

# POČÍTAČOVÁ CVIČENÍ

## ŠKOLA MATEMATICKÉHO MODELOVÁNÍ

### 2023

Petr Beremlijski, Marie Sadowská, Rajko Čosić

Katedra aplikované matematiky  
Fakulta elektrotechniky a informatiky  
VŠB – Technická univerzita Ostrava  
2023



# Předmluva

*Matematika je krásná. Co bylo pravda včera, je pravda i dnes.*

**Jaroslav Kurzweil**

A výše uvedené (je řeč o druhé větě...) platí i o mém úvodníku ze ŠKOMAMu 2019. Nebudu ho proto měnit, ale jen (červeně) aktualizovat.

Milí studenti,

rád bych Vás jménem Katedry aplikované matematiky a Jednoty českých matematiků a fyziků přivítal na již 19. ročníku našeho semináře ŠKOMAM (ŠKOla MATematického Modelování). Matematika je z mnoha důvodů krásná disciplína a přestože je vytvářena a vybrušovaná už několik tisíc +4 let (a to co vzniklo, je prostě úžasné), je pořád v obrovském rozmachu. Je totiž nesmírně užitečná.

Posledních pár desetiletí žijeme v době počítačů a dnes už i superpočítačů (jeden z největších ve střední Evropě je i u nás na Vysoké škole báňské – Technické univerzitě Ostrava – můžete se podívat na stránky Národního superpočítačového centra IT4Innovations: <https://www.it4i.cz>), což přináší dříve netušené možnosti rozvoje vlastně všech oblastí lidské činnosti. A ukazuje se, že chceme-li opravdu využít všech možností, které přináší intenzivní rozvoj výpočetní techniky, je třeba vyřešit spoustu nově vzniklých problémů, upravit stávající (a nebo vymyslet zcela nové) algoritmy, které efektivně využijí architekturu superpočítačů, a použijí nejnovější poznatky z matematiky nebo znalosti získané díky spojení různých oborů matematiky. A zde je obrovský prostor a spousta výzev pro matematiku a matematiky.

V reakci na tuto potřebu doby u nás na katedře vzniknul před téměř 20 lety studijní obor „Počítačová matematika“ (časem přetavený do studijního programu „Výpočetní a aplikovaná matematika“) spojující studium aplikované matematiky se základy informatiky. Tento program (ve všech stupních VŠ vzdělání, tj. bakalářském, magisterském a doktorském) již absolvovalo více než 300 studentů. Že se věc daří, dokládají nejen úspěchy našich studentů v celostátních soutěžích, ale především ta skutečnost, že je o naše absolventy velký zájem. Budeme moc rádi, pokud si náš studijní program Výpočetní a aplikovaná matematika vyberete. Jsme přesvědčeni, že tím neuděláte chybu!

Následující dny trávené u nás na ŠKOMAMu můžete brát jako malou ochutnávku toho, co by Vás u nás čekalo. Poznáte některé z členů naší katedry, prohlédnete si posluchárny, ale především se budete bavit matematikou.

A já Vám za nás všechny přeju, ať si to tu náramně užijete.

V Ostravě 16.1.2023

Jirka Bouchala

# Úvod

Tento text je určen pro účastníky semináře Škola matematického modelování (<http://skomam.vsb.cz>) a slouží jako pomůcka k úlohám, které řeší studenti v průběhu tohoto semináře na počítačových cvičeních. Tento seminář, pro který používáme zkratku ŠKOMAM, organizuje Katedra aplikované matematiky (<http://am.vsb.cz>) Fakulty elektrotechniky a informatiky Vysoké školy báňské – Technické univerzity Ostrava jednou ročně již od roku 2005. V tomto roce probíhá 19. ročník tohoto semináře.

Pro počítačová cvičení budeme používat programovací jazyk Python, který navrhnul Guido van Rossum na konci 80. let. Python je (podobně jako jazyk R či jazyk Octave) volně přístupný (<https://www.python.org/>) a nyní patří celosvětově mezi nejoblíbenější a nejpoužívanější programovací jazyky. Jeho další velkou výhodou je možnost instalace na většinu běžných platforem jako je MS Windows, Unix, macOS nebo Android. Jedním z důvodů, proč jsme se pro Python rozhodli, je jeho jednoduchost pro učení i pro začátečníky. Podrobný popis tohoto jazyka je k dispozici v [1]. Pro snadnou práci během online cvičení budeme s programy v Pythonu pracovat ve webovém rozhraní Jupyter Notebook (<https://jupyter.org/>). Ke každému počítačovému cvičení budeme mít jeden nebo více těchto Jupyter Notebooků. Tyto Jupyter Notebooky budeme spouštět ve službě Google Colab (<https://colab.research.google.com/>). Díky tomu si účastníci semináře nemusejí nic instalovat a vše je pro ně přichystáno. Všechny Jupyter Notebooky potřebné ke cvičení jsou pro vás uloženy na adrese <https://colab.research.google.com/github/Beremi/SKOMAM>.



