# Pár poznámek k derivaci a integrálu

RNDr. Petra Šarmanová, Ph.D.

Katedra aplikované matematiky, FEI, VŠB–TU Ostrava

Tento text byl zpracován pro účely první Školy matematického modelování ŠKOMAM 2005 konané v Ostravě ve dnech 15. 2. – 17. 2. 2005.

Obsahuje jednak stručné připomenutí pojmů derivace, neurčitý integrál a určitý integrál a vztahů mezi nimi a jednak pár historických poznámek k vývoji těchto pojmů. Nejedná se v žádném případě o ucelený výklad (ten by nebyl vzhledem k časové dotaci přednášek ani možný), pouze o diskusi několika otázek.

Předpokládejme, že jste se již někdy s pojmy derivace a integrál, což jsou základní pojmy diferenciálního počtu, setkali. Zřejmě jste začali seznámením s reálnými čísly, dále přešli k pojmu limita a pak pomocí limity definovali derivaci a integrál. Toto je běžný postup výkladu jak na střední, tak i vysoké škole. Historicky ovšem tyto pojmy nevznikaly v tomto pořadí. Ve skutečnosti se nejdříve vyvíjel pojem určitého integrálu (výpočty obsahů a objemů), pak derivace a neurčitý integrál (v 17. stol), které byly založeny na intuitivním chápání nekonečně malé a velké veličiny a tudíž limitního procesu, a o 100 let později se upřesňoval pojem limity a teprve v 19. století byla vybudována teorie reálných čísel.

My se budeme dále držet standardního výkladu a postupovat od derivace k neurčitému integrálu a nakonec se zmíníme o integrálu určitém.

# 1

# Derivace

Víme, že derivací získáváme „rychlost změny“ nějaké měnící se veličiny. Hodnota, poloha nebo směr pohybu musí být popsány nějakou funkcí (analytickým výrazem, vzorcem). Derivováním této funkce vzniká nová funkce, která již udává hledanou „rychlost změny“. Stručně řečeno, derivování transformuje jednu funkci na druhou.

## Mechanický model

Uvažujme například pohybující se auto. Nechť proměnná $s$ označuje dráhu auta, která se mění v závislosti na čase $t$ podle vztahu

$$s = 4t^2 + 3t.$$

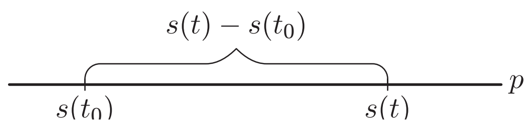
Jak zřejmě víte, derivací tohoto vztahu dostaneme výraz $8t + 3$. Tento výraz udává „rychlost změny“ polohy auta neboli rychlost $v$ auta v libovolném čase $t$, tj.

$$v = 8t + 3.$$

Zderivujeme-li tento výraz znovu, získáme „rychlost změny“ rychlosti neboli zrychlení, tj.

$$a = 8.$$

Rozeberme celou situaci podrobněji. Uvažujme hmotný bod, který se pohybuje po přímce $p$. Označme $t$ čas a $s(t)$ polohu, v níž se bod v čase $t$ nachází — viz obr. 1.1 (připouštíme, že bod se může i zastavit nebo vracet).




Obr. 1.1:

Naším úkolem je určit okamžitou rychlost bodu v čase $t_0$. Myšlenka je následující.

- Zvolíme časový okamžik $t$ (např. $t > t_0$) a budeme pro názornost předpokládat, že v intervalu $\langle t_0, t\rangle$ se bod pohybuje doprava.
- Průměrná rychlost za dobu $t - t_0$ (což je délka uvažovaného časového intervalu) je podle definice dráha, kterou bod v této době urazil, tj. $s(t) - s(t_0)$, dělená přírůstkem času $t - t_0$.
- Přibližováním okamžiku $t$ k $t_0$, tj. zkracováním uvažovaného časového intervalu, přejde průměrná rychlost na časovém intervalu $\langle t_0, t\rangle$ v okamžitou rychlost v čase $t_0$.

Vyjádříme opět tento postup početně.

Označme $v_t$ průměrnou rychlost v časovém intervale $\langle t_0, t\rangle$ a $v_0$ okamžitou rychlost v čase $t_0$. Dráha, kterou bod urazí za dobu $t - t_0$, je $s(t) - s(t_0)$. Pak platí

$$v_t = \frac{\text{dráha}}{\text{čas}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}\,.$$

Tedy pro okamžitou rychlost dostaneme

$$v_0 = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}\,.$$

## Geometrický model

Po tomto fyzikálním příkladě se ještě podívejme na geometrický model. Chceme stanovit „rychlost změny“ funkce, tj. poměr změny $f(x)$ ke změně $x$. V grafickém znázornění to znamená najít v daném bodě $x$ sklon křivky (to, jak je křivka strmá), který je dán velikostí úhlu, jenž svírá tečna ke křivce v daném bodě s osou $x$. Číselně se tato velikost úhlu vyjadřuje jako *směrnice* tečny neboli tangens úhlu.

