



Katedra
aplikované matematiky



Pravděpodobnost je...

Martina Litschmannová

Katedra aplikované matematiky, FEI, VŠB-TU Ostrava

ŠKOMAM, 24. 1. 2017

Čím se zabývá teorie pravděpodobnosti?

Pokus – děj, který probíhá, resp. nastává opakovaně za určitých, stejně nastavených, počátečních podmínek.



Deterministické pokusy

Za určitých počátečních podmínek se dostaví vždy stejný výsledek.



X

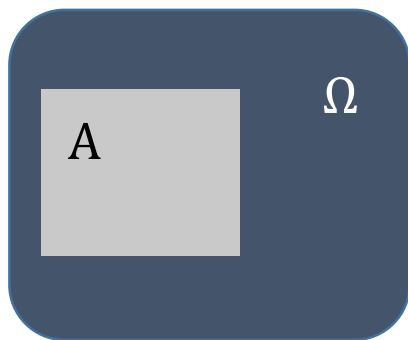
Náhodné pokusy

Pro určité počáteční podmínky existuje množina možných výsledků, přičemž jeden z nich nastane.

Základní pojmy

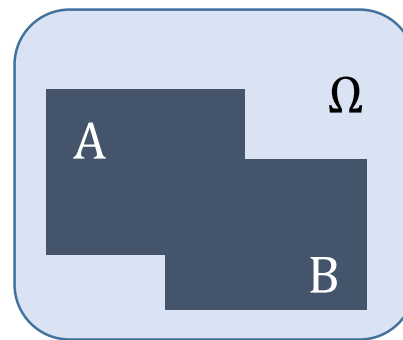
- **Náhodný pokus** – konečný děj, jehož výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za nichž probíhá
- **Náhodný jev** – tvrzení o výsledku náhodného pokusu, o jehož pravdivosti můžeme po ukončení pokusu rozhodnout
(značíme $A, B, X, Y, \dots$)
- **Elementární jev ω** – jednotlivý výsledek náhodného pokusu (nelze jej vyjádřit jako sjednocení dvou různých jevů)
- **Základní prostor Ω** – množina všech elementárních jevů

Vybrané vztahy mezi jevy



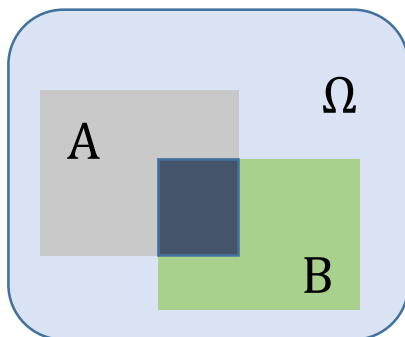
doplňěk jevu A

$$\bar{A}$$



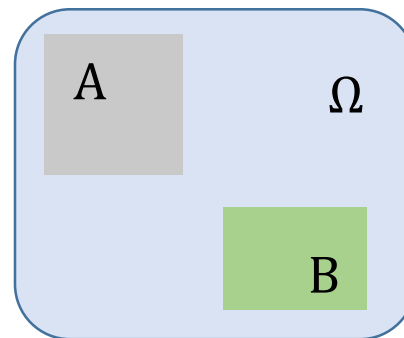
sjednocení jevů A a B

$$A \cup B$$



průnik jevů A a B

$$A \cap B$$



jevy disjunktní
(neslučitelné)

Co je to pravděpodobnost?

Číselné vyjádření šance,
že při náhodném pokusu daný jev nastane.



Jak pravděpodobnost definovat?

Počátky teorie pravděpodobnosti – 17. století

Jak rozdělit spravedlivě bank mezi hráče, byla-li série hazardních her ukončena předčasně?



Blaise Pascal (1623 – 1662)



Pierre de Fermat (1601 – 1665)

Klasická definice pravděpodobnosti (Pierre Simon de Laplace, 1812)

Založena na předpokladu, že náhodný pokus může mít n různých, avšak **rovnocenných** výsledků.

Nechť Ω je množina n rovnocených elementárních jevů.
Pravděpodobnost jevu A , jenž je složen z m těchto elementárních jevů je:

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Mějme „férovou“ hrací kostku. Jaká je pravděpodobnost, že padne „6“?

Označme: A ... padne „6“, pak $P(A) = \frac{1}{6}$.

Statistická definice pravděpodobnosti (Richard von Mises, počátek 20. století)



$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(A)}{n}$$

Počet realizací pokusu
příznivých jevu A

Počet **všech** realizací
pokusu

Jaká je pravděpodobnost padnutí „6“ na hrací kostce, nevíme-li, zda je tato kostka „férová“?

Geometrická pravděpodobnost

Zobecnění klasické pravděpodobnosti pro případ, kdy počet všech možných výsledků náhodného pokusu je nespočetný.

V rovině (případně na přímce nebo v prostoru) je dána určitá oblast Ω a v ní další uzavřená oblast A . Pravděpodobnost jevu A , který spočívá v tom, že náhodně zvolený bod v oblasti Ω leží i v oblasti A je:

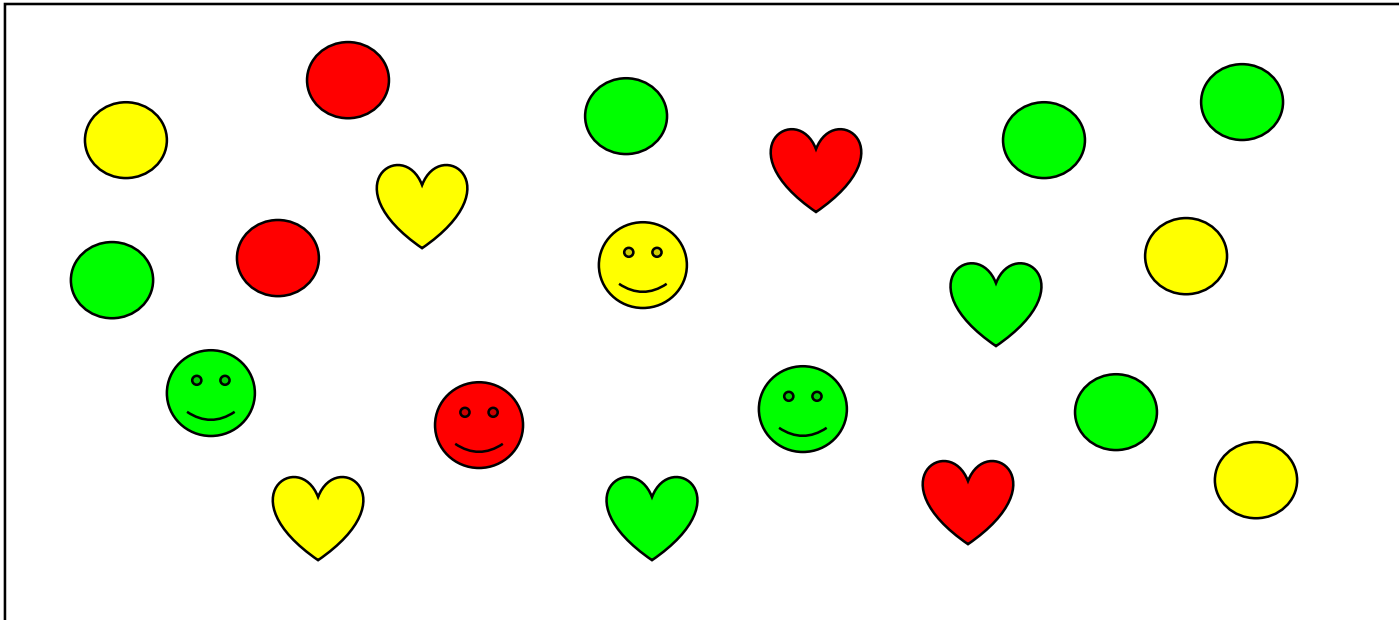
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Jaká je pravděpodobnost, že meteorit dopadl na pevninu?

