Cvičení 2

1. Metoda prostých iterací

Věta 1 *Nechť existuje η takové, že $f(\eta) = \eta$ a $|f'(x)| \leq \lambda < 1$ pro $x \in \langle \eta - \alpha, \eta + \alpha \rangle$. Zvolme bod x_0 v tomto intervalu. Potom posloupnost (x_n) definovaná předpisem*

$$\boxed{x_{n+1} := f(x_n)}$$

konverguje k η.

Příklad 1 Posloupnost (x_n) daná předpisem

$$x_{n+1} := x_n - \frac{1}{4}(x_n^2 - 2)$$

konverguje k $\sqrt{2}$ pro libovolné $x_0 \in (0, 4)$.

Uveďme si nyní algoritmus, kterým lze najít přibližné řešení rovnice $f(x) = x$, a to v případě, že počáteční aproximace x_0 a funkce f splňují předpoklady Věty 1.

Algoritmus 1 (`Metoda prostých iterací`)

1. $\varepsilon > 0$ (přesnost)
   x_0
   $k := 0$
   $x_1 := f(x_0)$
2. while $\|x_{k+1} - x_k\| \geq \varepsilon$
      $k := k + 1$
      $x_{k+1} := f(x_k)$
   end
3. x_{k+1} aproximuje s danou přesností řešení rovnice $f(x) = x$

2. Newtonova metoda

Zabývejme se řešením rovnice $g(x) = 0$. Budeme vycházet z metody prostých iterací. Jestliže η řeší rovnici $g(x) = 0$, pak η řeší také rovnici

$$x = f(x) := x - \frac{g(x)}{h(x)},$$

kde $h(x) \neq 0$ pro každé x z nějakého okolí $U(\eta)$. Dále platí

$$f'(x) = 1 - \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h^2(x)} \quad \text{pro } x \in U(\eta).$$

Pro dobrou konvergenci budeme požadovat $f'(\eta) = 0$, tj.

$$1 - \frac{g'(\eta)}{h(\eta)} = 0.$$

Odtud $h(\eta) = g'(\eta)$. Platí tedy, že posloupnost (x_n) definovaná předpisem

$$\boxed{x_{n+1} := x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}}$$

konverguje k η, pokud x_0 je dostatečně blízko η ($f'(\eta) = 0 \;\Rightarrow\; |f'(x)| \leq \lambda < 1$ pro $|x - \eta|$ malé).

Algoritmus 2 (`Newtonova metoda`)

1. $\varepsilon > 0$ (přesnost)
   x_0
   $k := 0$
   $x_1 := x_0 - g(x_0)/g'(x_0)$
2. while $\|x_{k+1} - x_k\| \geq \varepsilon$
      $k := k + 1$
      $x_{k+1} := x_k - g(x_k)/g'(x_k)$
   end
3. x_{k+1} aproximuje s danou přesností řešení rovnice $g(x) = 0$

Příklad 2 Pomocí Newtonovy metody aproximujte řešení rovnice

1) $\ln x + (x-1)^3 = 0$,

2) $x - \mathrm{e}^{-x^2} = 1$.

Příklad 3 Pomocí Newtonovy metody najděte (s danou přesností) hodnoty čísel π a $\sqrt{2}$.