Pokusme se nyní směrnici tečny ke grafu funkce $f\colon y = f(x)$ v bodě $T = \big(x_0, f(x_0)\big)$ vyjádřit. Budeme postupovat následujícím způsobem — viz obr. 1.2:

- Zvolíme bod $P = \big(x, f(x)\big)$ na grafu funkce.
- Sestrojíme sečnu $s$ ke grafu funkce $f$ určenou body $T$ a $P$.
- Bod $x$ budeme přibližovat k bodu $x_0$; odpovídající bod $P$ se „bude pohybovat“ po grafu funkce $f$ a přibližovat se k bodu $T$.
- Sečna $s$ se přitom bude „pootáčet“ (bude pořád procházet body $T$ a $P$) a v okamžiku, kdy $x$ splyne s $x_0$, tj. $P$ splyne s $T$, přejde v přímku $t$, kterou nazýváme tečnou ke grafu funkce $f$ v bodě $T$.
- Směrnice sečny pak přejde ve směrnici tečny.

Vyjádříme tento postup početně.

Z analytické geometrie víme, že rovnice přímky ve směrnicovém tvaru, která je určena dvěma body $(x_0, y_0)$ a $(x_1, y_1)$, je

$$y_1 - y_0 = k(x_1 - x_0), \qquad \text{kde } k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \text{ je směrnice přímky.}$$

Dále víme, že $k = \operatorname{tg}\varphi$, kde $\varphi$ je úhel, který svírá příslušná přímka s kladnou částí osy $x$.

Označme $k_s$ směrnici sečny a $k_t$ směrnici tečny a $\varphi_s$ a $\varphi_t$ odpovídající úhly — viz obr. 1.2. Protože sečna $s$ je určena dvěma body $T = \big(x_0, f(x_0)\big)$ a $P = \big(x, f(x)\big)$, platí, že

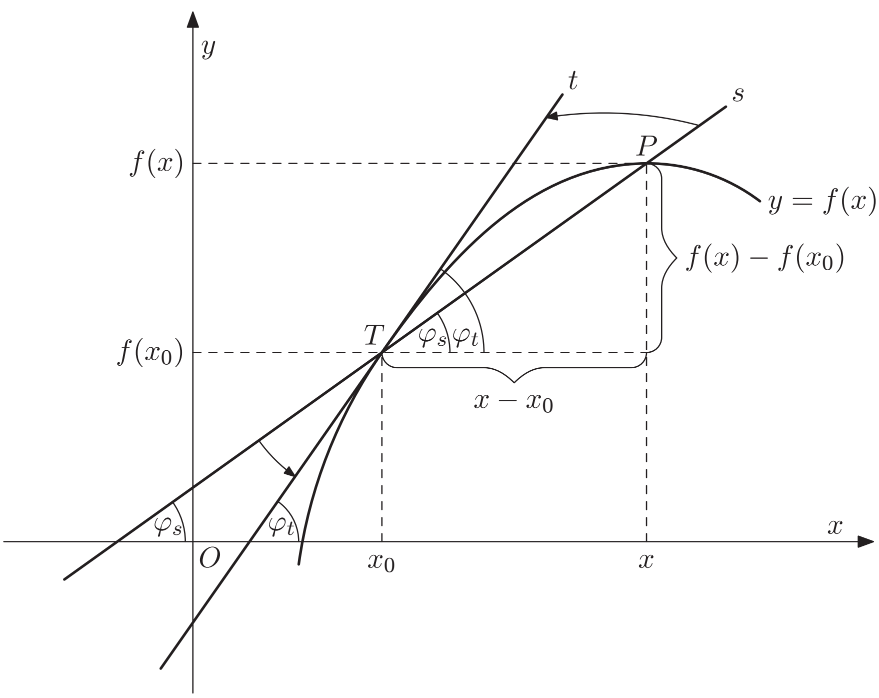
$$k_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$

Zajímá nás nyní směrnice tečny. Přibližujeme-li bod $x$ k bodu $x_0$, přejde úhel $\varphi_s$ v úhel $\varphi_t$, a směrnice sečny $k_s = \operatorname{tg}\varphi_s$ přejde ve směrnici tečny $k_t = \operatorname{tg}\varphi_t$.

Tedy

$$k_t = \lim_{x \to x_0} k_s = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$

Pokud tato limita bude existovat a bude konečná, bude mít význam směrnice $k_t$ tečny $t$ v bodě $T$.




Obr. 1.2:

Odhlédneme-li od označení ($s$ místo $f$ a $t$ místo $x$), vidíme, že jsme u obou modelů dospěli k vyšetřování limity obdobného podílu. Vzhledem k důležitosti této limity zavádíme následující definici.