Kolmogorovův axiomatický systém (Andrej Nikolajevič Kolmogorov, 1933)

- Definuje pojem pravděpodobnosti a její vlastnosti, neudává však žádný návod k jejímu stanovení.
1. Pravděpodobnost každého jevu A je reálné číslo mezi 0 a 1 (včetně).
 2. Pravděpodobnost, že nějaký jev nastane (pravděpodobnost jevu jistého) je rovna 1.
 3. Pravděpodobnost, že nastane některý z navzájem se vylučujících jevů, je rovna součtu jejich pravděpodobností. A to pro každých spočetně mnoho jevů.

1. V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



Označme:

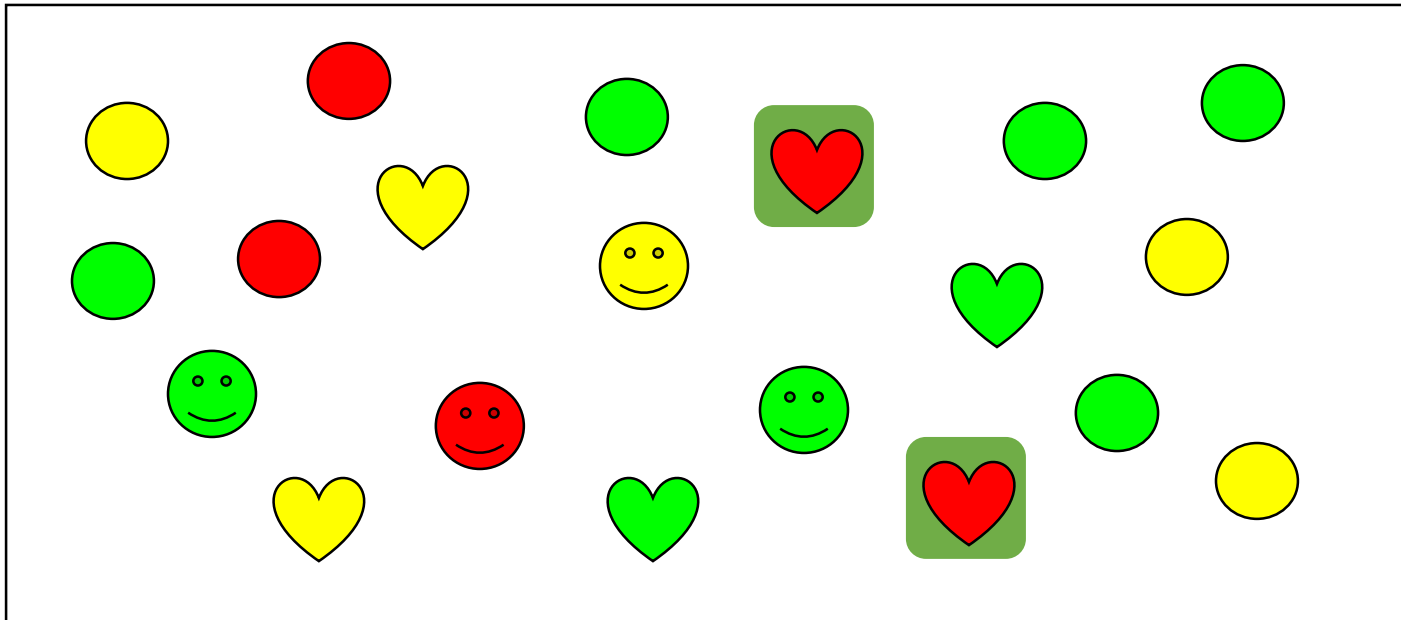
C ... náhodně vybraný útvar je červený

♥ ... náhodně vybraný útvar je srdíčko

-

$$P(\textcolor{red}{C}) = \frac{n_{\textcolor{red}{C}}}{n} = \frac{5}{20} = 0,25$$

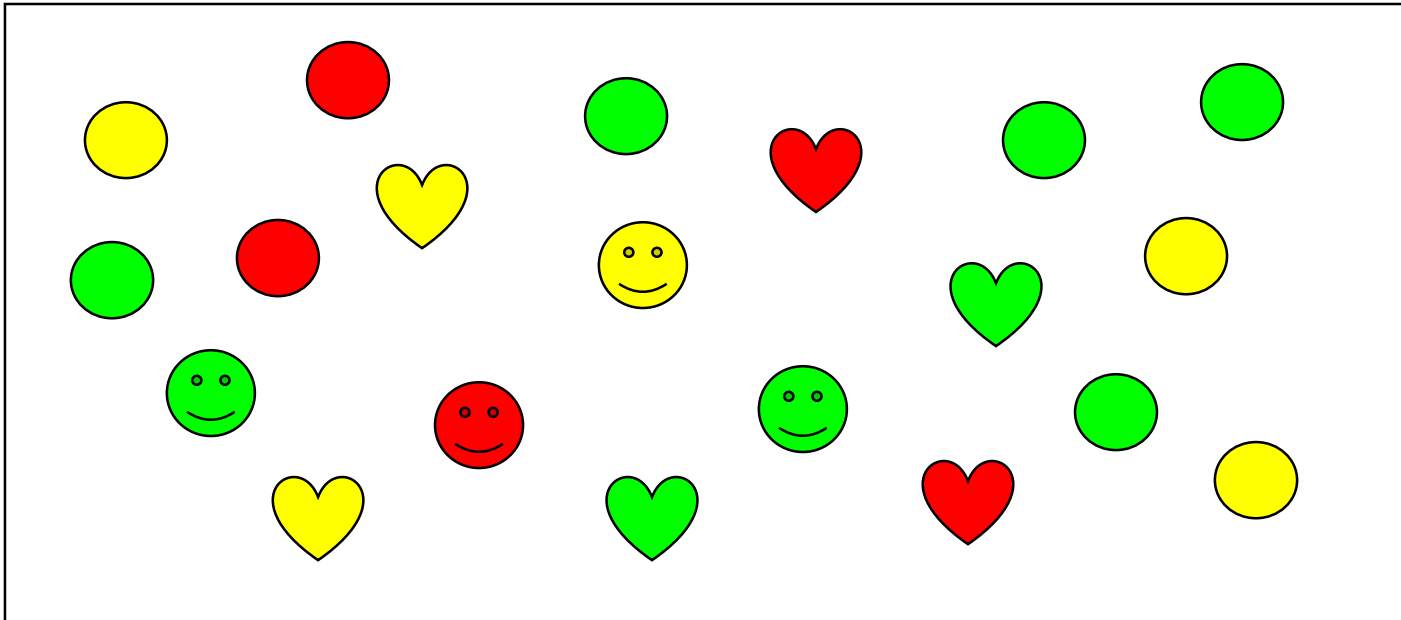
1. V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



b) Určete $P(\textcolor{red}{C} \cap \heartsuit)$.

