

# Jak matematicky zachytit pohyb

Petra Vondráková

Katedra aplikované matematiky  
VŠB-Technická univerzita, Ostrava

ŠKOMAM 2017

# Čím se zabývá matematika?

- 500 let před n.l.

# Čím se zabývá matematika?

- 500 let před n.l.
- 300 let před n.l.

# Čím se zabývá matematika?

- 500 let před n.l.
- 300 let před n.l.
- 17. století

# Čím se zabývá matematika?

- 500 let před n.l.
- 300 let před n.l.
- 17. století
- Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz – zakladatelé diferenciálního a integrálního počtu.



- 1646 narozen v Lipsku, Německo
- vystudoval logiku, filozofii a právo
- profesionální diplomat a právník
- v matematice byl samouk
- 1684 publikoval základy diferenciálního a integrálního počtu

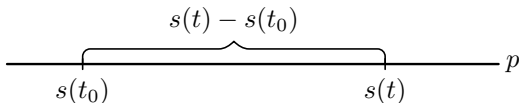


- Uvažujme hmotný bod, který se pohybuje po přímce  $p$ .  
Označme  $t$  čas a  $s(t)$  polohu, v níž se bod v čase  $t$  nachází.

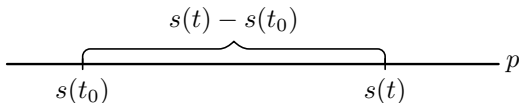


# Mechanický model

- Uvažujme hmotný bod, který se pohybuje po přímce  $p$ .  
Označme  $t$  čas a  $s(t)$  polohu, v níž se bod v čase  $t$  nachází.

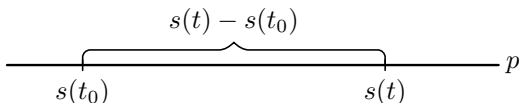


- Uvažujme hmotný bod, který se pohybuje po přímce  $p$ .  
Označme  $t$  čas a  $s(t)$  polohu, v níž se bod v čase  $t$  nachází.



- Zvolíme časový okamžik  $t$  (např.  $t > t_0$ ) a budeme pro názornost předpokládat, že v intervalu  $\langle t_0, t \rangle$  se bod pohybuje doprava.

- Uvažujme hmotný bod, který se pohybuje po přímce  $p$ .  
Označme  $t$  čas a  $s(t)$  polohu, v níž se bod v čase  $t$  nachází.



- Zvolíme časový okamžik  $t$  (např.  $t > t_0$ ) a budeme pro názornost předpokládat, že v intervalu  $\langle t_0, t \rangle$  se bod pohybuje doprava.
- Průměrná rychlost za dobu  $t - t_0$  (což je délka uvažovaného časového intervalu) je dráha, kterou bod v této době urazil, tj.  $s(t) - s(t_0)$ , dělená přírůstkem času  $t - t_0$ .

- Průměrná rychlost  $v_t$  v časovém intervalu  $\langle t_0, t \rangle$  je tedy

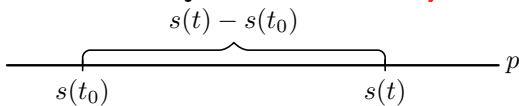
$$v_t = \frac{\text{dráha}}{\text{čas}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

# Mechanický model

- Průměrná rychlost  $v_t$  v časovém intervalu  $\langle t_0, t \rangle$  je tedy

$$v_t = \frac{\text{dráha}}{\text{čas}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

- Naším úkolem je určit **okamžitou rychlost** bodu v čase  $t_0$ .

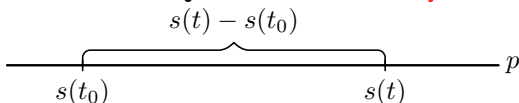


# Mechanický model

- Průměrná rychlost  $v_t$  v časovém intervalu  $\langle t_0, t \rangle$  je tedy

$$v_t = \frac{\text{dráha}}{\text{čas}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

- Naším úkolem je určit **okamžitou rychlost** bodu v čase  $t_0$ .