**Definice 1.1.** Nechť $x_0 \in D(f)$. Existuje-li limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

značíme ji $f'(x_0)$ a nazýváme *derivací funkce $f$ v bodě $x_0$*.
Je-li $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že *$f$ má v bodě $x_0$ vlastní derivaci.*
Je-li $f'(x_0) = \pm\infty$, říkáme, že *funkce $f$ má v bodě $x_0$ nevlastní derivaci.*

**Úmluva: Nebude-li dále řečeno jinak, budeme pod pojmem *derivace* rozumět *vlastní derivaci.***

Doposud jsme mluvili o derivaci funkce v jednom bodě $x_0$. Tato derivace je nějaké číslo. Jestliže má $f$ derivaci v každém bodě definičního oboru (popř. nějaké jeho části), dostáváme novou funkci $f'$ definovanou takto:

**Definice 1.2.** Nechť existuje vlastní derivace $f'(x)$ funkce $f$ pro všechna $x \in M$, kde $M \subset D(f)$. Pak funkci $f'\colon\ y = f'(x)$, $x \in M$, nazýváme *derivací funkce $f$ na $M$*.

Ještě jednou připomeňme, že derivace přiřazuje funkci $f$ novou funkci $f'$. Pro konkrétní hodnotu $x$ může mít číslo $f'(x)$ různou interpretaci podle toho, co vyjadřuje funkce $f$. Například:

- geometricky má hodnota $f'(x)$ význam směrnice tečny ke grafu funkce $f$ v bodě $[x, f(x)]$,
- jestliže $f$ vyjadřuje polohu (dráhu) bodu pohybujícího se po přímce v závislosti na čase, pak $f'(x)$ udává okamžitou rychlost tohoto bodu v čase $x$,
- jestliže $f$ vyjadřuje okamžitou rychlost bodu pohybujícího se po přímce v závislosti na čase, pak $f'(x)$ udává okamžité zrychlení tohoto bodu v čase $x$.

Obecně, hodnota $f'(x)$ vyjadřuje míru velikosti změny funkce $f$ v závislosti na změně nezávislé proměnné $x$.

## 1.1. Otázky

**Otázka 1. Jaký je vztah mezi spojitostí funkce v bodě a derivací v tomto bodě?**

Odpověď nám dává následující věta.

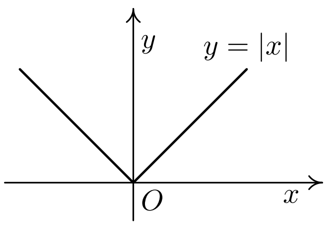
**Věta 1.3.** *Má-li funkce $f$ v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci, je v tomto bodě spojitá.*

Opačná implikace však neplatí. Ze spojitosti funkce v bodě neplyne existence derivace v tomto bodě.

- Lehce nalezneme spojité funkce, které nemají derivaci v konečně mnoha bodech. Triviálním příkladem je funkce absolutní hodnota. Připomeňme definici této funkce.

$$f\colon y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

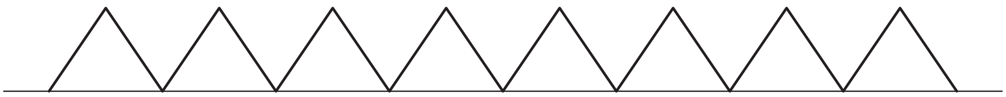
Graf:




Tato funkce se nazývá *absolutní hodnota* a značí se $f\colon\ y = |x|$.

Je to spojitá funkce, která nemá derivaci v bodě $x = 0$. Obecně, v bodech, kde má graf funkce „hroty“, nemá funkce derivaci.

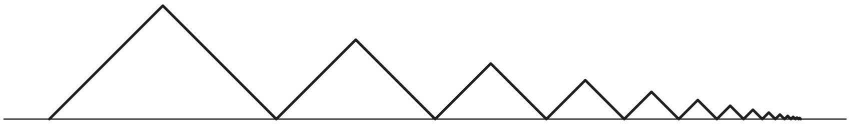
- Příkladem spojité funkce, která nemá derivaci v nekonečně mnoha bodech může být funkce definovaná na intervalu $(-\infty, +\infty)$, jejíž grafem je lomená čára, viz obr. 1.3.



Obr. 1.3:

Ale i na ohraničeném intervalu si lze snadno představit spojitou funkci, která nemá derivaci v nekonečně mnoha bodech, jak ukazuje obrázek 1.4

V obou předchozích příkladech byly body, v nichž neexistovala derivace, spíše výjimečné. Ve „většině“ bodů byly uvedené funkce nejen spojité, ale měly i derivaci.



Obr. 1.4:

- Již v 19. století si matematikové položili otázku, zda by spojitá funkce mohla mít i více bodů, v nichž neexistuje derivace, než ve výše uvedených příkladech. Původní domněnka byla, že ne. Jaké ale bylo zděšení, když byl v r. 1875 publikován příklad funkce spojité na intervalu, která neměla derivaci v žádném bodě! Tento příklad uvedl německý matematik Weierstrass.[1] Významný představitel klasické matematické analýzy Hermite[2] napsal v dopise svému příteli Stieltjesovi[3] (viz [8]): *„S hrůzou se odvracím od tohoto politováníhodného vředu na těle spojitých funkcí — od funkce, která nemá derivaci ani v jediném bodě.“*

  Pokusme se popsat, jak se taková funkce zkonstruuje. Weierstrass, jehož příklad je příliš komplikovaný, ve skutečnosti nebyl první. Již dříve (před r. 1830) sestrojil jednodušší příklad Bolzano[4]. Jeho postup byl zhruba následující (ve skutečnosti byl jeho příklad složitější). Představme si nekonečnou posloupnost funkcí, jejichž grafy jsou lomené čáry na obr. 1.5. Nyní sečteme první dvě tyto funkce, pak tři atd. Dostaneme výsledky na obr. 1.6. Jeden oblouk součtu sedmi těchto funkcí je znázorněn (ve větším měřítku) na obr. 1.7. Lze přesně dokázat, že když postup provedeme nekonečněkrát, dostaneme spojitou funkci, která nemá derivaci v žádném bodě, tj. má v každém bodě „hrot“.