$$P(\textcolor{red}{C} \cap \heartsuit) = \frac{2}{20} = 0,10$$

1. V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



c) Určete $P(\textcolor{red}{C}|\heartsuit)$.

Podmíněná pravděpodobnost

tj. pravděpodobnost jevu, za předpokladu, že nastal určitý jiný jev.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) \neq 0$$

$P(A|B)$ čti „pravděpodobnost jevu A za předpokladu, že nastal jev B“

-

$$P(\text{C}|\heartsuit) = \frac{n_{\text{C} \cap \heartsuit}}{n_{\heartsuit}} = \frac{\frac{n_{\text{C} \cap \heartsuit}}{n}}{\frac{n_{\heartsuit}}{n}} = \frac{P(\text{C} \cap \heartsuit)}{P(\heartsuit)} = \frac{2}{6}$$

Podmíněná pravděpodobnost

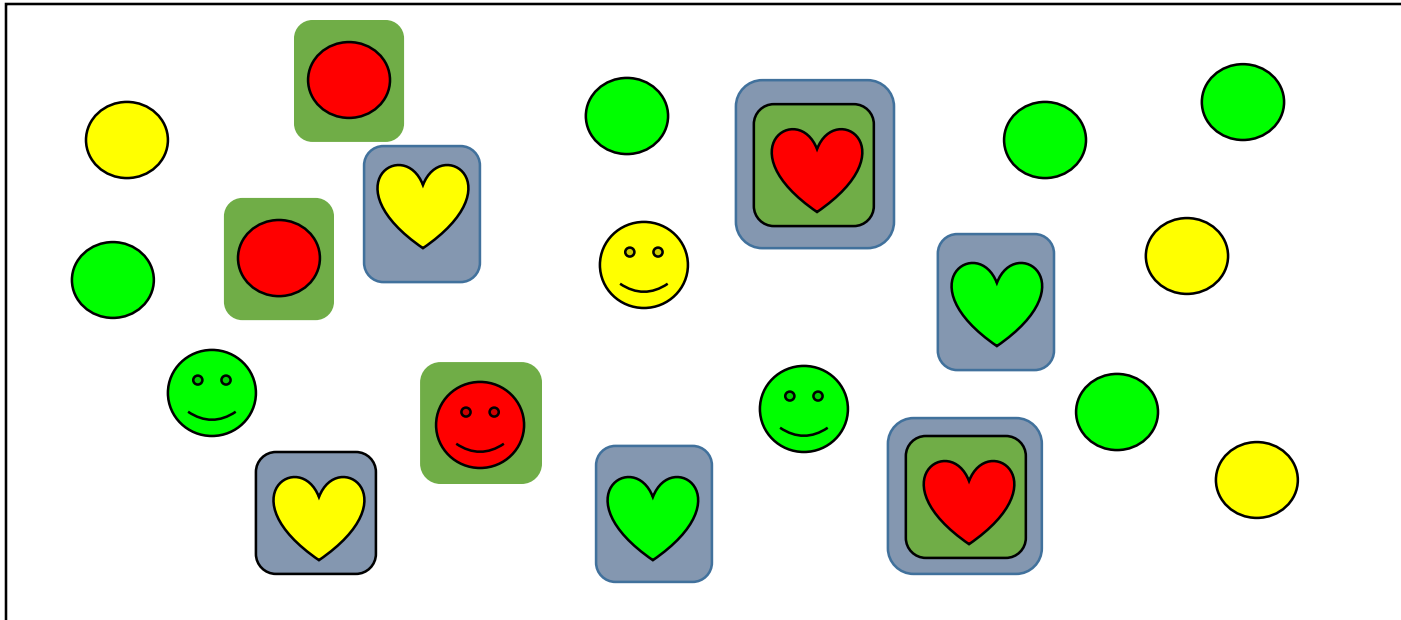
tj. pravděpodobnost jevu, za předpokladu, že nastal určitý jiný jev.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) \neq 0$$

$P(A|B)$ čti „pravděpodobnost jevu A za předpokladu, že nastal jev B “

Jestliže výskyt jevu A nezávisí na výskytu jevu B a zároveň výskyt jevu B nezávisí na výskytu jevu A , pak říkáme, že **jevy** A a B jsou **nezávislé**. Pak platí: $P(A|B) = P(A)$.

1. V urně je 20 různých útvarů (viz obrázek). Náhodně bude vybrán jeden z nich.



d) Určete $P(\textcolor{red}{C} \cup \heartsuit)$.

$$P(\textcolor{red}{C} \cup \heartsuit) = \frac{n_{\textcolor{red}{C}} + n_{\heartsuit} - n_{\textcolor{red}{C} \cap \heartsuit}}{n} = P(\textcolor{red}{C}) + P(\heartsuit) - P(\textcolor{red}{C} \cap \heartsuit)$$

Vybrané vlastnosti pravděpodobnosti

Nechť množina Ω obsahuje n elementárních jevů, nechť P je pravděpodobnost na této množině, A a B jevy. Potom platí :

1. $0 \leq P(A) \leq 1$

2. $P(\Omega) = 1; P(\emptyset) = 0$

3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

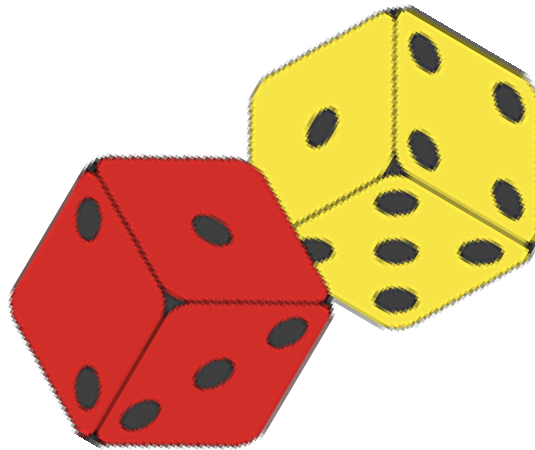
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- $A, B \dots$ **disjunktní jevy** $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

5. $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$

- $A, B \dots$ **nezávislé jevy** $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

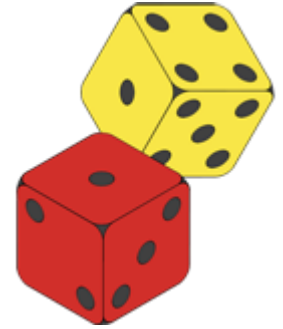
Modelové úlohy aneb hrátky s kostkami



2. Hodíme dvěma kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že součet bude 6?



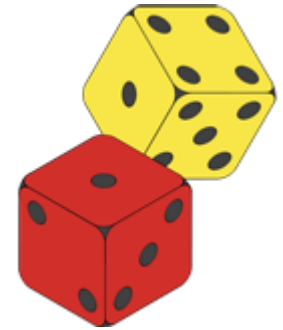
2. Hodíme dvěma kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že součet bude 6?