Tento seminář je pořádán s finanční podporou Fakulty elektrotechniky a informatiky (<http://www.fei.vsb.cz>), statutárního města Ostravy a projektu Math Exercises for You 2 (<http://math4u.vsb.cz>) podpořeného programem Erasmus+. Nad akcí převzala záštitu Jednota českých matematiků a fyziků (<http://jcmf.vsb.cz>).

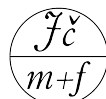
VŠB TECHNICKÁ | FAKULTA  
UNIVERZITA | ELEKTROTECHNIKY  
OSTRAVA | A INFORMATIKY

# OSTRAVA!!!

Spolufinancováno  
z programu Evropské unie  
Erasmus+



MATH 4 U



Abychom se mohli věnovat pokročilejším matematickým úlohám, potřebujeme vhodné prostředí, které nám jejich řešení umožní. K tomuto účelu použijeme skriptovací programovací jazyk Python, konkrétně jazyk Python 3. Podrobně se o něm můžete dozvědět např. v textu „Učíme se programovat v jazyce Python 3“ (viz [1]).

V tomto cvičení se seznámíme se základním přehledem datových struktur a příkazů Pythonu 3. Protože práci s proměnnými, cykly a podmínkami, základními funkcemi a knihovnamy, najdete podrobně popsánu v Jupyter Notebook „cv1“, který naleznete na adrese

*<https://colab.research.google.com/github/Beremi/SKOMAM>,*

uvedeme si v tomto textu jen úkoly k procvičení, které jsou součástí úvodního cvičení.

**Úkol 1.1** Napište funkci, která pro zadané rozměry a hustotu kvádrů vrátí jeho objem, povrch a hmotnost. ▲

**Úkol 1.2** Běžná cihla má rozměry 29 cm × 14 cm × 6,5 cm a hustotu 1,9 g/cm<sup>3</sup>. Jaká je její hmotnost? ▲

**Úkol 1.3** Napište funkci, která pro zadaný poloměr podstavy a výšku rotačního válce vrátí jeho objem a povrch. Dále vypočtete objem a povrch rotačního válce o poloměru podstavy 10 cm a výšce 5 cm. ▲

**Úkol 1.4** Napište funkci, která pro zadané koeficienty  $a, b, c$  a hodnoty  $d_0 < d_1$  vykreslí graf funkce  $f(x) = ax^2 + bx + c$  na intervalu  $\langle d_0, d_1 \rangle$ . ▲

**Úkol 1.5** Napište funkci, která pro zadané koeficienty  $a, b, c$  vypíše reálné kořeny kvadratické funkce  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . ▲

**Úkol 1.6** Využijte předchozí úkoly a vytvořte funkci, která pro zadané koeficienty  $a, b, c$  a hodnoty  $d_0 < d_1$  vykreslí graf funkce  $f(x) = ax^2 + bx + c$  na intervalu  $\langle d_0, d_1 \rangle$  a zároveň znázorní její reálné kořeny. ▲

## CVIČENÍ 2: POLYNOMIÁLNÍ REGRESE

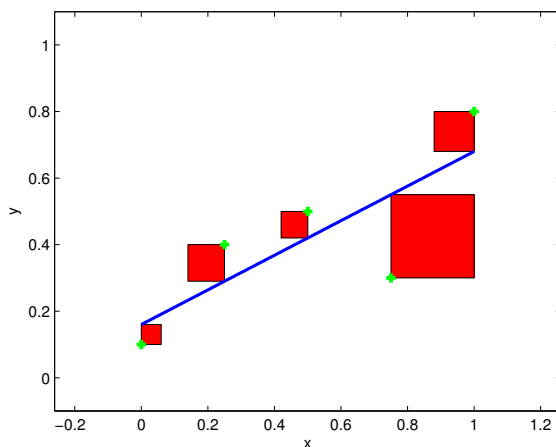
Při zkoumání různých fyzikálních jevů se setkáváme s následujícím úkolem. Na intervalu  $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$  máme změřeny hodnoty zkoumané veličiny a hledáme polynom  $p_n$  řádu  $n \in \mathbb{N}$ , který „nejlépe“ přibližně popisuje (aproximuje) naše měření. To, že polynom  $p_n$  „nejlépe“ aproximuje zadané hodnoty, pro nás bude znamenat, že  $p_n$  je řešením úlohy

$$\min_{p_n} \sum_{i=1}^k (p_n(x_i) - y_i)^2, \quad (1)$$

kde  $[x_i, y_i]$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$ , jsou souřadnice naměřených hodnot a