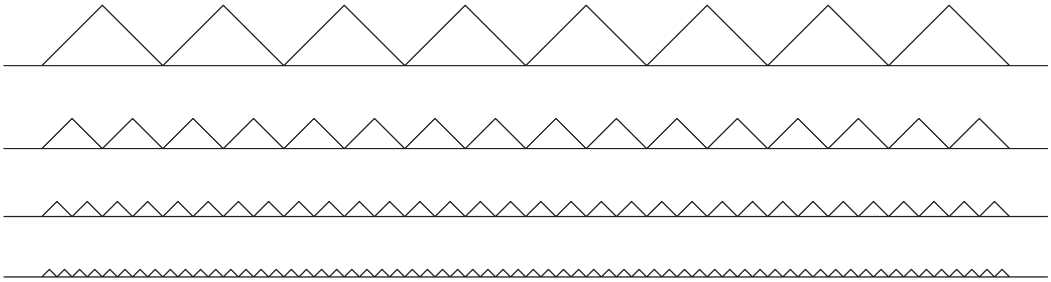
  Jak již bylo řečeno, někteří matematikové byli objevením takových funkcí zděšení a domnívali se, že nemají žádný praktický význam. Další vývoj však ukázal, že se mýlili. V roce 1920 bylo ukázáno, že např. pohyb pylových zrnek vlivem nárazů molekul, tzv. Brownův pohyb, je popsán spojitou funkcí, která nemá nikde derivaci. Dále se s takovými funkcemi můžeme setkat i v elektrotechnice v oborech zabývajících se zpracováním signálů. Jde o tzv. „bílý šum“.

[1] **Karl Theodor Wilhelm Weierstrass** (1815–1897) (čti vajerštras) — vynikající německý matematik. Zabýval se především matematickou analýzou a lineární algebrou.

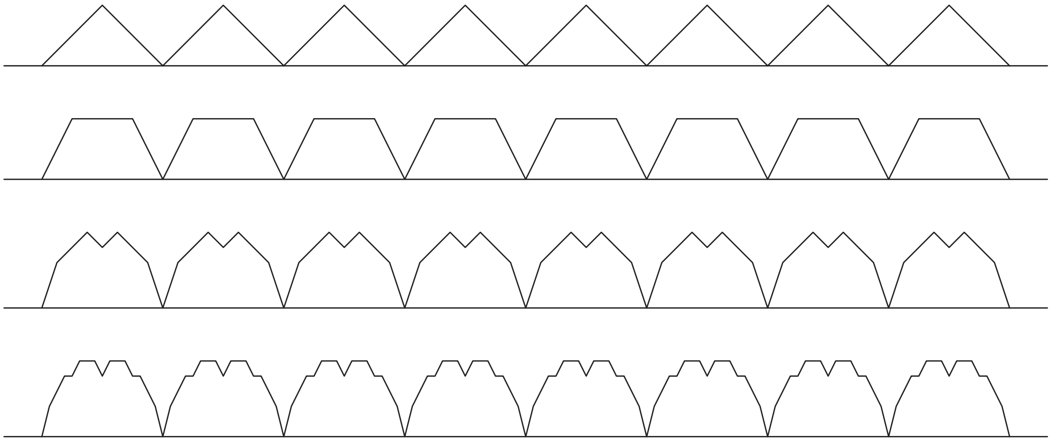
[2] **Charles Hermite** (1822–1901) (čti ermit) — francouzský matematik. Zabýval se eliptickými funkcemi, matematickou analýzou, algebrou a teorií čísel.

[3] **Thomas Jean Stieltjes** (1856–1894) — holandský matematik a astronom. Zabýval se matematickou analýzou a zejména teorií určitého integrálu.

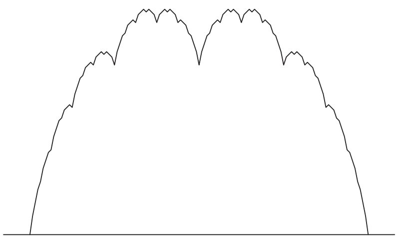
[4] **Bernard Bolzano** (1781–1848) — český matematik, filosof a teolog. Náš největší matematik 19. století. Působil na Karlově univerzitě jako profesor náboženství. Své matematické výsledky vesměs nepublikoval. Dnes je mu přiznávána v řadě věcí priorita, ale jeho výsledky bohužel neovlivnily další vývoj a byly vesměs později znovuobjeveny.