- S_6 ... součet ok na dvou kostkách bude 6 (*náhodný jev*)
- $P(S_6) = \frac{5}{36}$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

3. Hodíme dvěma kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že součet bude 6 a zároveň právě na jedné kostce padne 4?



- S_6 ... součet ok na dvou kostkách bude 6 (*náhodný jev*)
- V_4 ... právě na jedné kostce padne 4 (*náhodný jev*)
- $P(S_6 \cap V_4) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

3. Hodíme dvěma kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že součet bude 6 a zároveň právě na jedné kostce padne 4?



Jiný způsob řešení:

- S_6 ... součet ok na dvou kostkách bude 6 (*náhodný jev*)
- V_4 ... právě na jedné kostce padne 4 (*náhodný jev*)

• $P(S_6 \cap V_4) = ?$

• S_6, V_4 nejsou nezávislé jevy

$$P(S_6 \cap V_4) = P(S_6|V_4) \cdot P(V_4) = \frac{2}{10} \cdot \frac{10}{36} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

3. Hodíme dvěma kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že součet bude 6 a zároveň právě na jedné kostce padne 4?



Jiný způsob řešení (2):

- S_6 ... součet ok na dvou kostkách bude 6 (*náhodný jev*)
- V_4 ... právě na jedné kostce padne 4 (*náhodný jev*)

- $P(S_6 \cap V_4) = ?$

- S_6, V_4 nejsou nezávislé jevy

$$P(S_6 \cap V_4) = P(V_4|S_6) \cdot P(S_6)$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{36} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

4. Hodíme dvěma kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že součet bude 8 nebo alespoň na jedné kostce padne 6?



- S_8 ... součet ok na dvou kostkách bude 8 (*náhodný jev*)
- K_6 ... alespoň na jedné kostce padne 6 (*náhodný jev*)
- $P(S_8 \cup K_6) = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

4. Hodíme dvěma kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že součet bude 8 nebo alespoň na jedné kostce padne 6?



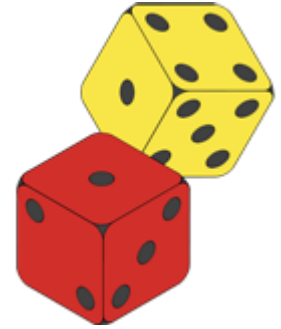
Jiný způsob řešení:

- $S8$... součet ok na dvou kostkách bude 8 (*náhodný jev*)
- $K6$... alespoň na jedné kostce padne 6 (*náhodný jev*)

$$\begin{aligned}
 & \bullet P(S8 \cup K6) = \\
 & = P(S8) + P(K6) - P(S8 \cap K6) \\
 & = \frac{5}{36} + \frac{11}{36} - \frac{2}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}
 \end{aligned}$$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

5. Hodíme dvěma kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň na jedné kostce padne lichý počet ok?

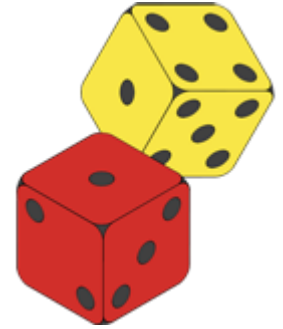


- A ... alespoň na jedné kostce padne lichý počet ok (*náhodný jev*)
- L_C ... na červené kostce padne lichý počet ok (*náhodný jev*)
- L_Z ... na žluté kostce padne lichý počet ok (*náhodný jev*)

- $P(A) = \frac{3}{4}$ (*klasická definice pravděpodobnosti*)

		$P(L_Z) = 0,5 \quad P(\overline{L_Z}) = 0,5$	
		L_Z	$\overline{L_Z}$
$P(L_C) = 0,5$	L_C	0,25	0,25
$P(\overline{L_C}) = 0,5$	$\overline{L_C}$	0,25	0,25

5. Hodíme dvěma kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň na jedné kostce padne lichý počet ok?



Obecně:

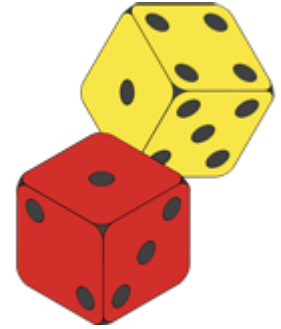
- A ... alespoň na jedné kostce padne lichý počet ok

(náhodný jev)

- L_C ... na červené kostce padne lichý počet ok (náhodný jev)
- L_Z ... na žluté kostce padne lichý počet ok (náhodný jev)
- $P(A) = P((L_C \cap \overline{L_Z}) \cup (\overline{L_C} \cap L_Z) \cup (L_C \cap L_Z)) = ?$

	L_Z	$\overline{L_Z}$
L_C	0,25	0,25
$\overline{L_C}$	0,25	0,25

5. Hodíme dvěma kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň na jedné kostce padne lichý počet ok?



Obecně:

- $P(A) = P((L_C \cap \overline{L_Z}) \cup (\overline{L_C} \cap L_Z) \cup (L_C \cap L_Z)) = \mathbf{0,75}$

- $(L_C \cap \overline{L_Z}), (\overline{L_C} \cap L_Z), (L_C \cap L_Z) \dots$ neslučitelné jevy, proto:

$$P((L_C \cap \overline{L_Z}) \cup (\overline{L_C} \cap L_Z) \cup (L_C \cap L_Z)) = P(L_C \cap \overline{L_Z}) + P(\overline{L_C} \cap L_Z) + P(L_C \cap L_Z)$$

- $L_C, L_Z \dots$ nezávislé jevy, proto:

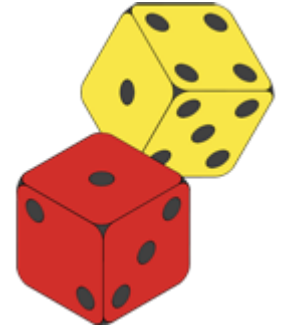
$$P(L_C \cap \overline{L_Z}) = P(L_C) \cdot P(\overline{L_Z}),$$

$$P(\overline{L_C} \cap L_Z) = P(\overline{L_C}) \cdot P(L_Z),$$

$$P(L_C \cap L_Z) = P(L_C) \cdot P(L_Z).$$

		$P(L_Z) = 0,5 \quad P(\overline{L_Z}) = 0,5$	
		L_Z	$\overline{L_Z}$
$P(L_C) = 0,5$	L_C	0,25	0,25
	$\overline{L_C}$	0,25	0,25
$P(\overline{L_C}) = 0,5$			