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

kde  $a_j \in \mathbb{R}$  pro každé  $j \in \{0, \dots, n\}$ .<sup>1</sup> Všimněme si, že  $p_n$  řešící (1) je polynom, pro který je součet čtverců rozdílů  $p_n(x_i)$  a  $y_i$  nejmenší. Proto se této metodě hledání koeficientů  $a_0, a_1, \dots, a_n$  pro určení polynomu  $p_n$  říká **metoda nejmenších čtverců**. „Proložení“ zadaných bodů polynomem nazýváme **polynomiální regresí**. Pro lepší představu se podívejme na obr. 1, kde je znázorněna regrese zadaných bodů lineárním polynomem. Zadané body jsou vyznačeny zelenými křížky, regresní funkce je zakreslena modře a čtverce rozdílů  $p_n(x_i)$  a  $y_i$  jsou zakresleny červeně.



Obrázek 1: Regrese lineárním polynomem použitím metody nejmenších čtverců

Řešení úlohy (1) je poměrně obtížné, proto k němu využijeme programovací jazyk Python a v něm příkaz *polyfit* z knihovny *numpy*.

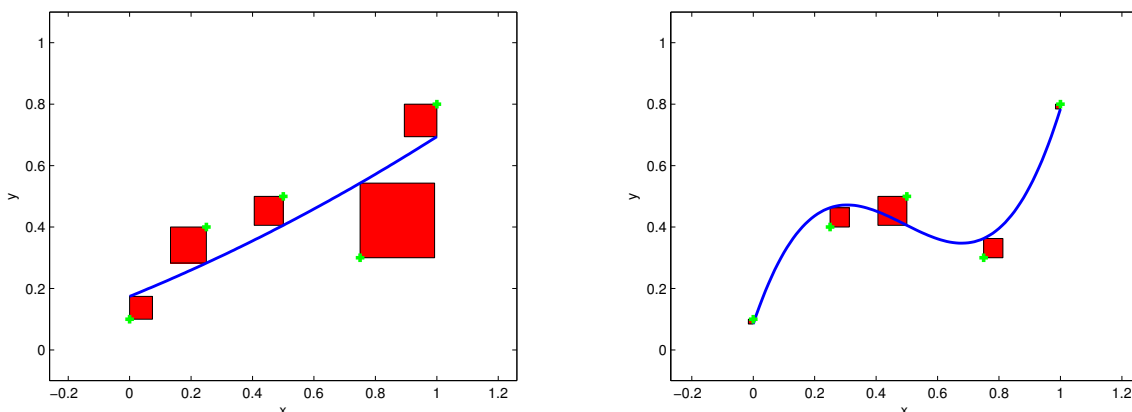
<sup>1</sup>Hledáním polynomu  $p_n$ , který řeší úlohu (1), myslíme hledání hodnot koeficientů  $a_0, a_1, \dots, a_n$  tohoto polynomu.

Syntaxe tohoto příkazu je následující:  $P = \text{numpy.polyfit}(X, Y, N)$ , kde  $X$  a  $Y$  jsou vektory obsahující  $x$ -ové a  $y$ -ové souřadnice aproximovaných hodnot a  $N$  je řád polynomu, kterým aproximujeme. Ve vektoru  $P$  získáme koeficienty polynomu  $p_n$ , pro které platí

$$P[0] = a_N, P[1] = a_{N-1}, \dots, P[N-2] = a_2, P[N-1] = a_1, P[N] = a_0. \quad (2)$$

Pro vyčíslení hodnoty polynomu v zadaném vektoru bodů  $X$ , můžeme použít příkaz *polyval*, který je také součástí knihovny *numpy*. Jeho syntaxe je  $Y = \text{numpy.polyval}(P, X)$ , kde  $P$  je vektor obsahující koeficienty daného polynomu (opět platí rovnosti (2)) a  $X$  obsahuje  $x$ -ové souřadnice bodů, ve kterých chceme polynom vyčíslet. Funkční hodnoty daného polynomu jsou uloženy do vektoru  $Y$ .

