . . .

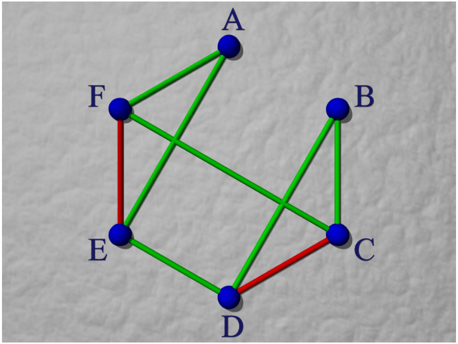
Hamiltonovská cesta a kružnice

Definice

Hamiltonovská cesta v grafu obsahuje všechny vrcholy grafu.
Hamiltonovská kružnice v grafu je takový uzavřený tah (první vrchol tahu splývá s posledním), který obsahuje všechny vrcholy grafu, přičemž žádný vrchol se neopakuje.



Hamiltonovská cesta a eulerovský tah

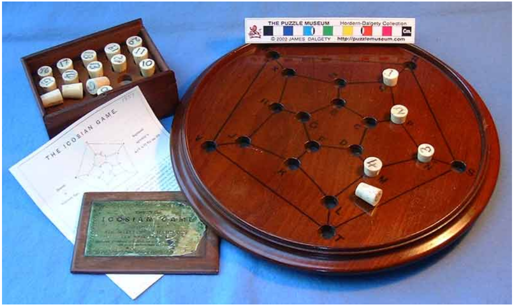


Pozor:

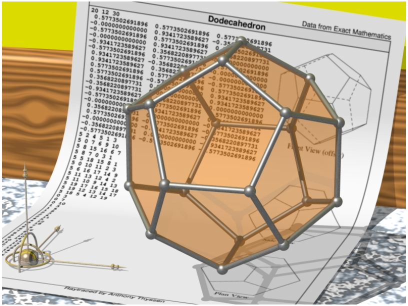
- eulerovský tah projde všechny hrany
- hamiltonovská cesta projde všechny vrcholy
  (nemusí projít všechny hrany!) je mnohem těžší

Hamilton

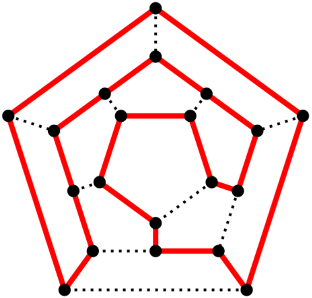
William Rowan Hamilton (1805 – 1865)



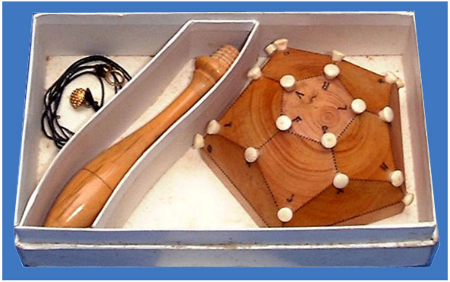
Teoretickou úlohu dokonce prodával jako hlavolam.

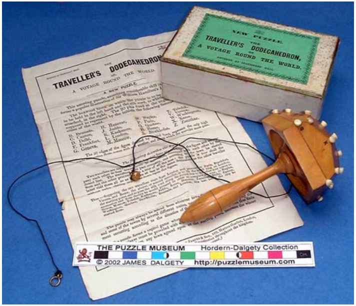


Pravidelný dvanáctistěn ("dodekaedr").

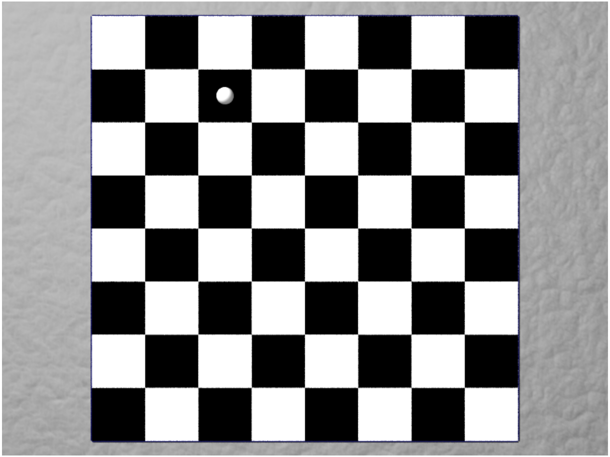


Nakreslený do roviny.



