Funkcionální rovnice

Funkcionální rovnice jsou rovnice, ve které se jako neznámá vyskytuje nějaká funkce. Často se o hledané funkci předpokládá, že splňuje nějaké další vlastnosti (např. definiční obor, spojitost, omezenost, monotonie apod.). Pokud nebude uvedeno jinak, bude funkce f chápána jako funkce $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Jako příklad jednoduché funkcionální rovnice uveďme rovnici

$$f(x) = f(y). \tag{1}$$

Tuto rovnici chápeme v následujícím smyslu: Hledáme všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které splňují rovnost (1) pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Snadno nahlédneme, že uvedenou rovnici splňují právě všechny konstantní funkce.

Rovnici (1) jsme vyřešili jednoduchým úsudkem. V případě složitějších rovnic by ale takový postup selhal.

Základní metoda řešení funkcionálních rovnic je tzv. *substituční* metoda. Předpokládáme, že již máme nějaké řešení funkcionální rovnice a vhodnou volbou nezávisle proměnných se snažíme najít explicitní tvar tohoto řešení. Zkouškou se pak přesvědčíme, zda výsledná funkce skutečně vyhovuje dané rovnici. Tuto metodu budeme ilustrovat na následujícím příkladu.

Příklad 1. *Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí rovnost*

$$f(x+y) + 2f(x-y) - 4f(x) + xf(y) = 3y^2 - x^2 - 2xy + xy^2.$$

Řešení. Předpokládejme, že f je řešením dané rovnice. Tedy je tato rovnice splněna i pro $y = 0$. Dostaneme tedy

$$-f(x) + xf(0) = -x^2.$$

Označíme-li $f(0) = c$, máme explicitní tvar řešení

$$f(x) = x^2 + cx.$$

Položíme-li v získaném vztahu $x = 0$, obdržíme $c = f(0) = 0$, což znamená

$$f(x) = x^2.$$

Zkouškou se snadno přesvědčíme, že výše uvedená funkce skutečně splňuje danou funkcionální rovnici. □

Často potřebujeme nalézt pouze spojité funkce splňující danou funkcionální rovnici. K tomu slouží tzv. *Cauchyova* metoda, která je založena na následující větě.

Věta 1. *Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce splňující vztah*

$$f(x) = g(x) \quad \textit{pro všechna } x \in \mathbb{Q}.$$

Pak platí rovnost $f = g$, tj. $f(x) = g(x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Každá spojitá funkce je tedy určena funkčními hodnotami v racionálních bodech (v bodech nějaké husté podmnožiny). Pro ilustraci uveďme následující příklad.

Příklad 2. *Najděte všechny spojité funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující rovnici*

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Řešení. Předpokládejme, že f je nějaká funkce splňující zadanou rovnici. Volbou $x = y = 0$ obdržíme $f(0) = 0$. Matematickou indukcí se snadno ukáže, že

$$f(nx) = nf(x) \quad \text{pro každé} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Zvolíme-li $y = -x$, obdržíme, že funkce f je lichá, odkud již snadno dostáváme, že vztah (2) platí pro všechna celá čísla. Ze vztahu (2) rovněž dostaneme (pro libovolné přirozené m)

$$f\left(\frac{x}{m}\right) = \frac{1}{m} f(x) \quad \text{pro každé} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Nechť nyní q je racionální číslo, tj. $q = \frac{n}{m}$, kde $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$. Ze vztahů (2) a (3) snadno plyne

$$f(qx) = f\left(\frac{n}{m}x\right) = nf\left(\frac{x}{m}\right) = \frac{n}{m} f(x) = qf(x) \quad \text{pro každé} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Položíme-li $x = 1$ a $f(1) = c$, dostaneme

$$f(q) = cq \quad \text{pro každé} \quad q \in \mathbb{Q}.$$

Protože předpokládáme, že f je funkce spojitá, platí podle zmíněné Cauchyovy věty

$$f(x) = cx \quad \text{pro každé} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zkouškou se snadno přesvědčíme, že libovolná funkce tvaru $f(x) = cx$, kde $c \in \mathbb{R}$ splňuje danou funkcionální rovnici. □

Poznámka 1. Právě uvedená funkcionální rovnice se nazývá Cauchyova rovnice. Lze ukázat, že existují i nespojitá řešení této rovnice.

Příklad 3. *Najděte všechna spojitá řešení funkcionální rovnice*

$$f(xy) = f(x) + f(y), \qquad D(f) = (0, +\infty), \qquad x, y \in (0, +\infty).$$

Řešení. Předpokládejme, že spojitá funkce $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ je řešením naší funkcionální rovnice. Definujme novou funkci g předpisem

$$g(x) = f(10^x).$$

Snadno nahlédneme, že $D(g) = \mathbb{R}$. Pro libovolná reálná čísla x, y pak platí

$$g(x+y) = f(10^{x+y}) = f(10^x \cdot 10^y) = f(10^x) + f(10^y) = g(x) + g(y).$$

Vidíme tedy, že funkce g je spojitá a splňuje výše zmiňovanou Cauchyovu rovnici. Platí tedy

$$g(x) = cx \quad \text{pro každé} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vzhledem k definici funkce g obdržíme

$$f(10^x) = cx \quad \text{pro každé} \quad x \in \mathbb{R},$$

odkud již snadno dostaneme

$$f(x) = c \cdot \log x \quad \text{pro každé} \quad x \in (0, +\infty).$$

Snadno se přesvědčíme, že pro jakékoliv $c \in \mathbb{R}$ tato funkce vyhovuje zadání. □