Obr. 1.5:



Obr. 1.6:



Obr. 1.7:

**Otázka 2. Je derivací elementární funkce zase elementární funkce?**

Odpověď zní ANO. A protože je většina funkcí, s nimiž se v aplikacích setkáváme, z množiny elementárních funkcí, nenastávají při derivování žádné problémy. Stejnou otázku si za chvíli položíme pro neurčitý integrál a již teď můžeme naznačit, že tam bude situace složitější.

# 2

# Neurčitý integrál

Zabývejme se nyní úlohou, která je v jistém smyslu inverzní k derivování. K zadané funkci $f$ hledáme funkci $F$ takovou, aby platilo $F' = f$. Ptáme se tedy, jakou funkci je nutné derivovat, abychom dostali zadanou funkci $f$. Tj.

- Ze znalosti směrnic tečen ke grafu funkce $f$ chceme najít tuto funkci $f$.
- Ze znalosti okamžité rychlosti bodu chceme zjistit polohu tohoto bodu.
- Ze znalosti okamžitého zrychlení bodu chceme určit jeho okamžitou rychlost.

**Definice 2.1.** Řekneme, že funkce $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *primitivní funkcí k funkci* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *na otevřeném intervalu* $I \subset \mathbb{R}$, *platí-li* $F'(x) = f(x)$ *pro každé* $x \in I$.

Chceme např. najít nějakou primitivní funkci k funkci $f\colon\ y = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$. Není těžké uhodnout, že taková funkce je např. $F(x) = \sin x$, protože $(\sin x)' = \cos x$. Ale také např. $F(x) = \sin x + 5$ je primitivní funkcí, protože $(\sin x + 5)' = \cos x$. Obecně $F(x) = \sin x + c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je primitivní funkce k funkci $f$.

Grafy jednotlivých primitivních funkcí jsou posunuty ve směru osy $y$. Pro pevně zvolené $x$ jsou tečny ke grafům funkcí $F(x) + c$ v bodech $[x, F(x) + c]$ pro lib. $c \in \mathbb{R}$ navzájem rovnoběžné, tj. mají stejné směrnice.

**Věta 2.2.** *Je-li funkce* $F$ *primitivní funkcí k funkci* $f$ *na otevřeném intervalu* $I \subset \mathbb{R}$, *tvoří funkce* $G_c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definované předpisy*

$$G_c(x) = F(x) + c,$$

*kde* $c \in \mathbb{R}$, *právě všechny primitivní funkce k funkci* $f$ *na intervalu* $I$.

Označení: Je-li $F$ primitivní funkcí k funkci $f$, píšeme

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

a mluvíme o *neurčitém integrálu* funkce $f$.

Nebudeme se zde zabývat integračními metodami (metoda per partes, substituční metoda, integrace racionálních lomených funkcí, integrace některých speciálních typů funkcí obsahujících siny, kosiny, odmocniny…). Podívejme se na pouze na některé otázky, které Vás mohou napadnout poté, co se s integrálem seznámíte.

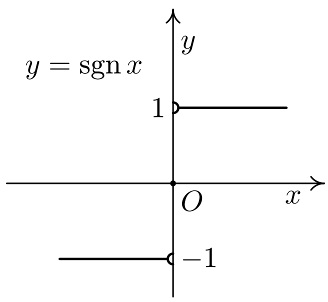
## 2.1. Otázky

**Otázka 1. Existuje ke každé funkci funkce primitivní?**

Odpověď zní NE. Například k funkci signum primitivní funkce neexistuje. Připomeňme, jak je tato funkce definována.

$$f\colon y = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Graf:




Tato funkce se nazývá *signum* a značíme ji $f\colon y = \operatorname{sgn} x$.

Pokud však přidáme předpoklad spojitosti funkce na otevřeném intervalu, pak je odpověď na zadanou otázku kladná.

**Věta 2.3.** *Je-li funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spojitá na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$, má v $I$ primitivní funkci.*

**Otázka 2. Integrujeme-li elementární funkci, dostaneme zase elementární funkci?**

Víme, že elementární funkce jsou spojité na intervalech, na nichž jsou definované. Proto k nim podle předchozí věty existují primitivní funkce. ALE tyto primitivní funkce již nemusí být elementární.

Takové funkce (primitivní funkce k elementárním funkcím, které již nejsou elementární) se obvykle nazývají *vyšší transcendentní funkce.*

Bohužel neexistuje žádné kritérium jak rozhodnout, jestli konkrétní neurčitý integrál vede na elementární funkci nebo na vyšší transcendentní funkci. V praxi se nám buď podaří konkrétní integrál spočítat (tj. nalézt primitivní funkci v množině elementárních funkcí) nebo ne. V případě neúspěchu ale nevíme, zda je to dáno naší nedostatečnou zkušeností, a tudíž má cenu se snažit dále, nebo zda to opravdu nejde a tudíž nemá cenu ztrácet s daným integrálem čas.

