

Jak proložit přímku ?

Petr Vodstrčil

`petr.vodstrcil@vsb.cz`

Katedra aplikované matematiky, Fakulta elektrotechniky a informatiky,
Vysoká škola báňská–Technická univerzita Ostrava



Ostrava, 2.2. 2016

(ŠKOMAM 2016)

Příklad (Kvadratická funkce jedné proměnné)

Pro jaké $a \in \mathbb{R}$ je výraz

$$2a^2 - 6a + 1$$

minimální?

Příklad (Kvadratická funkce jedné proměnné)

Pro jaké $a \in \mathbb{R}$ je výraz

$$2a^2 - 6a + 1$$

minimální?

$$\left[a = \frac{3}{2} \right]$$

Příklad (Kvadratická funkce jedné proměnné)

Pro jaké $a \in \mathbb{R}$ je výraz

$$2a^2 - 6a + 1$$

minimální?

$$\left[a = \frac{3}{2} \right]$$

Příklad (Kvadratická funkce dvou proměnných)

Pro kterou dvojici $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ je výraz

$$2a^2 + 21b^2 + 12ab - 20a - 72b + 11$$

minimální?

Příklad (Kvadratická funkce jedné proměnné)

Pro jaké $a \in \mathbb{R}$ je výraz

$$2a^2 - 6a + 1$$

minimální?

$$\left[a = \frac{3}{2} \right]$$

Příklad (Kvadratická funkce dvou proměnných)

Pro kterou dvojici $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ je výraz

$$2a^2 + 21b^2 + 12ab - 20a - 72b + 11$$

minimální?

$$\left[a = -1, b = 2 \right]$$

Uvažujme body $B_1 = [x_1, y_1]$, $B_2 = [x_2, y_2]$, \dots , $B_n = [x_n, y_n]$ v rovině. Těmito body budeme chtít proložit tzv. regresní přímku. To je přímka, která co nejlépe „kopíruje“ zadané body.

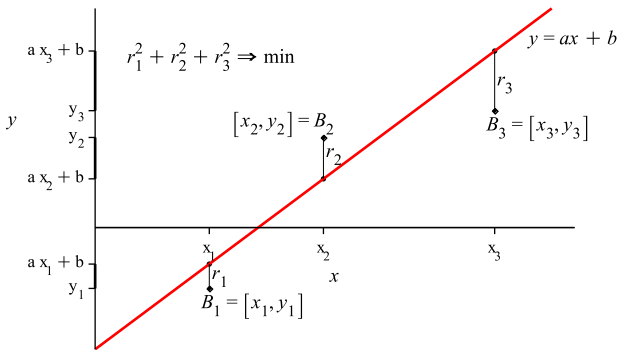
Uvažujme body $B_1 = [x_1, y_1]$, $B_2 = [x_2, y_2]$, \dots , $B_n = [x_n, y_n]$ v rovině. Těmito body budeme chtít proložit tzv. regresní přímku. To je přímka, která co nejlépe „kopíruje“ zadané body.

Rovnice takovéto přímky je $y = ax + b$, přičemž koeficienty $a, b \in \mathbb{R}$ volíme tak, aby výraz $\sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$ byl minimální (metoda nejmenších čtverců).

Uvažujme body $B_1 = [x_1, y_1]$, $B_2 = [x_2, y_2]$, \dots , $B_n = [x_n, y_n]$ v rovině. Těmito body budeme chtít proložit tzv. regresní přímku. To je přímka, která co nejlépe „kopíruje“ zadané body.

Rovnice takovéto přímky je $y = ax + b$, přičemž koeficienty $a, b \in \mathbb{R}$ volíme tak, aby výraz $\sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$ byl minimální (metoda nejmenších čtverců).

Pro $n = 3$ je situace znázorněna na následujícím obrázku.



Poznámka

Danými body $B_1 = [x_1, y_1]$, $B_2 = [x_2, y_2]$, \dots , $B_n = [x_n, y_n]$ nemusíme vždy prokládat jenom přímkou $y = ax + b$. Např. je možné těmito body proložit přímkou $y = ax$ (procházející počátkem), popř. parabolou, exponenciálu, logaritmickou funkci, apod.

Poznámka

Danými body $B_1 = [x_1, y_1], B_2 = [x_2, y_2], \dots, B_n = [x_n, y_n]$ nemusíme vždy prokládat jenom přímkou $y = ax + b$. Např. je možné těmito body proložit přímkou $y = ax$ (procházející počátkem), popř. parabolou, exponenciálu, logaritmickou funkci, apod.