5. Hodíme dvěma kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň na jedné kostce padne lichý počet ok?

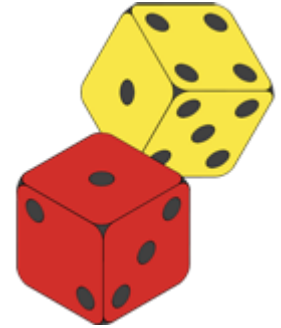


Jednodušeji:

- A ... alespoň na jedné kostce padne lichý počet ok (*náhodný jev*)
- $\bar{A}$... na žádné kostce nepadne lichý počet ok (*náhodný jev*)
- L_C ... na červené kostce padne lichý počet ok (*náhodný jev*)
- L_Z ... na žluté kostce padne lichý počet ok (*náh. jev*)
- $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{L}_C \cap \bar{L}_Z) = ?$

		$P(L_Z) = 0,5 \quad P(\bar{L}_Z) = 0,5$	
		L_Z	$\bar{L}_Z$
$P(L_C) = 0,5$	L_C	0,25	0,25
$P(\bar{L}_C) = 0,5$	$\bar{L}_C$	0,25	0,25

5. Hodíme dvěma kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň na jedné kostce padne lichý počet ok?



Jednodušeji:

- A ... alespoň na jedné kostce padne lichý počet ok (*náhodný jev*)
- $\bar{A}$... na žádné kostce nepadne lichý počet ok (*náhodný jev*)
- L_C ... na červené kostce padne lichý počet ok (*náhodný jev*)
- L_Z ... na žluté kostce padne lichý počet ok (*náh. jev*)
- $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{L}_C \cap \bar{L}_Z) = \mathbf{0,75}$

		$P(L_Z) = 0,5 \quad P(\bar{L}_Z) = 0,5$	
		L_Z	$\bar{L}_Z$
$P(L_C) = 0,5$	L_C	0,25	0,25
$P(\bar{L}_C) = 0,5$	$\bar{L}_C$	0,25	0,25

6. Hodíme dvakrát hrací kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň jednou padne lichý počet ok?



- A ... alespoň jednou padne lichý počet ok (*náhodný jev*)
- $\bar{A}$... ani jednou nepadne lichý počet ok (*náhodný jev*)
- L_1 ... při 1. hodu padne lichý počet ok (*náhodný jev*)
- L_2 ... při 2. hodu padne lichý počet ok (*náhodný jev*)
- $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{L}_1 \cap \bar{L}_2) = \mathbf{0,75}$

		$P(L_1) = 0,5 \quad P(\bar{L}_1) = 0,5$	
		L_1	$\bar{L}_1$
$P(L_2) = 0,5$ $P(\bar{L}_2) = 0,5$	L_2	0,25	0,25
	$\bar{L}_2$	0,25	0,25

6. Hodíme dvakrát hrací kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň jednou padne lichý počet ok? (Kostka je „cinknutá“ – pravděpodobnost, že na ní padne sudé číslo je 0,6.)



- A ... alespoň jednou padne lichý počet ok (*náhodný jev*)
- $\bar{A}$... ani jednou nepadne lichý počet ok (*náhodný jev*)
- L_1 ... při 1. hodu padne lichý počet ok (*náhodný jev*)
- L_2 ... při 2. hodu padne lichý počet ok (*náhodný jev*)
- $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{L}_1 \cap \bar{L}_2) = \mathbf{0,64}$

		$P(L_1) = 0,4 \quad P(\bar{L}_1) = 0,6$	
		L_1	$\bar{L}_1$
$P(L_2) = 0,4$	L_2	0,16	0,24
$P(\bar{L}_2) = 0,6$	$\bar{L}_2$	0,24	0,36

Variace na dané téma



7. Rodina má dvě děti.

A) Jaká je pravděpodobnost, že mají dvě dcery?

- D_1 ... první dítě je dcera (*náhodný jev*)
- S_1 ... první dítě je syn (*náhodný jev*)
- D_2 ... druhé dítě je dcera (*náhodný jev*)
- S_2 ... druhé dítě je syn (*náhodný jev*)
- Předpokládejme, že p-st narození syna je 0,5.
- $P(D_1) = P(S_1) = P(D_2) = P(S_2) = 0,5$
- $P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \cdot P(D_2) = \mathbf{0,25}$

	$P(D_1) = 0,5$ $P(S_1) = 0,5$	
	D_1	S_1
$P(D_2) = 0,5$	D_2	0,25
$P(S_2) = 0,5$	S_2	0,25

7. Rodina má dvě děti.

B) Jedno z dětí je dívka. Jaká je pravděpodobnost, že mají dvě dcery?

- D_1 ... první dítě je dcera (*náhodný jev*)
- S_1 ... první dítě je syn (*náhodný jev*)
- D_2 ... druhé dítě je dcera (*náhodný jev*)
- S_2 ... druhé dítě je syn (*náhodný jev*)
- D ... alespoň jedno z dětí je dívka (*náhodný jev*)

- Předpokládejme, že p-st narození syna je 0,5.