- Přibližováním okamžiku  $t$  k  $t_0$ , tj. zkracováním časového intervalu, přejde průměrná rychlost na časovém intervalu  $\langle t_0, t \rangle$  v okamžitou rychlost  $v_0$  v čase  $t_0$ .

- Průměrná rychlost  $v_t$  v časovém intervalu  $\langle t_0, t \rangle$  je tedy

$$v_t = \frac{\text{dráha}}{\text{čas}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

## Okamžitá rychlost

$$v_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$



- Předchozí limita udává „rychlost změny“ polohy pohybujícího se bodu neboli okamžitou rychlost.



- Předchozí limita udává „rychlost změny“ polohy pohybujícího se bodu neboli okamžitou rychlost.
- Budeme-li zkoumat „rychlost změny“ rychlosti, dostaneme **okamžité zrychlení**. Tj.

$$a_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0},$$

- Chceme stanovit „rychlost změny“ funkce.

- Chceme stanovit „rychlost změny“ funkce.
- V grafickém znázornění to znamená najít v daném bodě  $x$  sklon křivky (to, jak je křivka strmá).

- Chceme stanovit „rychlost změny“ funkce.
- V grafickém znázornění to znamená najít v daném bodě  $x$  sklon křivky (to, jak je křivka strmá).
- Zatím nevíme, jak určit sklon libovolné křivky. Víme ale, jak určit **sklon přímky**, procházející dvěma body. Sklon přímky je dán velikostí úhlu, jenž svírá tato přímka s osou  $x$ .

- Chceme stanovit „rychlost změny“ funkce.
- V grafickém znázornění to znamená najít v daném bodě  $x$  sklon křivky (to, jak je křivka strmá).
- Zatím nevíme, jak určit sklon libovolné křivky. Víme ale, jak určit **sklon přímky**, procházející dvěma body. Sklon přímky je dán velikostí úhlu, jenž svírá tato přímka s osou  $x$ .
- Číselně se tato velikost úhlu vyjadřuje jako **směrnice** přímky neboli tangens úhlu.

- Jak určit **sklon křivky** v bodě  $T$  ?

- Jak určit **sklon křivky** v bodě  $T$  ?
- Umíme určit sklon přímky procházející dvěma body  $T$  a  $P$ .

- Jak určit **sklon křivky** v bodě  $T$  ?
- Umíme určit sklon přímky procházející dvěma body  $T$  a  $P$ .
- Jak přejít od sklonu přímky (dva body) ke sklonu křivky (jeden bod)?

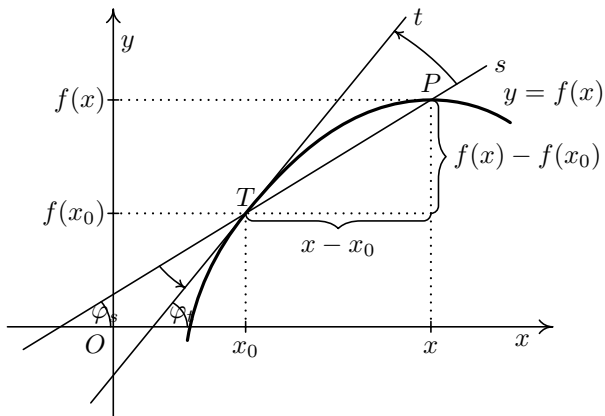


- Jak určit **sklon křivky** v bodě  $T$  ?
- Umíme určit sklon přímky procházející dvěma body  $T$  a  $P$ .
- Jak přejít od sklonu přímky (dva body) ke sklonu křivky (jeden bod)?
- Stejná myšlenka jako v případě okamžité rychlosti.

- Jak určit **sklon křivky** v bodě  $T$  ?
- Umíme určit sklon přímky procházející dvěma body  $T$  a  $P$ .
- Jak přejít od sklonu přímky (dva body) ke sklonu křivky (jeden bod)?
- Stejná myšlenka jako v případě okamžité rychlosti.
- Zvolme na křivce bod  $P$  a vypočtěme směrnici přímky  $TP$ .