Nakonec si uveďme příklady integrálů, o nichž je známo, že vedou na vyšší transc. funkci:

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx, \quad \int \frac{1}{\ln x} dx, \quad \int \sin x^2 dx, \quad \int \cos x^2 dx, \quad \int \mathrm{e}^{-x^2} dx.$$

Vidíme, že se jedná na první pohled o velmi jednoduché funkce. Tedy odhadnout podle „složitosti" zadané funkce, zda je její primitivní funkce elementární nebo ne, je nemožné. Například $\int \cos^2 x dx$ lehce spočítáme, ale $\int \cos x^2 dx$, už není elementární funkce. Přitom v obou případech jde o složenou funkci se složkami „druhá mocnina" a „kosinus". Liší se jen pořadím složek.

**Otázka 3. Jak moc nám mohou při výpočtu neurčitého integrálu pomoci počítačové programy jako je Mathematica, Maple nebo Matlab?**

- Mohou velmi pomoci a ušetřit čas u složitých výpočtů.
- Pokud program neumí integrál vypočítat, pak nám může alespoň nakreslit graf primitivní funkce.
- ALE! Není dobré tyto programy přeceňovat a plně se na ně spoléhat. Zadáme-li např.

  $$\int (\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x^2 - 4}) dx$$

  dostaneme bez varování výsledek. Ale definiční obor této funkce je prázdný, tedy výsledek je nesmyslný.

Je proto důležité znát teorii a umět kriticky zhodnotit, zda výsledek, který nám počítače vyrobí, může být správný. v dnešní době se jeví důležitější než mechanické zvládnutí integračních technik spíše důkladné pochopení pojmů a předpokladů vět, abychom dokázali správně interpretovat výsledky těchto programů a vyhnuli se hrubým chybám.

# 3

# Určitý integrál

Jak víme z předchozí kapitoly, neurčitý integrál přiřazuje funkci opět funkci. Určitý integrál funkci přiřazuje číslo. Podle toho, co bude vyjadřovat daná funkce, bude mít výsledné číslo různý význam. Může udávat např.

- obsah rovinného obrazce,
- délku křivky,
- obsah pláště rotačního tělesa,
- objem rotačního nebo obecněji libovolného tělesa,
- hmotnost rovinného obrazce,
- statické momenty rovinného obrazce, sloužící k výpočtu jeho těžiště,
- moment setrvačnosti rovinného obrazce,
- celkový elektrický náboj rozložený na rovinném obrazci…

Věnujme nyní pozornost určování obsahu rovinného obrazce, což je jedna z vůbec nejstarších úloh v matematice.

Již staří Egypťané byli nuceni vyměřovat pole, tj. počítat obsahy. Znali obsah čtverce, obdélníka, trojúhelníka a tím i libovolného mnohoúhelníka. Mnohoúhelník rozdělili na trojúhelníky, spočítali jejich obsahy a ty potom sečetli. Uměli počítat i objemy krychle, válce nebo komolého jehlanu se čtvercovou základnou (pyramidy).

Velkého pokroku v měření obsahů a objemů bylo dosaženo ve starověkém Řecku v období let 350–200 před. n. l. Z té doby pochází i známé Eukleidovy *Základy*, ve kterých jsou shrnuty téměř všechny v té době známé matematické poznatky.

Řekové se snažili plochu neznámého obrazce získat pomocí mnohoúhelníků $\mathrm{P}_1$, $\mathrm{P}_2, \cdots$, kterými obrazec „vyčerpávali“. Podstatou jejich přístupu bylo to, že obsah tohoto mnohoúhelníku snadno vypočítali tím, že jej rozložili na vzájemně se nepřekrývající trojúhelníky. Obsah mnohoúhelníku je pak roven součtu obsahů jednotlivých trojúhelníků. Tuto metodu, která byla později nazvána exhaustivní, rozpracoval Eudoxos.

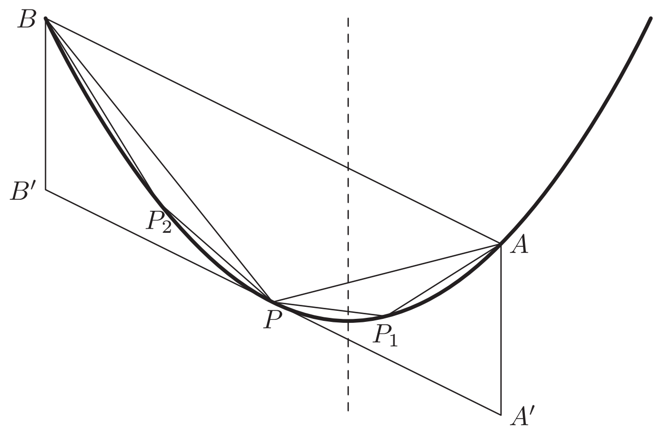
Exhaustivní (vyčerpávací) metoda umožňuje již poměrně přesné výpočty obsahů a objemů a je považována za geniální předchůdkyni pozdějších infinitezimálních úvah.

Exhaustivní metoda je založena na nekonečném dělení veličiny a jejím základem je následující tvrzení:

($\star$) *Jestliže od dané veličiny odečteme její část větší než její polovina a od zbytku opět jeho část větší než jeho polovina a budeme tak činit stále, zbude nějaká veličina, jež bude menší než libovolná kladná veličina.*

Ilustrujme tuto metodu na Archimédově úloze určení kvadratury paraboly.