- $P(D_1) = P(S_1) = P(D_2) = P(S_2) = 0,5$

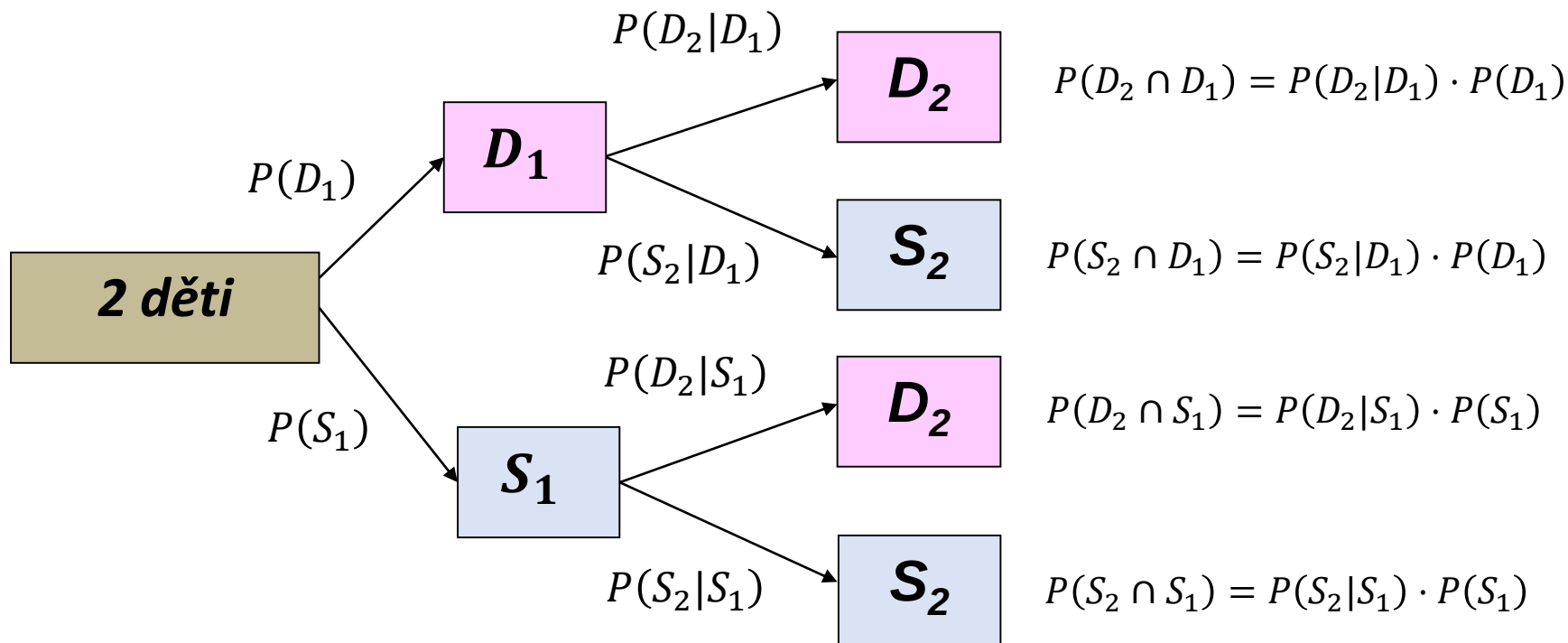
$$P(D_1 \cap D_2 | D) = \frac{P(D_1 \cap D_2 \cap D)}{P(D)} = \frac{0,25}{0,75} = \frac{1}{3}$$

	$P(D_1) = 0,5$	$P(S_1) = 0,5$
	D_1	S_1
$P(D_2) = 0,5$	D_2	0,25
$P(S_2) = 0,5$	S_2	0,25

7. Rodina má dvě děti.

B) Jedno z dětí je dívka. Jaká je pravděpodobnost, že mají dvě dcery?

Jiný způsob zápisu řešení:

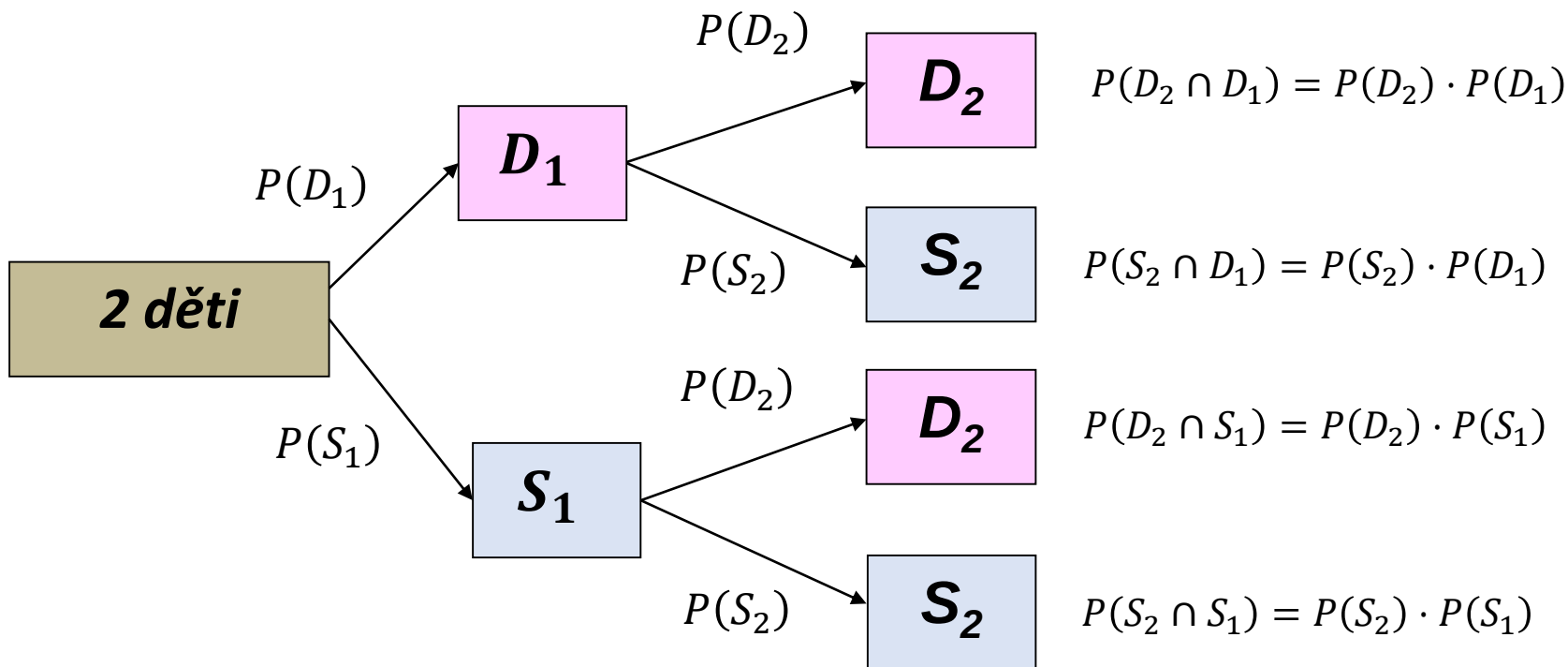


7. Rodina má dvě děti.

B) Jedno z dětí je dívka. Jaká je pravděpodobnost, že mají dvě dcery?

Jiný způsob zápisu řešení:

pohlaví druhého dítěte nezávisí na pohlaví prvního dítěte

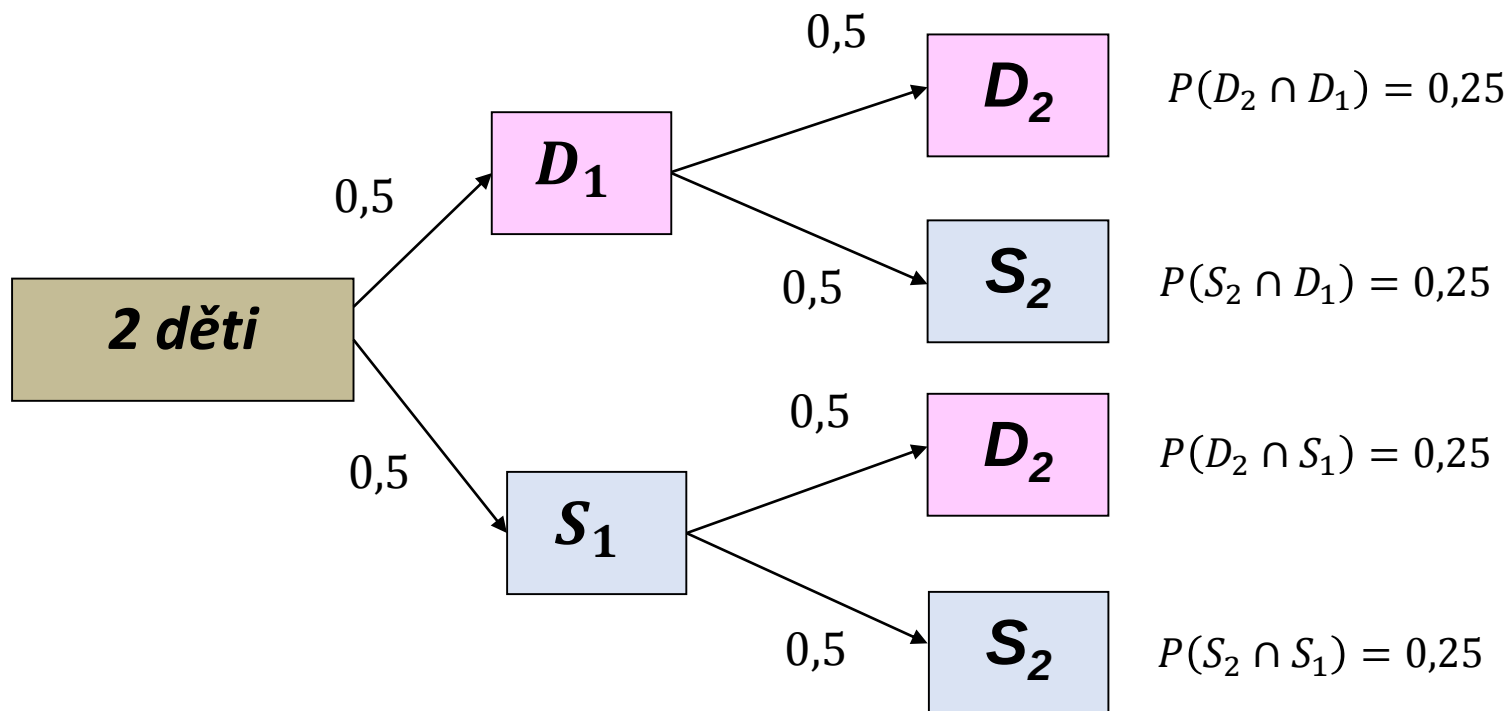


7. Rodina má dvě děti.

B) Jedno z dětí je dívka. Jaká je pravděpodobnost, že mají dvě dcery?

Jiný způsob zápisu řešení:

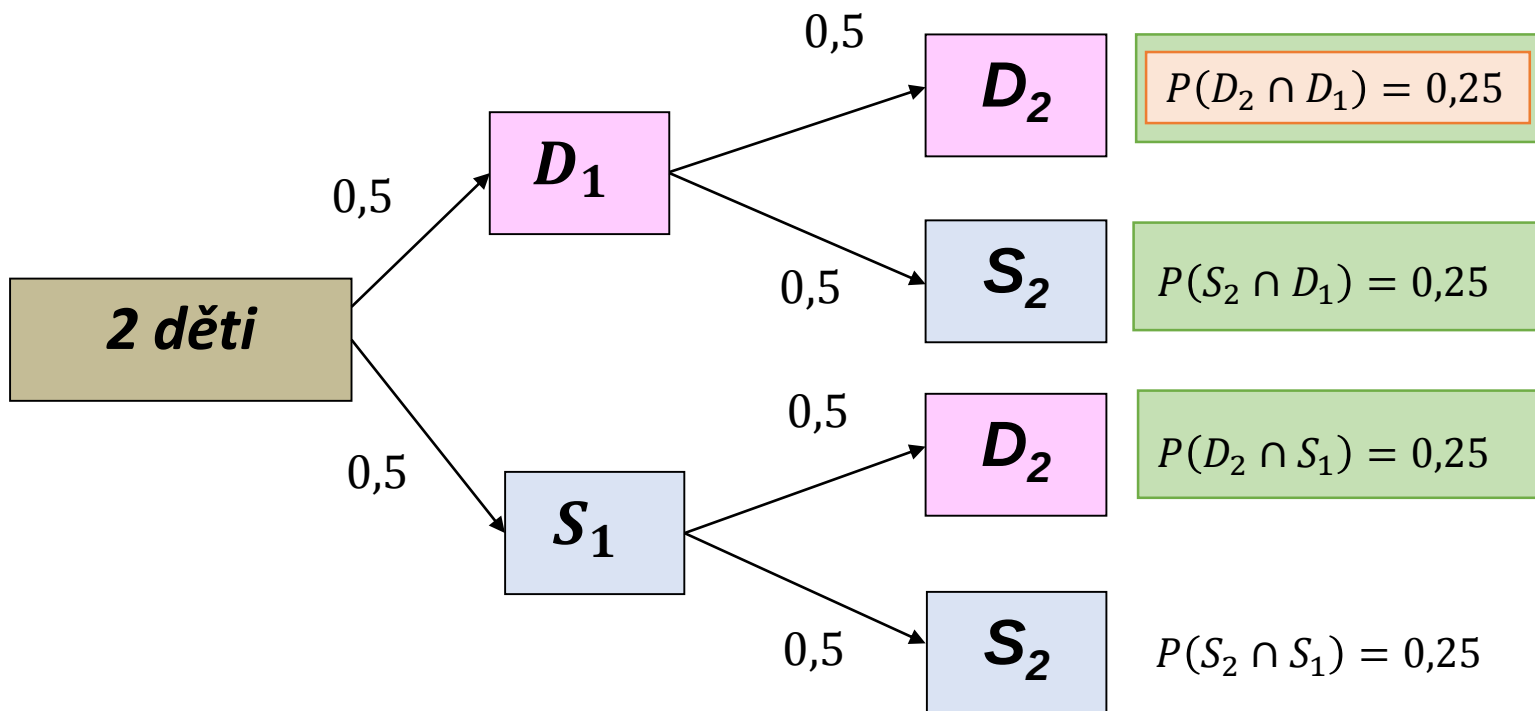
pohlaví druhého dítěte nezávisí na pohlaví prvního dítěte



7. Rodina má dvě děti.

B) Jedno z dětí je dívka. Jaká je pravděpodobnost, že mají dvě dcery?

Jiný způsob zápisu řešení:
$$P(D_1 \cap D_2 | D) = \frac{P(D_1 \cap D_2 \cap D)}{P(D)} = \frac{0,25}{0,25 + 0,25 + 0,25} = \frac{1}{3}$$



7. Rodina má dvě děti.

C) Jedno z dětí se jmenuje Kleopatra. Jaká je pravděpodobnost, že mají dvě dcery?

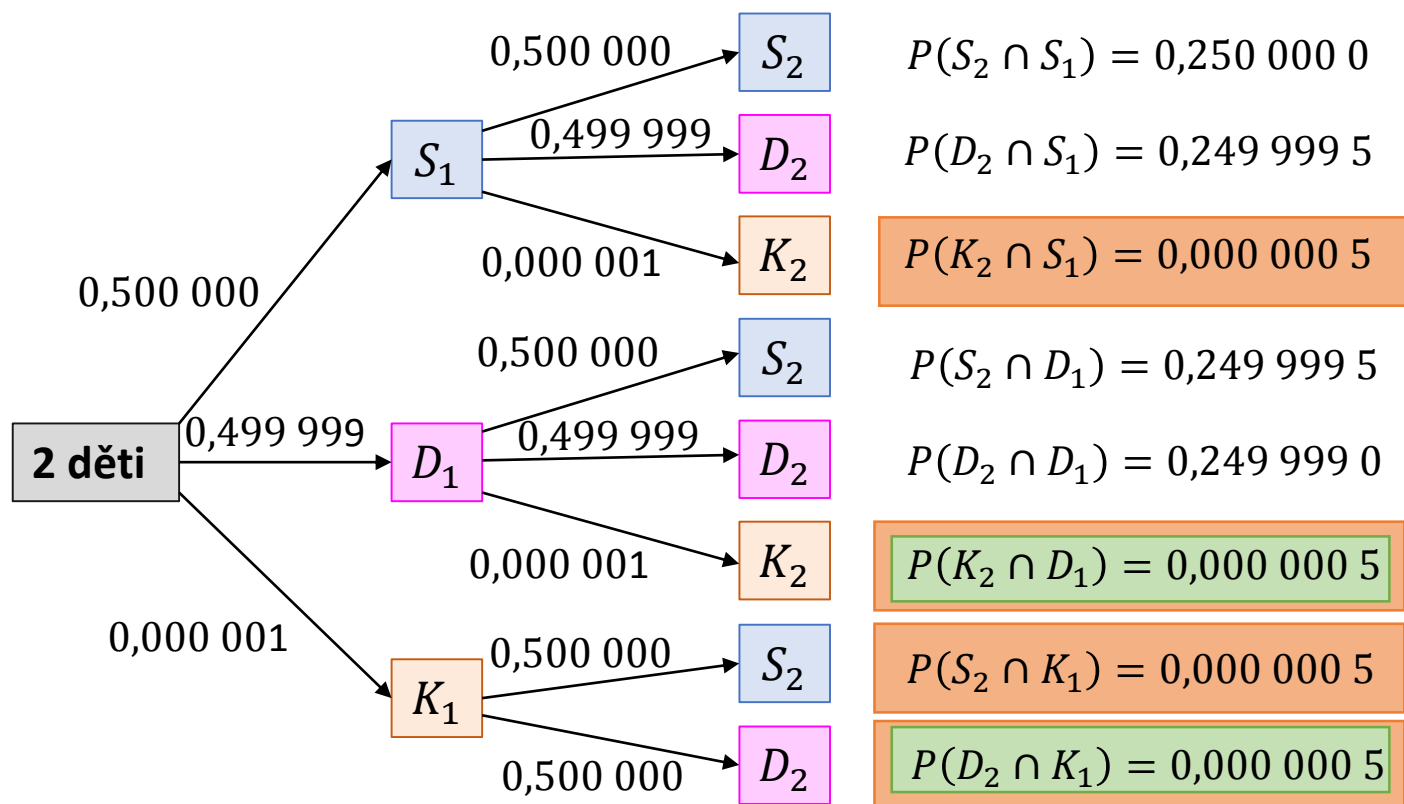
- K_1 ... první dítě je dcera, která se jmenuje Kleopatra (*náhodný jev*)
- D_1 ... první dítě je dcera, která se nejmenuje Kleopatra (*náhodný jev*)
- S_1 ... první dítě je syn (*náhodný jev*)
- K_2 ... druhé dítě je dcera, která se jmenuje Kleopatra (*náhodný jev*)
- D_2 ... druhé dítě je dcera, která se nejmenuje Kleopatra (*náhodný jev*)
- S_2 ... druhé dítě je syn (*náhodný jev*)
- Předpokládejme, že p-st narození syna je 0,5.
- Dle MVČR (kdejsme.cz) a ČSÚ: $P(K_1) = P(K_2) = \frac{12}{10\,553\,843} \approx 0,000\,001$
- § 62 odst. 1 zákona o matrikách: „Matriční úřad nezapíše jméno, pokud je mu známo, že toto jméno užívá žijící sourozenec, mají-li sourozenci společné rodiče.“

7. Rodina má dvě děti.

C) Jedno z dětí se jmenuje Kleopatra. Jaká je pravděpodobnost, že mají dvě dcery?

$$P(\text{"dvě dcery"} | \text{"Kleopatra"}) = \frac{P(\text{"dvě dcery a jedna z nich je Kleopatra"})}{P(\text{"Kleopatra"})} =$$

$$= \frac{0,000\,000\,5 + 0,000\,000\,5}{0,000\,000\,5 + 0,000\,000\,5 + 0,000\,000\,5 + 0,000\,000\,5} = \frac{1}{2}$$



ŠKOMAM CUP

Předpokládejme, že test na zjištění drog má senzitivitu 99% a specificitu 95%. To znamená, že **test správně identifikuje skutečného uživatele drog v 99% případů** a že **test vyloučí osobu, která drogy neužívá rovněž v 95% případů**.

Předpokládejme, že ve škole, která se rozhodla testovat své studenty na užívání drog je prevalence 0,5%. Tj. jen **0,5% ze všech studentů drogy skutečně bere**. Student Fajfka měl test pozitivní.

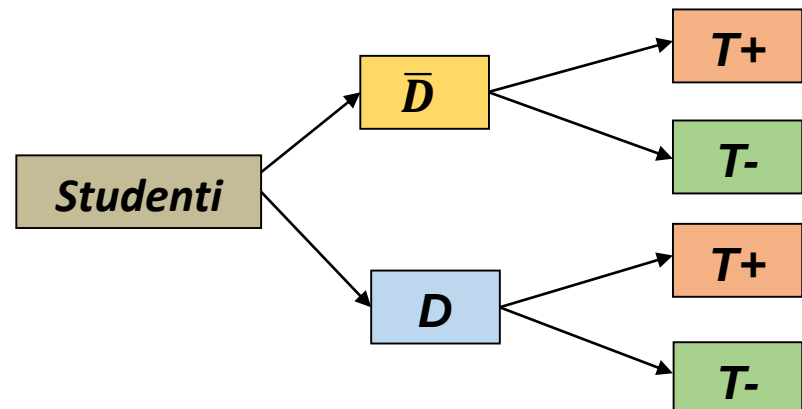
Jaká je pravděpodobnost, že student Fajfka skutečně užívá drogy?

Nápověda:

D ... student bere drogy

$T+$... test je pozitivní

$T-$... test je negativní



A to už je opravdu konec!

Děkuji za pozornost