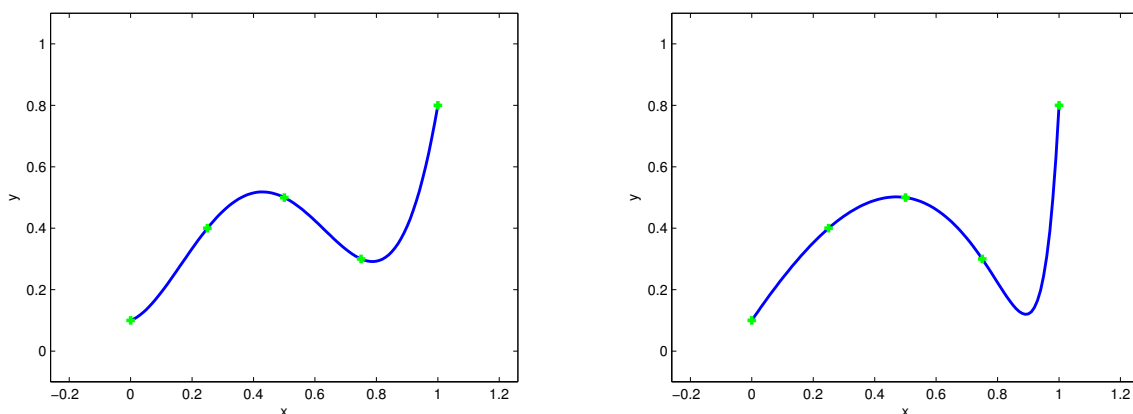
Na následujících obrázcích si můžeme prohlédnout regresi zadaných bodů  $[x_i, y_i]$ , kde  $i \in \{1, \dots, 5\}$ , pomocí polynomů vyšších řádů. Body jsou opět vyznačeny zelenými křížky, výsledné regresní funkce jsou zakresleny modře a čtverce rozdílů  $p_n(x_i)$  a  $y_i$  jsou zakresleny červeně. Na regresi kvadratickým a kubickým polynomem se podívejme na obr. 2, regrese polynomem čtvrtého a dvacátého řádu je na obr. 3.



Obrázek 2: Regrese kvadratickým (vlevo) a kubickým (vpravo) polynomem použitím metody nejmenších čtverců

Poznamenejme ještě, že s rostoucím řádem polynomu dochází k lepšímu proložení vstupních bodů ale zároveň také k (typicky nežádoucímu) rozkmitání regresní funkce.





Obrázek 3: Regrese polynomem čtvrtého (vlevo) a dvacátého (vpravo) řádu použitím metody nejmenších čtverců

**Úkol 2.1** Vygenerujte si pomocí příkazu `random.rand` z knihovny `numpy` náhodných 11 hodnot v intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ . Vektor takto získaných hodnot považujte za  $y$ -ové souřadnice bodů, jejichž  $x$ -ové souřadnice jsou 0, 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,8, 0,9, 1. Tyto body postupně „proložte“ polynomy řádů 1, 2,  $\dots$ , 15. ▲

**Úkol 2.2** Pokusme se odhadnout velikost tíhového zrychlení  $g$  na povrchu Země (v Ostravě). Jeho odhad získáme pomocí pozorování kmitů matematického kyvadla. Pro matematické kyvadlo platí následující závislost mezi délkou vlákna  $\ell$  a periodou kyvadla  $T$

$$\ell = \frac{g T^2}{4\pi^2}. \quad (3)$$

Pozorováním jsme získali 10 měření (viz tabulku 1), při kterých jsme měnili délku vlákna  $\ell$  a měřili jsme periodu (dobu kmitu)  $T$ .<sup>2</sup>

Hodnoty dané pozorováním aproximujte polynomem 2. řádu a použijte vztah (3). Vypočtenou hodnotu porovnejte s hodnotou  $9,81345 \text{ m/s}^2$ , která je udávaná jako hodnota tíhového zrychlení v Ostravě. Zkuste zlepšit přesnost odhadu  $g$  tak, že mezi měření přidáte také dvojici  $T = 0$  a  $\ell = 0$ . Nakonec odhadněte hodnotu  $g$  tak, že naměřené hodnoty aproximujete polynomem  $ax^2$ , tzn. při aproximaci polynomem 2. řádu  $ax^2 + bx + c$  požadujeme, aby koeficienty  $b$  a  $c$  byly nulové. K tomu použijte odvozený vztah

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^4}.$$

<sup>2</sup>Děkujeme Mgr. Martinu Kotkovi z Gymnázia, Ostrava-Hrabůvka za cennou inspiraci a podnětné konzultace k této úloze a také jeho studentům za poskytnutí naměřených dat. ▲

Tabulka 1: Měření periody matematického kyvadla v závislosti na délce vlákna

$T$ (s)	$\ell$ (m)
0,6225	0,095
0,8405	0,175
0,9475	0,225
0,9765	0,235
1,0735	0,291
1,1085	0,304
1,2295	0,382
1,2775	0,4
1,2770	0,405
1,4110	0,494

### CVIČENÍ 3: JE TO PADĚLEK?

---

V tomto cvičení se pokusíme vytvořit matematický model, který popisuje rozpad atomů radioaktivních prvků. Abychom mohli takovýto model sestavit, potřebujeme pracovat se speciálním typem rovnice – s tzv. diferenciální rovnicí. Podrobně se tomuto typu rovnic věnuje text [3]. Navíc musíme vědět, jak můžeme diferenciální rovnice numericky řešit. Tomu se budeme věnovat nyní.