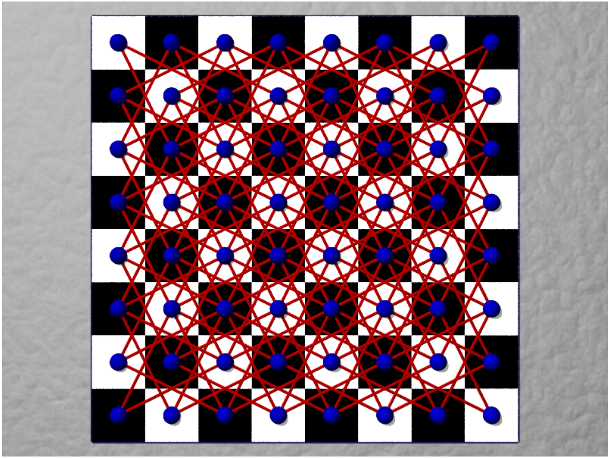

TRAVELLER'S DODECAHEDRON,
A VOYAGE ROUND THE WORLD.
THE PUZZLE MUSEUM
Hordern-Dalgety Collection
© 2002 JAMES DALGETY
http://puzzlemuseum.com

Jezdec na šachovnici



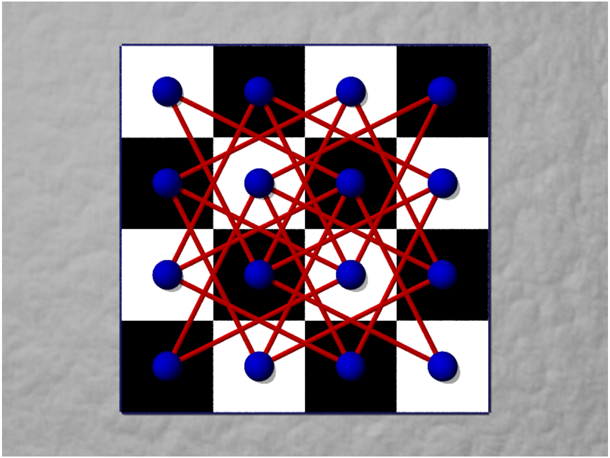
Formulace úlohy

Je možné objet celou šachovnici koněm tak, abychom na každé pole vstoupili právě jednou?



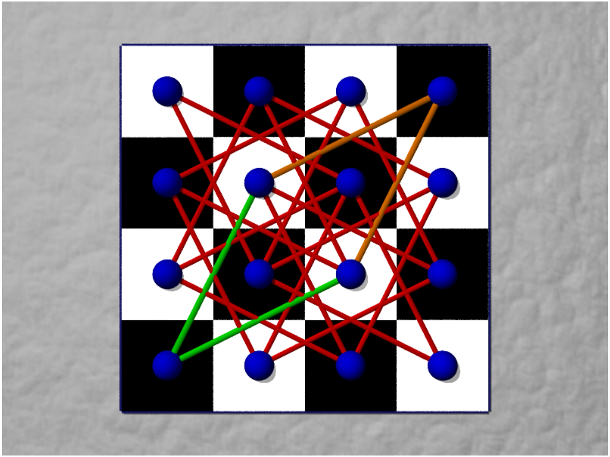
Formulace úlohy

Je možné objet celou šachovnici koněm tak, abychom na každé pole vstoupili právě jednou a vrátili se na výchozí políčko?



Formulace úlohy

Je možné objet celou šachovnici koněm tak, abychom na každé pole vstoupili právě jednou a vrátili se na výchozí políčko?



Formulace úlohy pomocí teorie grafů

Existuje v grafu hamiltonovská kružnice?

Stačí si v grafu něčeho všimnout. . .

3	30	49	34	53	6	47	26
50	33	4	29	48	27	54	7
31	2	35	52	5	56	25	46
36	51	32	1	28	45	8	55
63	16	37	20	9	24	57	44
38	19	64	13	60	41	10	23
15	62	17	40	21	12	43	58
18	39	14	61	42	59	22	11

Pro šachovnici 8×8 řešení existuje.

Koza vlk a zelí

Formulace úlohy

Hospodář se vrací z trhu, kde koupil kozu, mladého vlka a zelí. Na cestě domů se musí přeplavit přes řeku. Jeho loďka je malá a vratká, proto může s sebou vzít vždy jen jednu ze tří věcí. Na břehu nemohou spolu zůstat koza a zelí (protože by koza zelí sežrala), ani koza s vlkem (protože by vlk pokousal kozu).
Jak musí hospodář převoz zorganizovat, aby dostal na druhý břeh celý svůj nákup? Kolik existuje řešení?