- Jak určit **sklon křivky** v bodě  $T$  ?
- Umíme určit sklon přímky procházející dvěma body  $T$  a  $P$ .
- Jak přejít od sklonu přímky (dva body) ke sklonu křivky (jeden bod)?
- Stejná myšlenka jako v případě okamžité rychlosti.
- Zvolme na křivce bod  $P$  a vypočtěme směrnici přímky  $TP$ .
- Postupně přibližujme bod  $P$  k bodu  $T$  a zkoumejme posloupnost směrnic přímk  $TP$ .

# Geometrický model



# Geometrický model – numerický experiment

- Vezmeme  $f(x) = x^2$  a bod  $x_0 = 5$ .

$x$	$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$		
6	$\frac{6^2-5^2}{6-5} = \frac{36-25}{1}$	=	11
5,5	$\frac{(5,5)^2-5^2}{5,5-5} = \frac{30,25-25}{0,5}$	=	10,5
5,2	$\frac{(5,2)^2-5^2}{5,2-5} = \frac{27,04-25}{0,2}$	=	10,2
5,1	$\frac{(5,1)^2-5^2}{5,1-5} = \frac{26,01-25}{0,1}$	=	10,1
5,01	$\frac{(5,01)^2-5^2}{5,01-5} = \frac{25,1001-25}{0,01}$	=	10,01
5,001	$\frac{(5,001)^2-5^2}{5,001-5} = \frac{25,010001-25}{0,001}$	=	10,001

# Geometrický model – numerický experiment

- Vezmeme  $f(x) = x^2$  a bod  $x_0 = 5$ .

$x$	$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	
6	$\frac{6^2-5^2}{6-5} = \frac{36-25}{1}$	= 11
5,5	$\frac{(5,5)^2-5^2}{5,5-5} = \frac{30,25-25}{0,5}$	= 10,5
5,2	$\frac{(5,2)^2-5^2}{5,2-5} = \frac{27,04-25}{0,2}$	= 10,2
5,1	$\frac{(5,1)^2-5^2}{5,1-5} = \frac{26,01-25}{0,1}$	= 10,1
5,01	$\frac{(5,01)^2-5^2}{5,01-5} = \frac{25,1001-25}{0,01}$	= 10,01
5,001	$\frac{(5,001)^2-5^2}{5,001-5} = \frac{25,010001-25}{0,001}$	= 10,001

- Směrnice přímk  $TP$  se přibližují k hodnotě 10. Tj. sklon křivky  $x^2$  v bodě 5 je 10.

## Definice derivace - geometrický model

- Pro **směrnici sečny**  $s$ , která je určena dvěma body  $T = (x_0, f(x_0))$  a  $P = (x, f(x))$ , platí

$$k_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$



- Pro **směrnici sečny**  $s$ , která je určena dvěma body  $T = (x_0, f(x_0))$  a  $P = (x, f(x))$ , platí

$$k_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- Přibližujeme-li bod  $x$  k bodu  $x_0$ , přejde úhel  $\varphi_s$  v úhel  $\varphi_t$ , a **směrnice sečny**  $k_s = \operatorname{tg} \varphi_s$  **přejde ve směrnici tečny**  $k_t = \operatorname{tg} \varphi_t$ .

- Pro **směrnici sečny**  $s$ , která je určena dvěma body  $T = (x_0, f(x_0))$  a  $P = (x, f(x))$ , platí

$$k_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- Přibližujeme-li bod  $x$  k bodu  $x_0$ , přejde úhel  $\varphi_s$  v úhel  $\varphi_t$ , a **směrnice sečny**  $k_s = \operatorname{tg} \varphi_s$  **přejde ve směrnici tečny**  $k_t = \operatorname{tg} \varphi_t$ .

## Směrnice tečny

$$k_t = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ukázali jsme si, že platí:

## Okamžitá rychlost

$$v_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Ukázali jsme si, že platí:

## Okamžitá rychlost

$$v_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

## Okamžité zrychlení

$$a_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0},$$

Ukázali jsme si, že platí:

## Okamžitá rychlost

$$v_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

## Okamžité zrychlení

$$a_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0},$$

## Směrnice tečny

$$k_t = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

# Definice derivace funkce v bodě

Vzhledem k důležitosti zmíněné limity, zavádíme následující definici.

