Kolik je prvočísel?

Petr Vodstrčil

Označení:

Označme $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, \dots\}$ množinu všech prvočísel. Navíc předpokládejme, že $p_1 < p_2 < \dots$.

Nechť $x \in \mathbb{R}$. Položme $\mathbb{P}_x = \{p \in \mathbb{P} : p \leq x\}$ a definujme funkci $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ předpisem

$$\pi(x) = |\mathbb{P}_x|.$$

Hodnota $\pi(x)$ tedy představuje počet prvočísel, která nepřevyšují číslo x.

Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ budeme symbolem $[x]$ označovat dolní celou část čísla x, tj. celé číslo splňující nerovnosti $[x] \leq x < [x] + 1$.

Naším hlavním cílem bude najít odhady funkce π.

Tvrzení 1. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $p \in \mathbb{P}$. Pak v rozkladu čísla $n!$ na prvočinitele se prvočíslo p vyskytuje v mocnině α, kde*

$$\alpha = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right].$$

Důsledek 1. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $p \in \mathbb{P}$. Pak v rozkladu čísla $\binom{2n}{n}$ na prvočinitele se prvočíslo p vyskytuje v mocnině β, kde*

$$\beta = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\left[\frac{2n}{p^k}\right] - 2\left[\frac{n}{p^k}\right] \right).$$

Poznámka. Všimněme si, že v poslední sumě lze ve skutečnosti sčítat pouze do m, kde $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je číslo splňující nerovnosti $p^m \leq 2n < p^{m+1}$, tj. $m = \left[\log_p 2n\right]$.

Dále je podstatné si uvědomit, že pro každé $x \in \mathbb{R}$

$$[2x] - 2[x] \in \{0, 1\}.$$

Platí totiž $[2x] \leq 2x$ a $[x] > x - 1$, odkud máme $[2x] - 2[x] < 2$. Rovněž lze lehce ověřit nerovnost $[2x] - 2[x] \geq 0$, což společně s celočíselností dává požadovaný vztah.

Odtud tedy plyne, že $\beta \leq m$, a tedy $p^\beta \leq p^m \leq 2n$.

Z výše uvedených postřehů dostáváme následující tvrzení.

Tvrzení 2. *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Buď dále $p \in \mathbb{P}$ prvočíslo vyskytující se v rozkladu čísla $\binom{2n}{n}$ na prvočinitele (a to v mocnině $\beta \in \mathbb{N}$). Pak $p^\beta \leq 2n$.*

Důsledek 2. *Pro libovolné přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\pi(2n)}.$$

Odhadneme-li nyní kombinační číslo $\binom{2n}{n}$ pomocí nerovnosti

$$\binom{2n}{n} \geq \frac{2^{2n}}{2n},$$

kterou snadno dokážeme např. matematickou indukcí, obdržíme pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{2^{2n}}{2n} \leq (2n)^{\pi(2n)},$$

což po zlogaritmování dává

$$2n - \log_2 2n \leq \pi(2n) \log_2 2n,$$

tj.

$$\pi(2n) \geq \frac{2n}{\log_2 2n} - 1.$$

Nechť nyní $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 3$. Označme $2k$ nejmenší sudé číslo splňující nerovnost $x \leq 2k$. Pak jistě platí

$$\pi(x) \geq \pi(2k) - 1 \geq \frac{2k}{\log_2 2k} - 2 \geq \frac{x}{\log_2 x} - 2, \tag{1}$$

neboť funkce $f(x) = \frac{x}{\log_2 x}$ je na intervalu $\langle 3, +\infty)$ rostoucí. Snadno se přesvědčíme, že nerovnost (1) platí i pro $x \in \langle 2, 3)$. Dokázali jsme tedy následující větu:

Věta 1. *Pro každé $x \in \langle 2, +\infty)$ platí*

$$\pi(x) \geq \frac{x}{\log_2 x} - 2.$$

Věta 2. *Pro každé $x \geq 2$ platí*

$$\pi(x) \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\log_2 x}.$$

Důkaz. Podle Věty 1 platí

$$\pi(x) \geq \frac{x}{\log_2 x} - 2 = \frac{x}{\log_2 x} \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{\log_2 x}{x}\right).$$

Lze ukázat, že pro každé $x \geq 16$ platí $\frac{\log_2 x}{x} \leq \frac{1}{4}$. Odtud dostáváme, že pro každé $x \geq 16$ platí

$$\pi(x) \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\log_2 x}.$$

Přímým výpočtem se můžeme přesvědčit, že výše uvedený vztah platí také pro $x \in \langle 2, 16)$. □

Dostali jsme vlastně dolní odhad funkce $\pi(x)$. Pokusíme se najít také horní odhad této funkce. K tomu budeme potřebovat následující pomocné tvrzení:

Tvrzení 3. *Pro každé $x \in \langle 2, +\infty)$ platí*

$$\prod_{p \in \mathbb{P}_x} p < 4^x.$$

Důkaz. Tvrzení stačí dokázat pouze pro přirozená čísla. Důkaz povedeme matematickou indukcí. Pro $x = 2$ tvrzení platí, neboť $2 < 4^2$. Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro každé $x \in \{2, 3, \dots, k\}$, kde $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ (indukční předpoklad). Budeme chtít ukázat, že tvrzení platí pro $x = k + 1$.

Jestliže k je liché, pak není co dokazovat, protože

$$\prod_{p \leq k+1} p = \prod_{p \leq k} p < 4^k < 4^{k+1}.$$

Předpokládejme proto, že k je sudé, tj. $k = 2l$, $l \in \mathbb{N}$. Pak podle indukčního předpokladu platí

$$\prod_{p \leq k+1} p = \prod_{p \leq 2l+1} p = \prod_{p \leq l+1} p \cdot \prod_{l+2 \leq p \leq 2l+1} p < 4^{l+1} \cdot \prod_{l+2 \leq p \leq 2l+1} p. \tag{2}$$

Uvědomme si, že

$$\prod_{l+2 \leq p \leq 2l+1} p \leq \binom{2l+1}{l} \leq 4^l. \tag{3}$$

Z nerovností (2) a (3) plyne

$$\prod_{p \leq k+1} p < 4^{2l+1} = 4^{k+1},$$

což jsme chtěli dokázat. □

Z Tvrzení 3 lze pro $x \geq 2$ odvodit následující nerovnost.

$$4^x > \prod_{p \leq x} p = \prod_{p \leq \sqrt{x}} p \cdot \prod_{\sqrt{x} < p \leq x} p \geq \left(\sqrt{x}\right)^{\pi(x) - \pi(\sqrt{x})}.$$

Následným zlogaritmováním obdržíme

$$x \cdot \log_2 4 > \frac{1}{2}\left(\pi(x) - \pi(\sqrt{x})\right) \log_2 x,$$

odkud snadno získáme

$$\pi(x) < \frac{4x}{\log_2 x} + \pi(\sqrt{x}) \leq 4 \cdot \frac{x}{\log_2 x} + \sqrt{x} = \frac{x}{\log_2 x} \cdot \left(4 + \frac{\log_2 x}{\sqrt{x}}\right).$$

Lze ukázat, že pro každé $x \geq 16$ platí vztah $\frac{\log_2 x}{\sqrt{x}} \leq 1$, a tedy pro každé $x \geq 16$ platí

$$\pi(x) \leq 5 \cdot \frac{x}{\log_2 x}.$$

Přímým výpočtem lze ukázat, že výše uvedený vztah platí i pro $x \in \langle 2, 16)$, což dohromady dává následující větu:

Věta 3. *Pro každé $x \in \langle 2, +\infty)$ platí odhad*

$$\pi(x) \leq 5 \cdot \frac{x}{\log_2 x}.$$

Spojením Věty 2 a Věty 3 obdržíme známou Čebyševovu větu.