Nechť je dána úseč paraboly se základnou $AB$ (úseč konvexní křivky je oblast ohraničená přímkou a částí dané křivky). Označme $P$ bod nejvzdálenější od $AB$ – tzv. vrchol úseče (je to dotykový bod tečny rovnoběžné s přímkou $AB$). Vzniklý trojúhelník $APB$ má největší obsah ze všech trojúhelníků vepsaných do úseče. Archimédes dokázal, že obsah uvažované úseče je roven $\frac{4}{3}$ obsahu trojúhelníka $APB$.




Ukažme, jak Archimédes při tomto důkazu postupoval.

Opišme kolem parabolické úseče rovnoběžník $A'ABB'$, kde $A'B'$ je tečna sestrojená v bodě $P$ a úsečky $AA'$, $BB'$ jsou rovnoběžné s osou paraboly.

Archimédes nejdříve dokazuje, že trojúhelník $APB$ má obsah větší než $\frac{1}{2}$ obsahu $s(\widehat{APB})$ uvažované úseče, tj.

$$s(\triangle APB) = \frac{1}{2}s(A'ABB') > \frac{1}{2}s(\widehat{APB}).$$

Uvažujme nyní dvě menší parabolické úseče se základnami $AP$ a $PB$ a jejich vrcholy $P_1$ a $P_2$. Stejně tak, jako v předchozí situaci vepišme příslušným úsečím trojúhelníky $AP_1P$ a $PP_2B$, které opět tvoří více než polovinu obsahu úsečí. Tím vyčerpáme plochu úseče $\widehat{APB}$ vepsaným mnohoúhelníkem $AP_1PP_2B$. Naznačený postup můžeme zřejmě opakovat.

Z Eudoxova principu přitom vyplývá (v dnešní řeči), že ke každému $\varepsilon > 0$ obdržíme po konečném počtu výše uvedených konstrukcí mnohoúhelník vepsaný do parabolické úseče $\widehat{APB}$, který se svým obsahem liší od obsahu úseče o méně než $\varepsilon$.

V dalším kroku Archimédes využívá obecných vlastností paraboly k důkazu faktu, že součet obsahů trojúhelníků $AP_1P$ a $PP_2B$ je $\frac{1}{4}$ obsahu trojúhelníku $APB$.

Mnohoúhelník $\mathrm{P}_n$ získaný po $n$ krocích má tedy obsah

$$s(\mathrm{P}_n) = \alpha + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4^2} + \cdots + \frac{\alpha}{4^n}, \text{ kde } \alpha = s(\triangle APB).$$

K výpočtu $s(\mathrm{P}_n)$ Archimédes odvozuje vztah

$$\frac{1}{4^k} + \frac{1}{3}\frac{1}{4^k} = \frac{1}{3}\frac{1}{4^{k-1}}.$$

Postupnou aplikací tohoto vzorce na poslední dva členy následujícího součtu dostaneme

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \left(\frac{1}{4^n} + \frac{1}{3}\frac{1}{4^n}\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \left(\frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{3}\frac{1}{4^{n-1}}\right) = \cdots = 1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Tedy

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n}.$$

Pro dostatečně velká $n$ můžeme člen $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n}$ zanedbat (dnes bychom použili operace limity pro $n \to \infty$).

Odtud ihned plyne tvrzení věty, že $s(\widehat{APB}) = \frac{4}{3}s(\triangle APB)$.

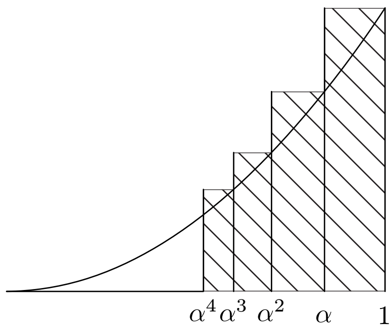
Archimédovy práce znamenaly obrovský krok ve výpočtech obsahů a objemů. ALE! při výpočtu vychází vždy z geometrických vlastností dané plochy nebo tělesa. To je charakteristické pro celou další etapu vývoje výpočtu obsahu plochy. Byli určovány obsahy a objemy různých ploch a těles, které vždy využívali nějaké charakteristické vlastnosti studovaného útvaru. Nejednalo se tedy o jednotný postup, který by se dal použít k určení obsahu, příp. objemu, libovolného útvaru.

Po tomto plodném období řecké vědy ve 2 stol. př. n. l. následovalo mnoho století stagnace vědy, kdy se obzvláště v Evropě na poli matematiky nedělo nic. Teprve ve 12 a 13 století se začínají překládat stará řecká díla Eukleida, Archiméda, Apollónia atd. Začaly vznikat první univerzity. Až v 16. století se matematika dostává nad rámec řecké matematiky.