## Definice

Nechť  $x_0 \in D(f)$ . Existuje-li limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

značíme ji  $f'(x_0)$  a nazýváme **derivací funkce  $f$  v bodě  $x_0$** .

Je-li  $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ , pak říkáme, že  $f$  má v bodě  $x_0$  **vlastní derivaci**.

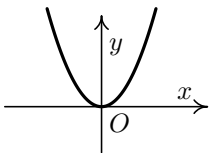
Je-li  $f'(x_0) = \pm\infty$ , říkáme, že funkce  $f$  má v bodě  $x_0$  **nevlastní derivaci**.

# Příklad 1

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce  $f(x) = x^2$  v bodě  $x_0 = 0$ .

# Příklad 1

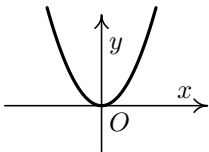
Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce  $f(x) = x^2$  v bodě  $x_0 = 0$ .





# Příklad 1

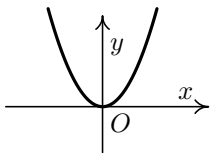
Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce  $f(x) = x^2$  v bodě  $x_0 = 0$ .



$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

# Příklad 1

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce  $f(x) = x^2$  v bodě  $x_0 = 0$ .



$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

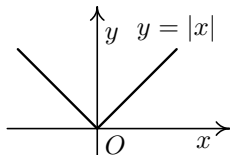
Derivace  $f'(0)$  představuje směrnici tečny ke grafu funkce v bodě  $(0, f(0))$ . Tj. tečnou je osa  $x$ .

## Příklad 2

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce  $f(x) = |x|$  v bodě  $x_0 = 0$ .

## Příklad 2

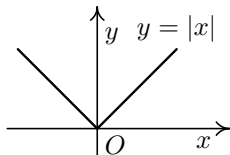
Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce  $f(x) = |x|$  v bodě  $x_0 = 0$ .



$$f: y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

## Příklad 2

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce  $f(x) = |x|$  v bodě  $x_0 = 0$ .

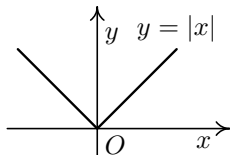


$$f: y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Vypočtěte jednostranné derivace funkce  $f(x) = |x|$  v bodě 0.

## Příklad 2

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce  $f(x) = |x|$  v bodě  $x_0 = 0$ .



$$f: y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

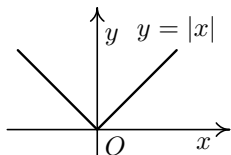
Vypočtěme jednostranné derivace funkce  $f(x) = |x|$  v bodě 0.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

## Příklad 2

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce  $f(x) = |x|$  v bodě  $x_0 = 0$ .



$$f: y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Vypočtěme jednostranné derivace funkce  $f(x) = |x|$  v bodě 0.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Tedy  $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ , a proto  $f'(0)$  neexistuje. Graf funkce  $f$  má v tomto bodě jakýsi „hrot“, „špičku“. V takovém bodě nelze sestavit tečnu.

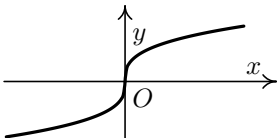
## Příklad 3

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  v bodě  $x_0 = 0$ .



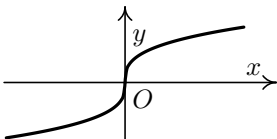
## Příklad 3

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  v bodě  $x_0 = 0$ .



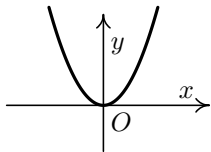
## Příklad 3

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  v bodě  $x_0 = 0$ .



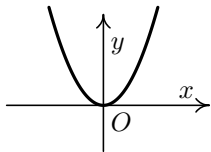
$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = +\infty.$$

# Co již víme?

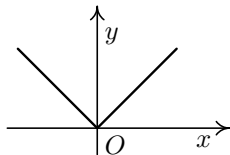


$$f'(0) = 0$$

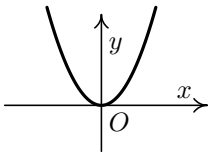
# Co již víme?