Věta 4 (Čebyševova). *Existují konstanty $c > 0$, $d > 0$ takové, že pro každé $x \geq 2$ platí*

$$c \cdot \frac{x}{\log_2 x} \leq \pi(x) \leq d \cdot \frac{x}{\log_2 x}.$$

Podstatným zobecněním Čebyševovy věty je tzv. prvočíselná věta (1896), která tvrdí, že

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} = 1, \qquad \text{tj.} \qquad \pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \doteq 1{,}44 \cdot \frac{x}{\log_2 x}.$$

Pro ilustraci uvedeme přesnou hodnotu funkce $\pi(x)$ a $\frac{x}{\ln x}$ pro $x = 10^6$ a $x = 10^9$.

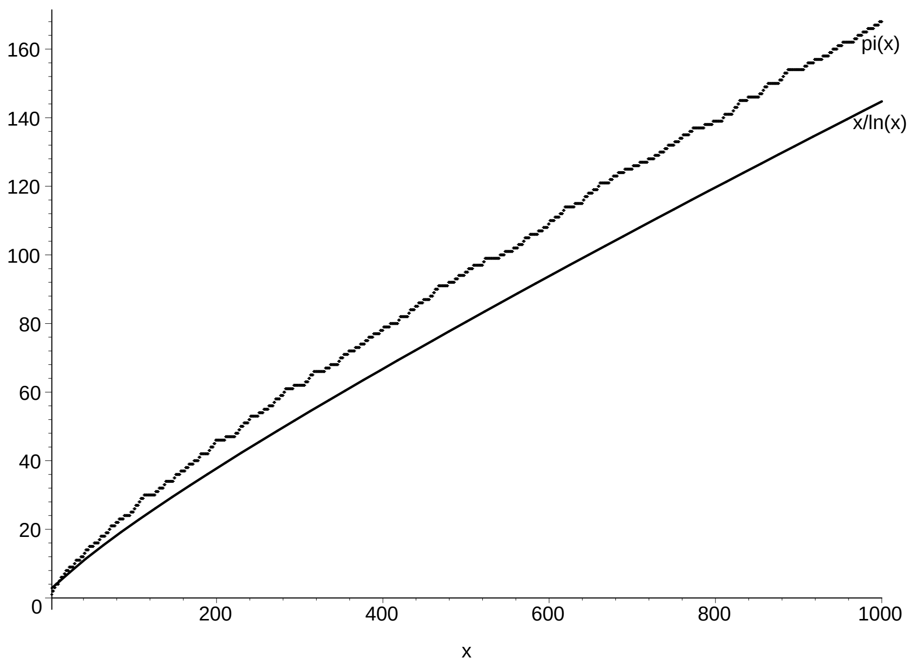
$$\pi(10^6) = 78\,498 \qquad\qquad \pi(10^9) = 50\,847\,534$$

$$\frac{10^6}{\ln 10^6} \doteq 72\,382{,}4 \qquad\qquad \frac{10^9}{\ln 10^9} \doteq 48\,254\,942{,}4.$$

Na závěr jsou uvedeny grafy funkcí

$$\pi(x) \qquad \text{a} \qquad \frac{x}{\ln x}$$

pro $x \in \langle 2, 1000 \rangle$.



Některé zajímavé důsledky prvočíselné věty:

Ze vztahu $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ lze snadno odvodit např. následující skutečnosti.

- Pro libovolná $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$ existuje $x_0 \in \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x \geq x_0$ existuje v intervalu (ax, bx) aspoň jedno prvočíslo.
- Pro libovolný sled číslic existuje prvočíslo, které tímto sledem začíná.
- Pro libovolné $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ existuje posloupnost prvočísel $\{q_n\}_{n=1}^{+\infty}$, pro kterou $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{q_n}{n} = x$.