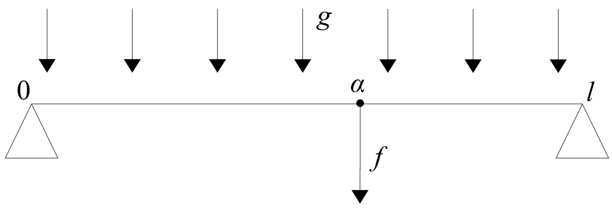
Cvičení 4

1. Modelování průhybu mostu

Na most délky l a tuhosti k působí po celé jeho délce gravitační síla s konstantní hustotou g způsobená hmotností mostu. Na most dále působí bodová gravitační síla f způsobená hmotností chodce stojícího na mostě ve vzdálenosti α od počátku mostu.



Průhyb mostu lze modelovat jako řešení úlohy

$$\boxed{\begin{array}{l} -k\,u''(x) = g + f\delta_\alpha(x) \quad \text{pro } x \in (0,\, l),\; k,\, l > 0,\; \alpha \in \langle 0,\, l\rangle, \\ u(0) = u(l) = 0, \\ \delta_\alpha(x) := \begin{cases} 1 & \text{pro } x = \alpha, \\ 0 & \text{jinde v } \langle 0, l\rangle. \end{cases} \end{array}}$$

K numerickému řešení úlohy použijeme metodu sítí. Bodovou sílu f přitom necháme působit v tom uzlu x_j, který je nejblíže bodu α. Metoda sítí pak vede na soustavu

$$\mathsf{A}\,\mathbf{u} = \mathbf{b}_\alpha, \text{ kde } \mathbf{b}_\alpha := \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} g \\ \vdots \\ g \\ g+f \\ g \\ \vdots \\ g \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} {\scriptstyle 1} \\ \vdots \\ {\scriptstyle j-1} \\ {\scriptstyle j} \\ {\scriptstyle j+1} \\ \vdots \\ {\scriptstyle n-1} \end{array}.$$

Příklad 1 Metodou sítí modelujte průhyb mostu s parametry

$$l := 10\,\mathrm{m},\; g := -100\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1},\; f := -2000\,\mathrm{N},\; k := 10^5\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1},\; \alpha := 8\,\mathrm{m}.$$

2. Přechod přes most (konstantní rychlostí)

Uvažujme nyní situaci, kdy se po mostě rovnoměrně pohybuje chodec. Označuje-li v konstantní rychlost chodce, pak

$$t = \frac{l}{v}$$

je doba, za kterou chodec most přejde. Časový interval $\langle 0,\, t\rangle$ dále rozdělíme na n stejných časových úseků o délce

$$\Delta\, t = \frac{t}{n}.$$

V čase 0 a na konci každého časového úseku vypočteme průhyb mostu:

for $i = 0, 1, \ldots, n$

vyřešíme soustavu $\mathsf{A}\,\mathbf{u} = \mathbf{b}_\alpha$ pro $\alpha = v \cdot \Delta\, t \cdot i$

end

Příklad 2 Po mostě se pohybuje chodec konstantní rychlostí $v := 1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Modelujte postupný průhyb mostu při přechodu chodce, jestliže

$$l := 10\,\mathrm{m},\ \ g := -100\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}},\ \ f := -2000\,\mathrm{N},\ \ k := 10^5\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}.$$

3. Optimalizace mostu

Příklad 3 Po mostě se pohybuje chodec konstantní rychlostí $v := 4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Najděte minimální tuhost mostu tak, aby se prohnul nejvýše o předepsanou hodnotu, jestliže

$$l := 10\,\mathrm{m},\ \ g := -100\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}},\ \ f := -10000\,\mathrm{N},\ \ \text{max. prohnutí činí}\ \ -25\,\mathrm{m}.$$