Obyčejnou diferenciální rovnicí 1. řádu rozumíme rovnici tvaru

$$y'(t) = f(t, y(t)),$$

kde  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  je zadaná funkce a  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je „hledaná“ funkce. Řešením této rovnice na otevřeném intervalu  $(a, b)$ , kde  $a < b$ , rozumíme každou funkci  $\bar{y} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , takovou, že pro všechna  $t \in (a, b)$  platí

$$\bar{y}'(t) = f(t, \bar{y}(t)).$$

Například funkce  $\bar{y}(t) = t$ ,  $t \in (0, +\infty)$ , je řešením diferenciální rovnice  $y'(t) = \frac{y(t)}{t}$  na intervalu  $(0, +\infty)$ . Jiným řešením této rovnice na intervalu  $(0, +\infty)$  je například funkce  $\bar{y}(t) = 2t$ ,  $t \in (0, +\infty)$ , či  $\bar{y}(t) = 3t$ ,  $t \in (0, +\infty)$ . Není těžké ukázat, že každá funkce  $\bar{y}_k(t) = kt$ ,  $t \in (0, +\infty)$  ( $k \in \mathbb{R}$ ), je řešením diferenciální rovnice  $y'(t) = \frac{y(t)}{t}$  na intervalu  $(0, +\infty)$ . Naše úloha má nekonečně mnoho řešení. Zkusme navíc přidat k naší rovnici například podmínku  $y(1) = 2$ , tj. chceme nalézt funkci, která řeší naši rovnici a navíc její funkční hodnota v  $t = 1$  je rovna 2. Lze ukázat, že taková úloha má na  $(0, +\infty)$  pouze jediné řešení  $\bar{y}(t) = 2t$ .

Úlohu, která se skládá z hledání řešení obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu, která má navíc splňovat tzv. počáteční podmínku  $y(t_0) = y_0$  ( $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}$ ), nazýváme Cauchyovou úlohou a zapisujeme ji obecně takto:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (4)$$

Pokud má funkce  $f(t, y(t))$  speciální tvar<sup>3</sup>, pak existují metody, jak analyticky řešit výše popsanou Cauchyovu úlohu. Často však analytické řešení nalézt nelze nebo by jeho nalezení bylo příliš náročné. V takovém případě se nabízí použití některé z numerických metod pro přibližné řešení diferenciálních rovnic 1. řádu s počáteční podmínkou. Podívejme se nyní na jednu z těchto metod – Eulerovu metodu<sup>4</sup>. O funkci  $f$  budeme dále předpokládat, že je v množině  $D = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t_0 \leq t\}$  spojitá a také jsou v  $D$  spojitě derivace této funkce podle proměnné  $y$ .

---

<sup>3</sup>Například  $f$  závisí lineárně na  $y$ , tj.  $f(t, y) = a(t)y + b(t)$ , kde  $a$  a  $b$  jsou reálné funkce.

<sup>4</sup>Publikoval ji významný švýcarský matematik a fyzik Leonhard Euler v roce 1768.

## Eulerova metoda

Eulerova metoda je opravdu jednoduchý způsob numerického řešení Cauchyových úloh. Výstup Eulerovy metody nám aproximuje řešení Cauchyovy úlohy (4) na intervalu  $\langle t_0, t_N \rangle$ . Metoda využívá aproximace derivace<sup>5</sup> funkce  $y$  v bodě  $t$  pomocí tzv. dopředné diference  $y$  v tomto bodě

$$y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h},$$

kde  $h$  je „malé“ a kladné.

Po jednoduché úpravě dostaneme

$$y(t+h) \approx y(t) + hy'(t).$$

Použijeme-li (4), pak získáme vztah

$$y(t+h) \approx y(t) + hf(t, y(t)). \quad (5)$$

Dále zvolme „dostatečně malé“  $h > 0$  a sestrojme posloupnost

$$t_0, t_1 \stackrel{\text{def.}}{=} t_0 + h, t_2 \stackrel{\text{def.}}{=} t_0 + 2h, \dots, t_N \stackrel{\text{def.}}{=} t_0 + Nh$$

Označme pomocí  $y_n$  aproximaci hodnoty přesného řešení  $y(t_n)$ . Z (5) a po dodání počáteční podmínky z (4) dostaneme rekurzivní vztah

$$\boxed{\begin{aligned} y_0 &= y(t_0), \\ y_{n+1} &= y_n + hf(t_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots, N, \end{aligned}}$$

který použijeme pro numerické řešení Cauchyovy úlohy (4). Dá se ukázat, že chyba aproximace řešení pomocí Eulerovy metody v bodě  $t_1$  je přímo úměrná druhé mocnině velikosti kroku  $h$ . Chyba aproximace řešení v bodě  $t_N$  je přímo úměrná velikosti  $h$ .