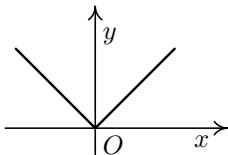
$$f'(0) = 0$$



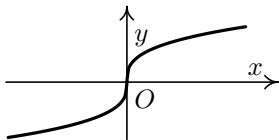
$f'(0)$  *neexistuje*



$$f'(0) = 0$$



$f'(0)$  *neexistuje*



$$f'(0) = +\infty$$

## Definice derivace - geometrický model

# Definice derivace funkce na množině

Doposud jsme mluvili o derivaci funkce v jednom bodě  $x_0$ . Tato derivace je nějaké číslo.

# Definice derivace funkce na množině

Doposud jsme mluvili o derivaci funkce v jednom bodě  $x_0$ . Tato derivace je nějaké číslo.

Jestliže má  $f$  derivaci v každém bodě definičního oboru (popř. nějaké jeho části), dostáváme novou funkci  $f'$  definovanou takto:



Doposud jsme mluvili o derivaci funkce v jednom bodě  $x_0$ . Tato derivace je nějaké číslo.

Jestliže má  $f$  derivaci v každém bodě definičního oboru (popř. nějaké jeho části), dostáváme novou funkci  $f'$  definovanou takto:

## Definice

Nechť existuje vlastní derivace  $f'(x)$  funkce  $f$  pro všechna  $x \in M$ , kde  $M \subset D(f)$ . Pak funkci  $f': y = f'(x), x \in M$ , nazýváme **derivací funkce  $f$  na  $M$** .

# Derivace elementárních funkcí

$$1 \quad (c)' = 0, \quad c \in \mathbb{R} \text{ (konst.)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$2 \quad (x^r)' = r \cdot x^{r-1}, \quad r \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

$$3 \quad (\sin x)' = \cos x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$4 \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$5 \quad (e^x)' = e^x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$6 \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$7 \quad (\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\},$$

$$8 \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

$$9 \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1),$$

- 10  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1),$
- 11  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R},$
- 12  $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R},$
- 13  $(a^x)' = a^x \ln a, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x \in \mathbb{R},$
- 14  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x \in \mathbb{R}^+.$

Newton a Leibniz předložili pravidla pro:

- derivování základních elementárních funkcí,

Newton a Leibniz předložili pravidla pro:

- derivování základních elementárních funkcí,
- derivování součtu, rozdílu, součinu, podílu funkcí,

Newton a Leibniz předložili pravidla pro:

- derivování základních elementárních funkcí,
- derivování součtu, rozdílu, součinu, podílu funkcí,
- derivování složených funkcí,

Newton a Leibniz předložili pravidla pro:

- derivování základních elementárních funkcí,
- derivování součtu, rozdílu, součinu, podílu funkcí,
- derivování složených funkcí,
- a tím pádem derivování všech elementárních funkcí.

Newton a Leibniz předložili pravidla pro:

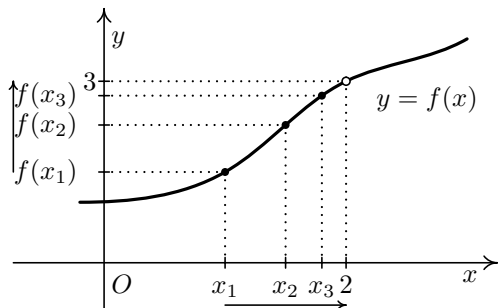
- derivování základních elementárních funkcí,
- derivování součtu, rozdílu, součinu, podílu funkcí,
- derivování složených funkcí,
- a tím pádem derivování všech elementárních funkcí.

Byl vytvořen kalkul, který fungoval a nacházel nesmírné uplatnění v různých oborech. Lidé sice nevěděli, proč to funguje, ale věděli, co mají dělat.