- V případě, že danými body chceme proložit přímkou $y = ax$, musíme koeficient a zvolit tak, aby byl výraz $\sum_{i=1}^n (ax_i - y_i)^2$ minimální.

Poznámka

Danými body $B_1 = [x_1, y_1], B_2 = [x_2, y_2], \dots, B_n = [x_n, y_n]$ nemusíme vždy prokládat jenom přímkou $y = ax + b$. Např. je možné těmito body proložit přímkou $y = ax$ (procházející počátkem), popř. parabolou, exponenciálu, logaritmickou funkci, apod.

- V případě, že danými body chceme proložit přímkou $y = ax$, musíme koeficient a zvolit tak, aby byl výraz $\sum_{i=1}^n (ax_i - y_i)^2$ minimální.
- Chceme-li našimi body proložit parabolou $y = ax^2 + bx + c$, zvolíme koeficienty a, b, c tak, aby výraz $\sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$ byl minimální.

Poznámka

Danými body $B_1 = [x_1, y_1], B_2 = [x_2, y_2], \dots, B_n = [x_n, y_n]$ nemusíme vždy prokládat jenom přímkou $y = ax + b$. Např. je možné těmito body proložit přímkou $y = ax$ (procházející počátkem), popř. parabolou, exponenciálu, logaritmickou funkci, apod.

- V případě, že danými body chceme proložit přímkou $y = ax$, musíme koeficient a zvolit tak, aby byl výraz $\sum_{i=1}^n (ax_i - y_i)^2$ minimální.
- Chceme-li našimi body proložit parabolou $y = ax^2 + bx + c$, zvolíme koeficienty a, b, c tak, aby výraz $\sum_{i=1}^n (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$ byl minimální.

My však budeme zadanými body prokládat výhradně přímkou. Nejprve si ukážeme, jak proložit přímkou $y = ax$ (procházející počátkem). Poté zkusíme proložit i přímkou v obecné poloze, tj. přímkou o rovnici $y = ax + b$.

Příklad

Jsou dány body $B_1 = [1, -1]$, $B_2 = [2, 3]$, $B_3 = [3, 4]$. Najděte regresní přímku procházející počátkem.

Příklad

Jsou dány body $B_1 = [1, -1]$, $B_2 = [2, 3]$, $B_3 = [3, 4]$. Najděte regresní přímku procházející počátkem.

Řešení.

Přímka procházející počátkem má rovnici $y = ax$. Podle předchozího hledáme koeficient $a \in \mathbb{R}$ takový, aby výraz

$$\sum_{i=1}^3 (ax_i - y_i)^2 = (a + 1)^2 + (2a - 3)^2 + (3a - 4)^2 = 14a^2 - 34a + 26$$

byl minimální.

Příklad

Jsou dány body $B_1 = [1, -1]$, $B_2 = [2, 3]$, $B_3 = [3, 4]$. Najděte regresní přímku procházející počátkem.

Řešení.

Přímka procházející počátkem má rovnici $y = ax$. Podle předchozího hledáme koeficient $a \in \mathbb{R}$ takový, aby výraz

$$\sum_{i=1}^3 (ax_i - y_i)^2 = (a + 1)^2 + (2a - 3)^2 + (3a - 4)^2 = 14a^2 - 34a + 26$$

byl minimální. To je však kvadratická funkce, kterou můžeme upravit na čtverec, tj.

$$\begin{aligned} 14a^2 - 34a + 26 &= 14 \left(a^2 - \frac{17}{7}a + \frac{13}{7} \right) = \\ &= 14 \left[\left(a - \frac{17}{14} \right)^2 - \left(\frac{17}{14} \right)^2 + \frac{13}{7} \right] = 14 \left(a - \frac{17}{14} \right)^2 + \frac{75}{14}. \end{aligned}$$

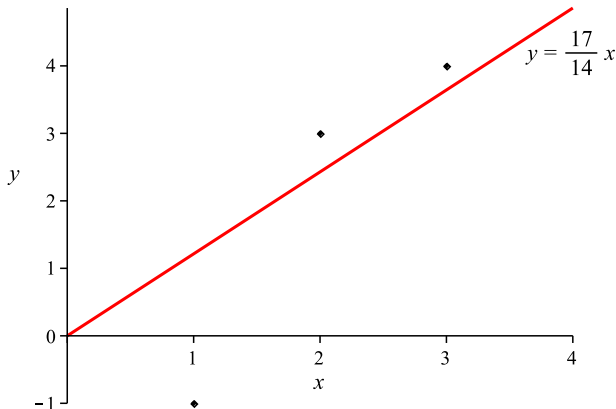
Řešení.