Než se začneme zabývat tvorbou matematického modelu, který popisuje rozpad atomů radioaktivních prvků, vrátíme se v čase do doby krátce po konci druhé světové války. Těsně po válce zjistila nizozemská policie, že během války bylo prodáno několik Vermeerových<sup>6</sup> obrazů německému ministrovi letectví Hermannu Göringovi. Tuto transakci zprostředkoval nizozemský občan Han van Meegeren.<sup>7</sup> Na základě těchto zjištěných faktů byl 29. 5. 1945 van Meegeren zadržen a obviněn z kolaborace s nepřitelem. 12. 7. 1945 van Meegeren vydal prohlášení, že Göringovi nikdy žádný Vermeerův obraz neprodal. Naopak Göringa napálil, protože obrazy, které mu prodal, jsou podvrhy Vermeerových obrazů a sám je vytvořil.

A aby dokázal své tvrzení, začal jeden z „Vermeerových“ obrazů<sup>8</sup> napodobovat. Van Meegeren přizvaným znalcům předvedl způsob, jakým vytváří barvy, jak připravuje plátno,

<sup>5</sup>Pro jistotu zde připomínáme její definici  $y'(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$ .

<sup>6</sup>Jan Vermeer van Delft (31. 10. 1632 - 15. 12. 1675) byl nizozemský barokní malíř.

<sup>7</sup>Han van Meegeren (10. 10. 1889 - 30. 12. 1947) byl nizozemský malíř.

<sup>8</sup>„Ježíš mezi znalci Písma“

či jak zařídí, aby povrch malby vypadal jako u několik set let starého obrazu. Těsně před dokončením podvrhu Vermeerova obrazu se van Meegeren dozvěděl, že obvinění z kolaborace, bude nahrazeno obviněním z padělatelství, a tak odmítl tuto kopii dokončit. I tak ale většina přizvaných odborníků uznala, že obrazy prodané Göringovi jsou pravděpodobně falzum a van Meegeren byl 12. 10. 1947 odsouzen za padělatelství na rok do vězení, ve kterém 30. 12. 1947 na infarkt zemřel. I přesto, že komise, která posuzovala pravost „Ver-



Obrázek 4: Han van Meegeren

meerových“ obrazů uznala, že to jsou pravděpodobně podvrhy vytvořené van Meegerenem, zůstávali odborníci u některých obrazů, k jejichž autorství se také van Meegeren přihlásil, na pochybách. Zejména zpochybňování pravosti obrazu Emauzští učedníci, který zakoupilo muzeum v Rotterdamu za 170 000 dolarů, vyvolávalo velké spory. Proto se přistoupilo u tohoto obrazu v roce 1967 k metodě radioaktivního datování, která měla tyto pochyby rozhodnout. Tato pravost byla zkoumána na Carnegie Mellon University (Pittsburgh, USA).

Metoda radioaktivního datování využívá toho, že některé tzv. radioaktivní prvky jsou nestabilní a část jejich atomů se samovolně rozpadá na atomy jiných prvků. Experimenty bylo zjištěno, že rychlost rozpadu atomů radioaktivních prvků je přímo úměrná počtu těchto atomů. Pokud funkci udávající počet atomů radioaktivního prvku v čase  $t$  v gramu látky označíme jako  $N(t)$ , pak výše zmíněnou závislost můžeme popsat diferenciální rovnicí

$$N'(t) = -\lambda N(t), \quad (6)$$

kde  $\lambda$  je konstanta, která popisuje rychlost rozpadu atomů daného radioaktivního prvku. Tato konstanta je dána pro každý radioaktivní prvek tímto vztahem