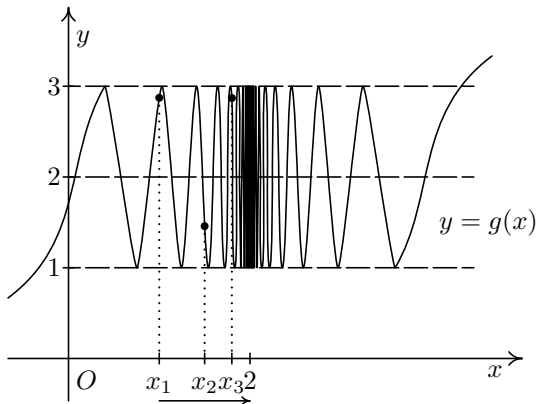
- Derivace funkce v bodě je číslo, které udává rychlost změny nějaké měnící se veličiny, např. okamžitou rychlost, okamžité zrychlení nebo směrnici tečny.
- Dále víme, že derivace je definována pomocí limity jistého podílu. Právě **limita v sobě skrývá dynamický proces**, tedy pohyb.
- Chceme-li matematicky zachytit pohyb, musíme pochopit **pojem limita**. V podstatě celý diferenciální a integrální počet lze popsat jako tu část matematiky, která se zabývá limitami.

# Limita funkce v bodě



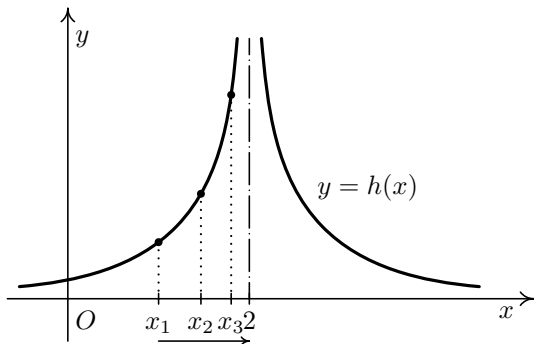
Vezměme hodnoty  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1,5$ ,  $x_3 = 1,8$ , ... nezávisle proměnné, které se budou čím dál více přibližovat k hodnotě 2 (z levé strany). Pak funkční hodnoty v těchto bodech, tj.  $f(x_1)$ ,  $f(x_2)$ ,  $f(x_3)$ , ..., se čím dál víc přibližují k číslu  $y = 3$ .

# Limita funkce v bodě



Jestliže se přibližujeme k bodu  $x = 2$  zleva, např. po hodnotách  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1,5$ ,  $x_3 = 1,8$ ,  $\dots$ , funkční hodnoty  $g(x_1)$ ,  $g(x_2)$ ,  $g(x_3)$ ,  $\dots$  se tentokrát k ničemu nepřibližují, ale „kmitají“ mezi hodnotami  $y = 1$  a  $y = 3$ .

# Limita funkce v bodě



Přibližujeme-li se k bodu  $x = 2$  zleva po bodech  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 1,5$ ,  $x_3 = 1,8, \dots$ , se funkční hodnoty  $h(x_1)$ ,  $h(x_2)$ ,  $h(x_3), \dots$  se neomezeně zvětšují.

- V době, kdy vznikal diferenciální počet, neexistoval pojem limity.

- V době, kdy vznikal diferenciální počet, neexistoval pojem limity.
- Jak Newton a Leibniz dokázali popsat fakt, že se směrnice sečen přibližují ke směrnici tečny?

- V době, kdy vznikal diferenciální počet, neexistoval pojem limity.
- Jak Newton a Leibniz dokázali popsat fakt, že se směrnice sečen přibližují ke směrnici tečny?
- Jak se s tímto dynamických procesem dokázali vyrovnat?

- V době, kdy vznikal diferenciální počet, neexistoval pojem limity.
- Jak Newton a Leibniz dokázali popsat fakt, že se směrnice sečen přibližují ke směrnici tečny?
- Jak se s tímto dynamickým procesem dokázali vyrovnat?
- Jak lze popsat dynamický proces statickými nástroji (pomocí čísel, rovnic ...)?



Jak Newton a Leibniz postupovali při výpočtu směrnice tečny ke křivce  $f(x) = x^3$  v bodě  $x_0$ ?

- Směrnice sečny spojující body  $T$  a  $P$  je dána vztahem

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Jak Newton a Leibniz postupovali při výpočtu směrnice tečny ke křivce  $f(x) = x^3$  v bodě  $x_0$ ?