16. a 17. století bylo renesancí kultury a vědy a tedy i matematiky. Popsat toto období by bylo tématem na samostatnou přednášku. Připomeňme jen jména některých matematiků, kteří se zabývali určováním obsahů a objemů a tím významně přispěli k dalšímu vývoji diferenciálního a integrálního počtu. Byli to Johannes

Kepler, Galileo Galilei, Bonaventura Cavalieri, John Wallis, Pierre de Fermat, Blaise Pascal aj.

Ukažme, jak Fermat postupoval při výpočtu obsahu plochy ohraničené parabolou $y = x^2$, osou $x$ a přímkou $x = 1$.




Nejdříve zvolil libovolné číslo $\alpha \in (0,1)$ a sestrojil posloupnost čísel $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots$. Uvažovanou plochu pokryl nekonečně mnoha obdélníky s výškami rovnými funkčním hodnotám funkce $y = x^2$ v bodech $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots$, tj. s výškami $1, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^6, \ldots$ a šířkami $1 - \alpha, \alpha - \alpha^2, \alpha^2 - \alpha^3, \ldots$. Součet obsahů těchto obdélníků je

$$1(1-\alpha) + \alpha^2(\alpha - \alpha^2) + \alpha^4(\alpha^2 - \alpha^3) + \cdots = 1 - \alpha + \alpha^3(1-\alpha) + \alpha^6(1-\alpha) + \cdots =$$

$$= (1-\alpha)(1 + \alpha^3 + \alpha^6 + \cdots) =$$

$$= \frac{1-\alpha}{1-\alpha^3} = \frac{1-\alpha}{(1-\alpha)(1+\alpha+\alpha^2)} = \frac{1}{(1+\alpha+\alpha^2)}.$$

Jestliže nyní zmenšujeme základny obdélníčků, tj. číslo $\alpha$ se přibližuje k číslu jedna, pak podíl $\frac{1}{(1+\alpha+\alpha^2)}$ se bude blížit k $\frac{1}{3}$.

Obdobně Fermat postupoval při určování kvadratury paraboly $y = x^{\frac{p}{q}}$ pro $p > 0$ a $q > 0$ na intervalu $[0, b]$.

Zapsáno dnešním mat. jazykem, dospěl k výsledku

$$\int_0^b x^{\frac{p}{q}} dx = \frac{q}{p+q} b^{\frac{p+q}{q}}.$$

Fermat se také zabýval určováním tečen ke křivkám. On i další matematikové této doby již tušili, že existuje souvislost mezi derivováním a integrováním. Dokázat tuto souvislost se však podařilo až Issacu Newtonovi a G. Wilhelmu Leibnizovi, kteří jsou proto považováni za zakladatele diferenciálního a integrálního počtu.

Nezávisle na sobě a každý jinou cestou nalezli propojení mezi integrováním a derivováním.

Je-li $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkce, která má primitivní funkci $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, tj. platí-li $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in [a, b]$, pak existuje *Newtonův integrál* $(N) \int_a^b f(x)dx$ funkce $f$ v intervalu $[a, b]$ a je definován vztahem

$$(N) \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

A tak byla odvozena formule, která svazuje integrál s derivací a dává do souvislosti problémy kvadratur s určováním tečen ke křivkám.

V souvislosti s těmito výsledky zavládlo všeobecné přesvědčení, že dříve či později bude dořešeno vše, co s matematickou analýzou souvisí. Projevilo se to například v přesvědčení, že funkci bude *vždy* možné derivovat a že ji bude možné *vždy* integrovat tak, že se užije výše uvedeného fundamentálního vztahu. Jestliže se nám dnes takové přesvědčení zdá být poněkud přehnané, je to zejména tím, že máme jinou představu o tom, co je to funkce. Newtonovo přesvědčení se opíralo o to, že „jeho“ funkce byly v podstatě polynomy.

Tímto obdobím vývoj integrálu zdaleka nekončí. Dnešní koncepce tzv. Riemannova integrálu spadá až do 19. století. Z dalších teorií integrálu jmenujme Lebesgueův integrál, Perronův integrál nebo Kurzweilův integrál, které byly vytvořeny ve 20. století.

Zájemce o historický vývoj integrálního počtu od starého Egypta až po současnost odkazuji na publikaci [7].

# Literatura


[1] Bouchala, J.: *Matematická analýza 1.* VŠB-TU, Ostrava, 1998.

[2] Edwards, C. H. : *The Historical Development of the Calculus.* Springer – Verlag, New York, 1979.

[3] Hošková, Š., Kuben, J.: *Integrální počet funkcí jedné proměnné.* Vojenská akademie, Brno, 2004.

[4] Kuben, J., Šarmanová, P. Šimonová, J. : *Matematická analýza I pro kombinované a distanční studium.* Skriptum na CD. Ostrava, 2004.

[5] Marcus, S.: *Matematická analýza čtená podruhé.* Academia, Praha, 1976.

[6] Polák, J.: *Přehled středoškolské matematiky.* Prometheus, Praha, 1997.

[7] Schwabik Š., Šarmanová, P. : *Malý průvodce historií integrálu.* Prometheus, Praha, 1996.

[8] Vilenkin, N. J.: *Neznámý svět nekonečných množin.* SNTL – Práce, Praha, 1971.