$$\lambda = \frac{\ln 2}{\text{poločas rozpadu prvku}}.$$

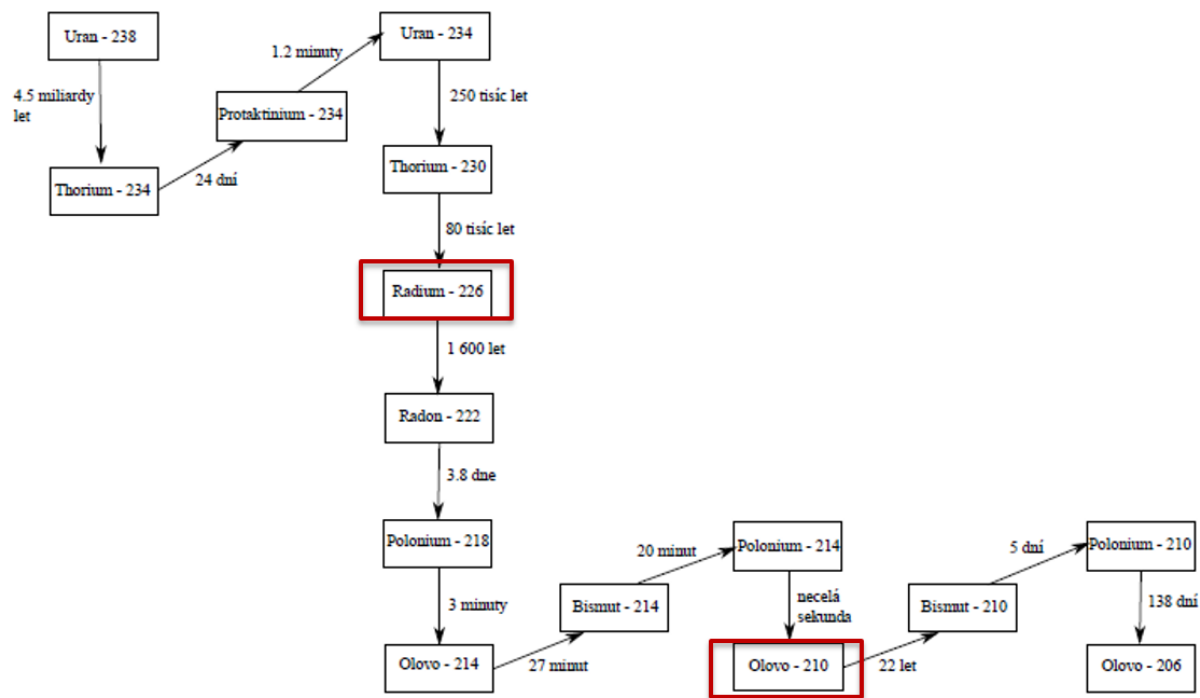
Čas  $t$  v našem modelu budeme měřit v rocích a jednotka konstanty  $\lambda$  je v  $\text{rok}^{-1}$ .

Metoda radioaktivního datování je založena na jednoduchém pozorování. Pokud bychom věděli, kolik atomů radioaktivního prvku měla látka v jednom svém gramu při svém vzniku (tzn. známe hodnotu  $N_0$ , pro kterou platí  $N(0) = N_0$ ), a znali bychom také aktuální počet těchto atomů v gramu látky, mohli bychom řešením úlohy

$$\begin{cases} N'(t) = -\lambda N(t), \\ N(0) = N_0. \end{cases} \quad (7)$$

zjistit, jak je tato látka stará.

Než se začneme zabývat datováním „Vermeerových“ obrazů, uvědomme si, že všechny horniny na Zemi obsahují malé množství radioaktivního uranu, který se rozpadá na atomy dalšího prvku. Tyto atomy se opět samovolně mění na další atomy atd. (viz obrázek 5).



Obrázek 5: Uranová rozpadová řada (časy u šipek udávají poločasy rozpadu jednotlivých radioaktivních prvků)

Dále je známo, že olovnatá běloba používaná na Vermeerových malbách obsahuje oxid olovnatý, který obsahuje malé množství olova-210 a ještě menší množství radia-226. V okamžiku, kdy je barva obsahující oxid olovnatý vyrobena, začnou se atomy olova-210 velmi rychle rozpadat s poločasem rozpadu 22 let a množství olova-210 v této barvě klesá. Na druhé straně vzniká malé množství olova-210 rozpadem radia-226 s poločasem rozpadu 1600 let (a prvků, které následují v rozpadové řadě za ním). Tento proces můžeme popsat

následující Cauchyovou úlohou

$$\begin{cases} N'(t) = -\lambda N(t) + r(t), \\ N(0) = N_0, \end{cases} \quad (8)$$

kde  $N(t)$  je funkce udávající počet atomů olova-210 v čase  $t$  v gramu látky,  $r(t)$  je funkce udávající počet atomů olova-210, které vzniknou v čase  $t$  v gramu oxidu olovnatého za rok.