- Směrnice sečny spojující body  $T$  a  $P$  je dána vztahem

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- Označíme-li  $x - x_0 = h$ , pak pro směrnici sečny dostáváme

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Jak Newton a Leibniz postupovali při výpočtu směrnice tečny ke křivce  $f(x) = x^3$  v bodě  $x_0$ ?

- Směrnice sečny spojující body  $T$  a  $P$  je dána vztahem

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- Označíme-li  $x - x_0 = h$ , pak pro směrnici sečny dostáváme

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- Pro funkci  $f(x) = x^3$  je směrnice sečny v bodě  $x_0$

$$\begin{aligned} \frac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{h} &= \frac{x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 - x_0^3}{h} = \\ &= \frac{3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3}{h} = 3x_0^2 + 3x_0h + h^2. \end{aligned}$$

- Pro funkci  $f(x) = x^3$  je směrnice sečny v bodě  $x_0$ :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 3x_0^2 + 3x_0h + h^2.$$

- Pro funkci  $f(x) = x^3$  je směrnice sečny v bodě  $x_0$ :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 3x_0^2 + 3x_0h + h^2.$$

- Jaká je ale směrnice tečny v bodě  $T = (x_0, f(x_0))$ ?

- Pro funkci  $f(x) = x^3$  je směrnice sečny v bodě  $x_0$ :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 3x_0^2 + 3x_0h + h^2.$$

- Jaká je ale směrnice tečny v bodě  $T = (x_0, f(x_0))$ ?
- A zde právě udělali Newton s Leibnizem geniální rozhodující krok. Podívali se na celou situaci dynamicky a numericky a zkoumali, co se bude dít, jestliže se vzdálenost  $h$  bude neustále zmenšovat.

- Pro funkci  $f(x) = x^3$  je směrnice sečny v bodě  $x_0$ :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 3x_0^2 + 3x_0h + h^2.$$

- Jaká je ale směrnice tečny v bodě  $T = (x_0, f(x_0))$ ?
- A zde právě udělali Newton s Leibnizem geniální rozhodující krok. Podívali se na celou situaci dynamicky a numericky a zkoumali, co se bude dít, jestliže se vzdálenost  $h$  bude neustále zmenšovat.
- Došli k závěru, že členy násobené činitelem „ $h$ “ zmizí.

- Pro funkci  $f(x) = x^3$  je směrnice sečny v bodě  $x_0$ :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 3x_0^2 + 3x_0h + h^2.$$

- Jaká je ale směrnice tečny v bodě  $T = (x_0, f(x_0))$ ?
- A zde právě udělali Newton s Leibnizem geniální rozhodující krok. Podívali se na celou situaci dynamicky a numericky a zkoumali, co se bude dít, jestliže se vzdálenost  $h$  bude neustále zmenšovat.
- Došli k závěru, že **členy násobené činitelem „ $h$ “ zmizí.**
- Pro  $f(x) = x^3$  je tedy směrnice tečny v bodě  $T$  rovna  $3x_0^2$ .



- Pro funkci  $f(x) = x^3$  je směrnice sečny v bodě  $x_0$ :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 3x_0^2 + 3x_0h + h^2.$$

- Jaká je ale směrnice tečny v bodě  $T = (x_0, f(x_0))$ ?
- A zde právě udělali Newton s Leibnizem geniální rozhodující krok. Podívali se na celou situaci dynamicky a numericky a zkoumali, co se bude dít, jestliže se vzdálenost  $h$  bude neustále zmenšovat.
- Došli k závěru, že **členy násobené činitelem „ $h$ “ zmizí.**
- Pro  $f(x) = x^3$  je tedy směrnice tečny v bodě  $T$  rovna  $3x_0^2$ .
- Problém je ale v tom, že v součinu pokládali veličinu „ $h$ “ rovnu nule, ale pokud veličinou „ $h$ “ dělili, pokládali ji za nenulovou.

- Newton i Leibniz pochopili tento limitní proces intuitivně zcela správně.

- Newton i Leibniz pochopili tento limitní proces intuitivně zcela správně.
- Nedokázali však vysvětlit zcela přesně práci s nekonečně malou veličinou „ $h$ “ a to vedlo k nedorozuměním a zmatkům.