Vidíme tedy, že výraz je minimální pro $a = \frac{17}{14}$ a hledaná regresní přímka má rovnici $y = \frac{17}{14}x$. □

Řešení.

Vidíme tedy, že výraz je minimální pro $a = \frac{17}{14}$ a hledaná regresní přímka má rovnici $y = \frac{17}{14}x$. □

Situace je znázorněna na následujícím obrázku.



Poznámka (Zobecnění pro n bodů)

Je-li dáno n bodů $B_1 = [x_1, y_1], B_2 = [x_2, y_2], \dots, B_n = [x_n, y_n]$, pak regresní přímka procházející počátkem má rovnici

$$y = ax,$$

kde

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Příklad

Jsou dány body $B_1 = [1, -1]$, $B_2 = [2, 3]$, $B_3 = [3, 4]$ (stejně jako v předchozím příkladu). Najděte regresní přímku $y = ax + b$.

Příklad

Jsou dány body $B_1 = [1, -1]$, $B_2 = [2, 3]$, $B_3 = [3, 4]$ (stejně jako v předchozím příkladu). Najděte regresní přímku $y = ax + b$.

Řešení.

Rovnice hledané přímky je $y = ax + b$. Koeficienty $a, b \in \mathbb{R}$ přitom musíme zvolit tak, aby výraz

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 (ax_i + b - y_i)^2 &= (a + b + 1)^2 + (2a + b - 3)^2 + (3a + b - 4)^2 = \\ &= 14a^2 + 3b^2 + 12ab - 34a - 12b + 26 \end{aligned}$$

byl minimální. Upravíme-li tento výraz na čtverec, dostaneme:

Řešení.

$$\begin{aligned}14a^2 + 3b^2 + 12ab - 34a - 12b + 26 &= (3b^2 + 12ab - 12b) + \\ &+ (14a^2 - 34a + 26) = 3(b^2 + b(4a - 4)) + (14a^2 - 34a + 26) = \\ &= 3 \left[(b + (2a - 2))^2 - (2a - 2)^2 \right] + (14a^2 - 34a + 26) = \\ &= 3(b + 2a - 2)^2 - 3(2a - 2)^2 + (14a^2 - 34a + 26) = \\ &= 3(b + 2a - 2)^2 + (2a^2 - 10a + 14) = 3(b + 2a - 2)^2 + 2(a^2 - 5a + 7) = \\ &= 3(b + 2a - 2)^2 + 2 \left[\left(a - \frac{5}{2} \right)^2 - \left(\frac{5}{2} \right)^2 + 7 \right] = \\ &= 3(b + 2a - 2)^2 + 2 \left(a - \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Řešení.

$$\begin{aligned}14a^2 + 3b^2 + 12ab - 34a - 12b + 26 &= (3b^2 + 12ab - 12b) + \\ &+ (14a^2 - 34a + 26) = 3(b^2 + b(4a - 4)) + (14a^2 - 34a + 26) = \\ &= 3 \left[(b + (2a - 2))^2 - (2a - 2)^2 \right] + (14a^2 - 34a + 26) = \\ &= 3(b + 2a - 2)^2 - 3(2a - 2)^2 + (14a^2 - 34a + 26) = \\ &= 3(b + 2a - 2)^2 + (2a^2 - 10a + 14) = 3(b + 2a - 2)^2 + 2(a^2 - 5a + 7) = \\ &= 3(b + 2a - 2)^2 + 2 \left[\left(a - \frac{5}{2} \right)^2 - \left(\frac{5}{2} \right)^2 + 7 \right] = \\ &= 3(b + 2a - 2)^2 + 2 \left(a - \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Tento výraz je zřejmě minimální, pokud $(b + 2a - 2) = 0$ a $(a - \frac{5}{2}) = 0$, odkud $a = \frac{5}{2}$ a $b = -3$.