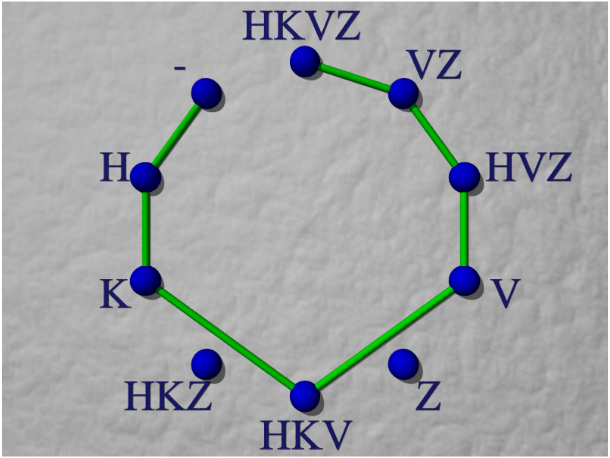


Formulace úlohy pomocí teorie grafů

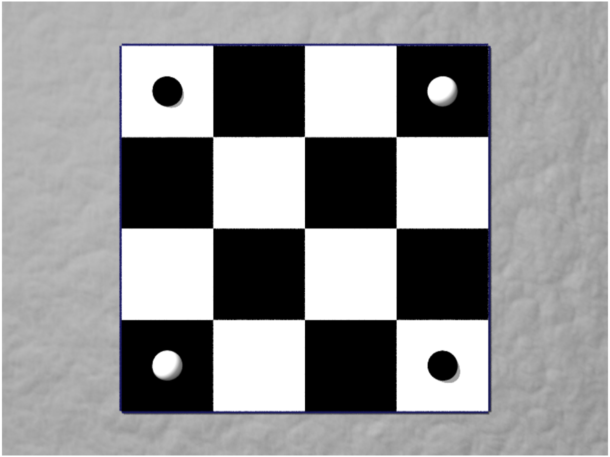
Sestavíme graf

- vrcholy grafu = stavy (kdo je na levém břehu?)
- hrany = možný přechod

Řešení užitím grafu



Jiná úloha



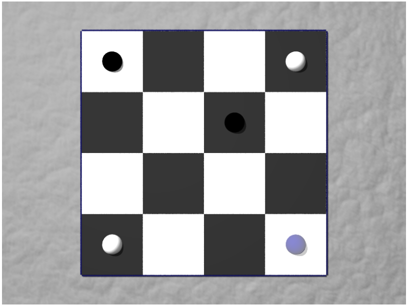
Formulace úlohy

Co nejmenším počtem tahů zajistěte, aby černé koně stály na místě bílých a naopak.

Formulace úlohy pomocí teorie grafů

Sestavíme stavový graf:

- vrcholy jsou možné stavy,
- hrany odpovídají povoleným tahům.



Například $(\{a1, d4\}, \{a4, d1\})$ a $(\{a1, d4\}, \{a4, c3\})$ jsou spojeny hranou.

Formulace úlohy pomocí teorie grafů

Dostaneme graf, který má:

- $C^*(2, 2, 12) = 10920$ vrcholů $(\{b_1, b_2\}, \{c_1, c_2\})$,
- x hran.

V tomto případě je stavový graf *extrémně* veliký.

Nemá smysl řešit ručně – můžete zkusit naprogramovat...

Prolomení kódu

Formulace úlohy

Záznamník je možno přehrát dálkově užitím tónové volby. Stačí zadat správnou posloupnosti tónů *bez ohledu na předchozí stisknuté klávesy*. Je-li 1234 heslo záznamníku, můžeme zadat **1234**, nebo 8**1234** nebo i 6382543**1234**.

Otázky

- Nejmenší počet cifer, který zajistí prolomení kódu?
- Jak sestrojit příslušnou posloupnost čísel?

Formulace úlohy pomocí teorie grafů

Sestavíme graf:

- vrcholy jsou kódová slova bez posledního znaku,
- orientované hrany spojí dvě slova:
  vznikne vynecháním prvního a přidáním znaku na konec.
- Jedná se o orientovaný eulerovský graf!
- Existuje (uzavřený) eulerovský tah všemi vrcholy.
  Každá hrana odpovídá jednomu slovo.

Sestavení kódu:

1. Jméno prvního vrcholu vybereme *xyz*,
2. za každou hranu tahu přidáme jeden znak *w*,
3. nakonec zopakujeme znaky *xyz*.

Celkem dostaneme právě 10 003 cifer.

Linky

http://cs.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler
http://en.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler
http://cs.wikipedia.org/wiki/Eulerovský_tah
http://projecteuler.net/index.php?section=problems

Děkuji za pozornost.