- Newton i Leibniz pochopili tento limitní proces intuitivně zcela správně.
- Nedokázali však vysvětlit zcela přesně práci s nekonečně malou veličinou „ $h$ “ a to vedlo k nedorozuměním a zmatkům.
- **George Berkeley** se kriticky vyjádřil proti nekonečně malým veličinám, které přirovnal k „**duchům zemřelých veličin**“ — ty jednou jsou nulové a pak zase nejsou, podle potřeby operací, které se s nimi provádějí.

- Newton i Leibniz pochopili tento limitní proces intuitivně zcela správně.
- Nedokázali však vysvětlit zcela přesně práci s nekonečně malou veličinou „ $h$ “ a to vedlo k nedorozuměním a zmatkům.
- **George Berkeley** se kriticky vyjádřil proti nekonečně malým veličinám, které přirovnal k „**duchům zemřelých veličin**“ — ty jednou jsou nulové a pak zase nejsou, podle potřeby operací, které se s nimi provádějí.
- Leibniz se snažil čelit těmto kritikám a vysvětlit **nekonečně malé** veličiny, ale nakonec tento zápas vzdal a napsal svým kritikům:

- Newton i Leibniz pochopili tento limitní proces intuitivně zcela správně.
- Nedokázali však vysvětlit zcela přesně práci s nekonečně malou veličinou „ $h$ “ a to vedlo k nedorozuměním a zmatkům.
- **George Berkeley** se kriticky vyjádřil proti nekonečně malým veličinám, které přirovnal k „**duchům zemřelých veličin**“ — ty jednou jsou nulové a pak zase nejsou, podle potřeby operací, které se s nimi provádějí.
- Leibniz se snažil čelit těmto kritikám a vysvětlit **nekonečně malé** veličiny, ale nakonec tento zápas vzdal a napsal svým kritikům:

*„Můžete si myslet, že takové věci jsou naprosté nesmysly, přesto se ukazují výhodnými pomůckami pro počítání.“*

- Až za sto let roku 1821 formuloval Augustin Louis Cauchy klíčový pojem limity a o pár let později formálně definoval Karl Weierstrass.

- Až za sto let roku 1821 formuloval Augustin Louis Cauchy klíčový pojem limity a o pár let později formálně definoval Karl Weierstrass.
- Kalkulus byl tedy postaven na pevné základy 150 let po svém vzniku. (Newton sepsal teorii v roce 1665, Leibniz publikuje roku 1684.)



Nechť je dána funkce

$$f(h) = \frac{3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3}{h},$$

kde  $x_0$  je konstanta a  $h$  proměnná.

## K. Weierstrass – definice limity

Nechť je dána funkce

$$f(h) = \frac{3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3}{h},$$

kde  $x_0$  je konstanta a  $h$  proměnná.

Řekneme, že číslo  $L$  (v našem případě  $3x_0^2$ ) je limitou funkce  $f(h)$  pro  $h$  blížící se k číslu 0, jestliže platí: **Pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  tak, že když  $0 < |h| < \delta$ , pak  $|f(h) - L| < \varepsilon$ .**

Nechť je dána funkce

$$f(h) = \frac{3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3}{h},$$

kde  $x_0$  je konstanta a  $h$  proměnná.

Řekneme, že číslo  $L$  (v našem případě  $3x_0^2$ ) je limitou funkce  $f(h)$  pro  $h$  blížící se k číslu 0, jestliže platí: **Pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  tak, že když  $0 < |h| < \delta$ , pak  $|f(h) - L| < \varepsilon$ .**

Není zde řeč o žádném dynamickém procesu, o žádné nekonečně malé veličině, mluví se zde pouze o existenci čísla  $\delta$ , které má určitou vlastnost.

K porozumění podstatě pohybu a změny je třeba umět pracovat s nekonečnem — s nekonečně malými veličinami.

K porozumění podstatě pohybu a změny je třeba umět pracovat s nekonečnem — s nekonečně malými veličinami.

„Ačkoliv není nekonečno součástí našeho světa, lidská mysl ho potřebuje ovládnout, aby dokázala popsat a pochopit náš svět.“