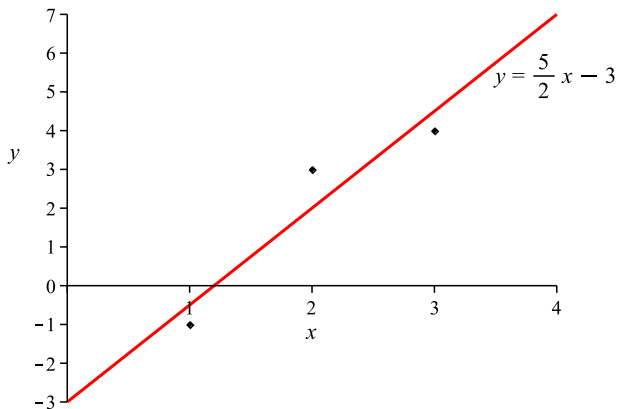
Řešení.

Hledaná regresní přímka má rovnici $y = \frac{5}{2}x - 3$.

Řešení.

Hledaná regresní přímka má rovnici $y = \frac{5}{2}x - 3$.

Celou situaci opět vystihuje obrázek.



Poznámka (Zobecnění pro n bodů)

Je-li dáno n bodů $B_1 = [x_1, y_1], B_2 = [x_2, y_2], \dots, B_n = [x_n, y_n]$, pak regresní přímka má rovnici

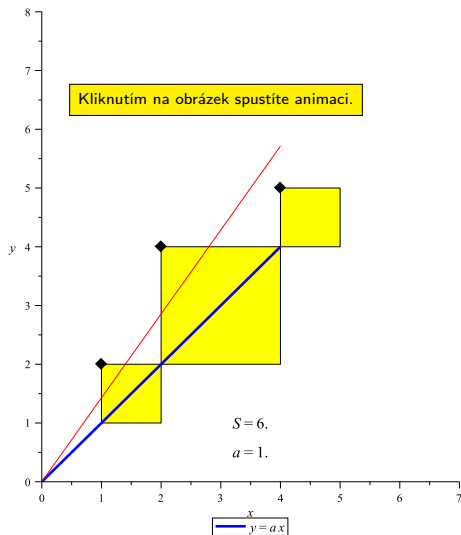
$$y = ax + b,$$

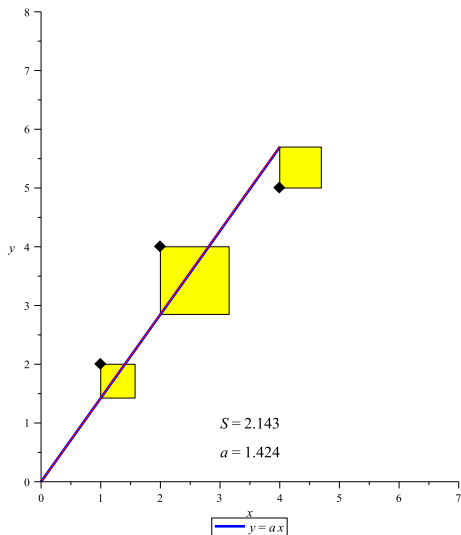
kde

$$a = \frac{n \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)}{n \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

a

$$b = \frac{\left(\sum_{i=1}^n y_i \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)}{n \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}.$$





Jsou dány body

$$A = \left[\frac{\pi}{6}, 1 \right] \quad \text{a} \quad B = \left[\frac{\pi}{2}, 1 \right].$$

Nalezněte takové číslo $k \in \mathbb{R}$, aby graf funkce $f(x) = k \sin x$ co nejlépe „kopíroval“ zadané body.

Jsou dány body

$$A = \left[\frac{\pi}{6}, 1 \right] \quad \text{a} \quad B = \left[\frac{\pi}{2}, 1 \right].$$

Nalezněte takové číslo $k \in \mathbb{R}$, aby graf funkce $f(x) = k \sin x$ co nejlépe „kopíroval“ zadané body.

Řešení

Musíme minimalizovat výraz

$$\begin{aligned} & \left(k \sin \frac{\pi}{6} - 1 \right)^2 + \left(k \sin \frac{\pi}{2} - 1 \right)^2 = \left(\frac{k}{2} - 1 \right)^2 + (k - 1)^2 = \\ & = \frac{k^2}{4} - k + 1 + k^2 - 2k + 1 = \frac{5}{4}k^2 - 3k + 2 = \frac{5}{4} \left[k^2 - \frac{12}{5}k + \frac{8}{5} \right] = \\ & = \frac{5}{4} \left[\left(k - \frac{6}{5} \right)^2 + \frac{4}{25} \right]. \quad \text{Odtud je vidět, že je potřeba položit } k = \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

Děkuji za pozornost !!!