Protože poločas rozpadu radia-226 je 1600 let a metodu radioaktivního datování chceme použít pro rozpoznání stáří obrazů, které měly v roce 1967 buď přibližně 300 let nebo 20 let, můžeme funkci  $r(t)$  považovat za konstantní. Pak  $r(t) = r = \text{konst.}$  a úlohu (8) můžeme nahradit úlohou

$$\begin{cases} N'(t) = -\lambda N(t) + r, \\ N(0) = N_0. \end{cases} \quad (9)$$

Mnohem více podrobností o metodě radioaktivního datování může čtenář nalézt v [2].

Také v případě úlohy (9) jsme schopni, pokud známe počet atomů olova-210 v gramu oxidu olovnatého v době výroby olovnaté běloby, určit stáří obrazu, na kterém je tato barva použita. K řešení této úlohy můžeme použít Eulerovu metodu, se kterou jste se seznámili dříve. V naší úloze počet atomů olova-210 v gramu oxidu olovnatého v době výroby barvy bohužel neznáme. I přesto jsme schopni rozlišit obraz jehož stáří je 300 let od obrazu, který má 20 let. Je totiž známo, jaké bývají koncentrace radioaktivního olova-210 v rudách, ze kterých se vyrábí oxid olovnatý. Na Zemi není známo ložisko, které by obsahovalo rudu s koncentrací větší než  $5 \cdot 10^{11}$  atomů olova-210 v gramu rudy. Proto můžeme zjistit, pokud známe potřebné parametry, zda je možné, aby bylo stáří obrazu 300 let.

**Úkol 3.1** Je možné, aby obraz Emauzští učedníci byl v roce 1967 starý cca 300 let? V roce 1967 bylo změřeno, že v čase  $t = 1967$  platí

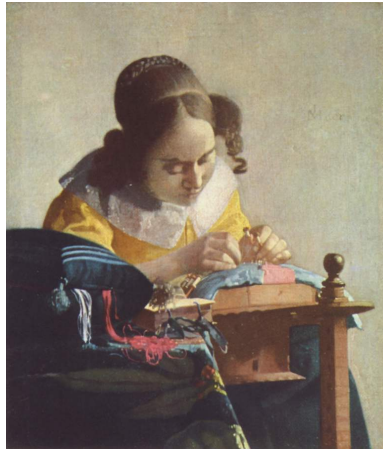
$$N(t) = 1,42 \cdot 10^8, \quad r = 420480.$$



Obrázek 6: Emauzští učedníci – Museum Boijmans Van Beuningen, Rotterdam

**Úkol 3.2** Je možné, aby obraz Krajčárka byl v roce 1967 starý cca 300 let? V roce 1967 bylo změřeno, že v čase  $t = 1967$  platí

$$N(t) = 0,25 \cdot 10^8, \quad r = 735840.$$



Obrázek 7: Krajčárka – Louvre, Paříž

**Úkol 3.3** Je možné, aby obraz Voják a smějící se děvče byl v roce 1967 starý cca 300 let? V roce 1967 bylo změřeno, že v čase  $t = 1967$  platí

$$N(t) = 1 \cdot 10^8, \quad r = 2733120.$$



Obrázek 8: Voják a smějící se děvče – Frick Collection, New York



## Reference

- [1] J. Kubias: Učíme se programovat v jazyce Python 3. [cit. 3.1.2023]. Dostupné z: <http://howto.py.cz/index.htm>
- [2] M. Braun: Differential Equations and Their Applications. Springer Verlag (1993).
- [3] B. Krajc, P. Beremlijski: Obyčejné diferenciální rovnice. [cit. 3.1.2023]. Text vytvořený při realizaci projektu „Matematika pro inženýry 21. století“, Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava (2012). Dostupné z: <http://mi21.vsb.cz/modul/obycejne-diferencialni-rovnice>

**Definice A.1** Bud'  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a  $x \in \mathbb{R}$ . Existuje-li

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

značíme ji  $f'(x)$  a nazýváme derivací funkce  $f$  v bodě  $x$ .

**Poznámka A.1** Většinou – a nejinak je to v tomto textu – se pod pojmem derivace rozumí konečná (tzv. vlastní) derivace.

**Věta A.1** Bud'  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a  $x \in \mathbb{R}$ . Pak platí

- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$ , má-li pravá strana rovnosti smysl,
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ , existují-li (vlastní) derivace  $f'(x)$  a  $g'(x)$ ,
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ , existují-li (vlastní) derivace  $f'(x)$  a  $g'(x)$  a je-li  $g(x) \neq 0$ .

**Pozorování A.1**

- $(c)' = 0$ ,  $c \in \mathbb{R}$  (konst.),  $x \in \mathbb{R}$ ,
- $(x^r)' = rx^{r-1}$ ,  $r \in \mathbb{R}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ ,
- $(\sin x)' = \cos x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,
- $(\cos x)' = -\sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,
- $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$ ,
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ ,
- $(e^x)' = e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .