

Interaktivní 3D grafika generovaná programem Asymptote pro podporu výuky diferenciálního počtu funkcí více proměnných

Autor: Bc. Ladislav Foltyn

Vedoucí: RNDr. Petra Vondráková, Ph.D.

Oponent: Ing. Petr Beremlijski, Ph.D.

23. ledna 2014

1 Úvod

- O bakalářské práci

2 Asymptote

- O programu
- Ukázka kódu
- Interaktivní grafika

3 Diferenciální počet

- Vybrané partie
- Reálné funkce dvou reálných proměnných
- Parciální a směrové derivace
- Diferenciál
- Taylorův mnohočlen
- Lokální extrémy

4 Závěr

- WWW stránky
- Shrnutí

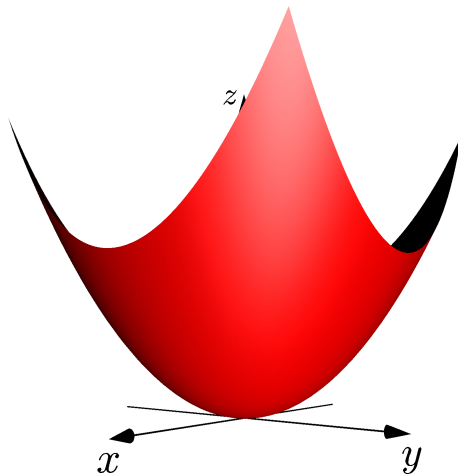
- Co bylo cílem při tvorbě bakalářské práce?
- Výhody 3D grafiky?
- Možné nevýhody 3D grafiky?
- Jaké prostředky byly zapotřebí při její realizaci?

O programu Asymptote

- Generátor vektorové 2D a interaktivní 3D grafiky
- Syntaxe založená na C++
- Kompatibilní s OS MacOS, Microsoft Windows, UNIX
- Možnost vkládání grafiky do dokumentu

Kód Asymptote se vkládá do prostředí:

```
1> \begin{asy}
2>     import graph3;
3>     size(175,keepAspect=false);
4>     real f(pair z){ real x=z.x, y=z.y;
5>                     return x^2+y^2; }
6>     draw(surface(f,(-2,-2),(2,2),
7>                 xsplinetype=Spline),red);
8>     xaxis3("$x$",-2,2,Arrow3);
9>     yaxis3("$y$",-2,2,Arrow3);
10>    zaxis3("$z$",0,9,Arrow3);
11> \end{asy}
```



Obrázek : Ukázka grafiky

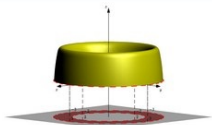
Výstupem je 15 řešených příkladů k následujícím tématům:

- Reálné funkce dvou reálných proměnných
- Parciální a směrové derivace
- Diferenciál
- Taylorův mnohočlen
- Lokální extrémy

Funkce dvou proměnných

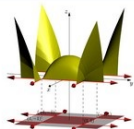
Příklad 1.

Určete a zakreslete definiční obor funkce $f(x, y) = \ln((9 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4))$.



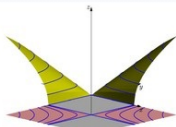
Příklad 2.

Určete a zakreslete definiční obor funkce $f(x, y) = \sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)}$.



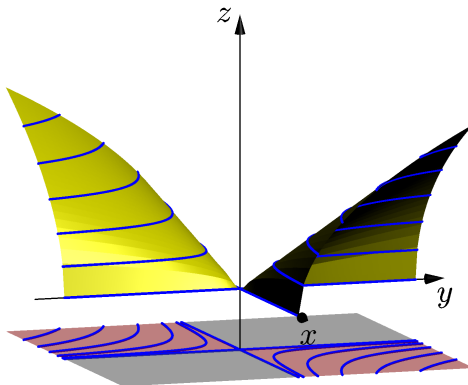
Příklad 3.

Určete rovnice vrstevnic funkce $f(x, y) = \sqrt{xy}$ a znázorněte vrstevnice vzniklé průnikem rovin $f(x, y) = c, c = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.



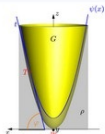
Reálné funkce dvou reálných proměnných - Vrstevnice funkce

- Předpis funkce: $f(x, y) = \sqrt{xy}$



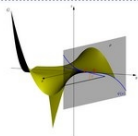
Obrázek : Vrstevnice funkce $f(x, y)$

Parciální a směrové derivace



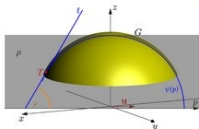
Příklad 1.

Uvažujte funkci $f(x, y) = x^2 + y^2$. Vypočítejte první parciální derivace funkce $f(x, y)$ v bodě $(x_0, y_0) = (2, 1)$.



Příklad 2.

Nechť je dána funkce $f(x, y) = \frac{1}{4}x^3y^2 - \frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{4}xy$. Vypočítejte první parciální derivace funkce $f(x, y)$ v bodě $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

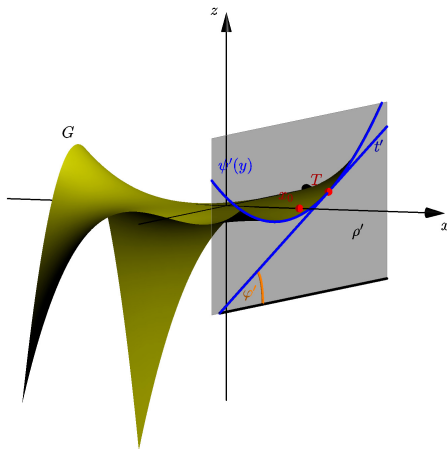


Příklad 3.

Nechť je dána funkce $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Vypočítejte derivaci funkce $f(x, y)$ v bodě $(x_0, y_0) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ ve směru jednotkového vektoru $\mathbf{u} = \frac{(-2, 1)}{\|(-2, 1)\|}$.

Parciální derivace funkce podle proměnné y

- Předpis funkce: $f(x, y) = \frac{1}{4}x^3y^2 - \frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{4}xy$, Bod: $T = (1, 1, \frac{3}{10})$

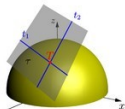


Obrázek : Derivace $f(x, y)$ podle y

Diferenciál

Příklad 1.

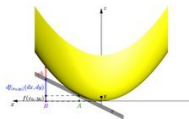
Najděte rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ v bodě $T = (1, -2, ?)$.



Příklad 2.

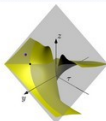
a) Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2$ v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) = (1, 0, \frac{1}{2})$.

b) Pomocí diferenciálu vypočítejte přibližně $f(x, y) = \frac{1}{2}(2,5)^2 + (-0,25)^2$.



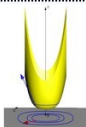
Příklad 3.

Pomocí diferenciálu vypočítejte přibližně $\arctg\left(\frac{1,49}{0,85}\right)$.



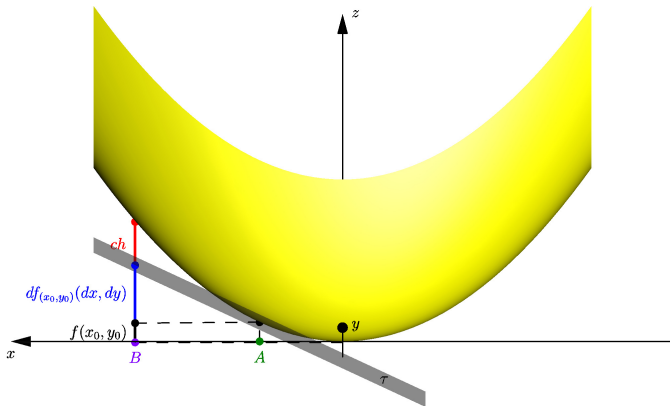
Příklad 4.

Je zadána funkce $f(x, y) = \frac{1}{5}x^4 + \frac{1}{5}x^2y^2 + \frac{1}{5}y^4$. Najděte jednotkový vektor $\mathbf{u}$, pro nějž je směrová derivace funkce $f(x, y)$ v bodě $(x_0, y_0) = (1, 1)$ maximální a určete její hodnotu.



Diferenciál - výpočet přibližné hodnoty funkce

- Předpis funkce: $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2$, bod: $B = (2, 5; -0,25)$



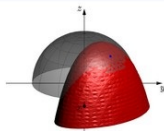
Obrázek : Diferenciál

Taylorův (polynom) mnohočlen



Příklad 1.

Najděte Taylorův mnohočlen prvního, druhého, třetího a čtvrtého řádu funkce $f(x, y) = \sin x \sin y$ se středem v bodě $S = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

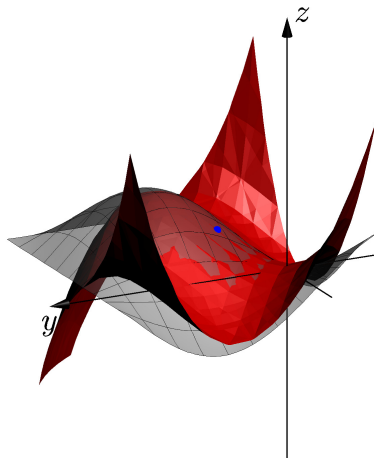


Příklad 2.

Najděte Taylorův mnohočlen prvního, druhého, třetího a čtvrtého řádu funkce $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ se středem v bodě $S = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Taylorův mnohočlen

- Předpis funkce: $f(x, y) = \sin x \sin y$, střed: $S = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

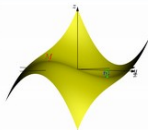


Obrázek : Taylorův mnohočlen 4. řádu

Lokální extrémy

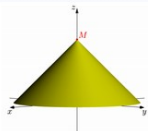
Příklad 1.

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = \frac{27}{10}x^2y + \frac{14}{10}y^3 - \frac{69}{10}y - \frac{54}{10}x$.



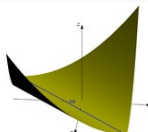
Příklad 2.

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.



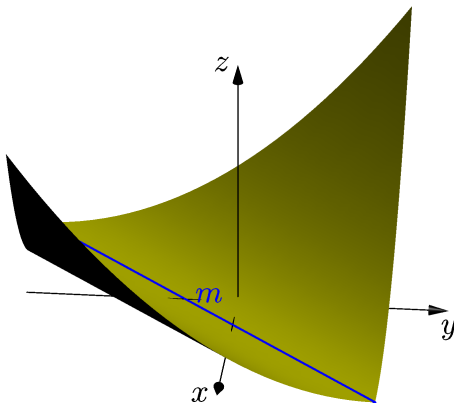
Příklad 3.

Najděte lokální extrémy funkce $f(x, y) = \frac{1}{10}(x - y - 1)^2$.



Lokální extrémy

- Předpis funkce: $f(x, y) = \frac{1}{10} (x - y - 1)^2$



Obrázek : Graf funkce $f(x, y)$ s extrémem

- Práce je umístěna na <http://homel.vsb.cz/~fol0037/>
- Lepší dostupnost
- Členění stránek je shodné s členěním bakalářské práce
- Příklady jsou rozděleny do jednotlivých PDF

VYBRANÉ PARTIE Z DIFERENCIÁLNÍHO POČTU FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

[ÚVOD](#)[ASYMPTOTE](#)[DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH](#)[KONTAKT](#)

Vítejte

Tyto webové stránky vznikly jako součást bakalářské práce. Účelem těchto stránek je umožnění přístupu k jednotlivým dokumentům ze všech koutů světa. Kdokoliv může navštívit tyto stránky a použít zde uložené dokumenty pro obohacení svých znalostí v oblasti diferenciálního počtu funkcí více proměnných.

Jak už bylo prozrazeno, tyto webové stránky obsahují dokumenty, které se týkají diferenciálního počtu funkcí více proměnných. Jedná se ovšem pouze o vybrané kapitoly a to:

- Funkce více proměnných - dva příklady jsou zaměřené na určování definičního oboru funkce dvou proměnných a jeden příklad na nalezení vrstevnic funkce.
- Parciální a směrové derivace - dva příklady jsou věnované parciálním derivacím a jeden příklad směrové derivaci.
- Diferenciál - jeden příklad je určen pro hledání tečné roviny, další dva příklady pro výpočet přibližné hodnoty pomocí diferenciálu a poslední čtvrtý příklad používá na vztah mezi gradientem a diferenciálem.
- Taylorův mnohočlen - dva příklady na jeho nalezení.
- Lokální extrémy - celkem tři příklady, ve kterých je pokaždé použit jiný způsob výpočtu.

Jeden dokument představuje jeden příklad. Příklady jsou navíc obohaceny o interaktivní 3D grafiku, která napomáhá pochopit, jaký je vlastně geometrický význam toho, co je v jednotlivých příkladech řešeno.

Pro ty zvědavější z vás je na tomto webu umístěn také dokument zabývající se programem Asymptote, díky kterému byla vytvořena ona interaktivní 3D grafika. V tomto dokumentu jsou uvedeny funkce používané pro zhotovení bakalářské práce. Dokument obsahuje deklaraci jednotlivých vykreslovacích funkcí, názorné ukázky použití těchto funkcí v kódu a výsledné obrázky příslušící jednotlivým kódům.

Vzorce, které naleznete na stránkách příkladů diferenciálního počtu, jsou vsázeny pomocí **javascript**. Jedná se o stejnou sazbu jako v **LaTeX**. Více informací naleznete na: <http://docs.mathjax.org/en/latest/start.html#mathjax-cdn>

CREATED BY LADISLAV FOLTYN

VYBRANÉ PARTIE Z DIFERENCIÁLNÍHO POČTU FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

ÚVOD

ASYMPTOTE

DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

KONTAKT

Asymptote



Program **Asymptote** je volně šiřitelný (nebo-li open-source), který umí velice kvalitně generovat **vektorovou 2D** a **interaktivní 3D** grafiku. **Asymptote** v roce 2004 vytvořili Andy Hammerlindl, John Bowman a Tom Prince. Vývoj **Asymptote** byl inspirován programem **MetaPost**, jehož autorem je John D. Hobby. **Asymptote** byl totiž původně smýšlen jako alternativa k **MetaPost**. Řekněme si tedy v bodech, co je pro **Asymptote** charakteristické:

- jedná se o kvalitní program pro tvorbu vektorové **2D** a **3D** grafiky,
- jeho syntaxe vychází z jazyka **C++**,
- oproti **MetaPost** je vybaven lepší syntaxí, přesnějšími výpočty v plovoucí desetinné čárce a tvorbou interaktivní **3D** grafiky,
- nejedná se pouze o generátor **2D** a **3D** grafiky, ale také o samostatný programovací jazyk,
- je kompatibilní se všemi operačními systémy, tj. s OS **Microsoft Windows**, **UNIX** a **MacOS**,
- součástí instalace je i uživatelské rozhraní **Xasy**. Bohužel se toto GUI hodí spíše jen pro doladování obrázků (přidání nějaké křivky, přímky či popisku), ne pro jejich tvorbu,
- je možné vkládat zdrojový kód grafiky **Asymptote** přímo do kódu **LaTeX** u a vytvořit tak grafiku, která je nedílnou součástí dokumentu,
- podporuje výstupní formáty **PDF**, **EPS**, **SVG** a **PNG**. Pro další výstupy je třeba nainstalovat program **ImageMagick**.

Stručný přehled základních vykreslovacích metod ve **3D** naleznete v **PDF** dokumentu: **ASYMPTOTE. UPOZORNĚNÍ: PDF SOUBOR JE NUTNĚ OTEVŘÍT POMOCÍ PROGRAMU ADOBE READER! JINAK NEBUDE INTERAKTIVNÍ 3D GRAFIKA OBSAŽENA V DOKUMENTU FUNGOVAT!**

DOPORUČENÉ ODKAZY:

Oficiální stránky ASYMPOTTE : <http://asymptote.sourceforge.net/>.

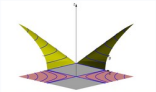
Galerie příkladů: <http://marris.org/asymptote>.

CREATED BY LADISLAV FOLTYN

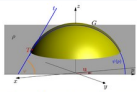
VYBRANÉ PARTIE Z DIFERENCIÁLNÍHO POČTU FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

ÚVOD	ASYMPTOTE	DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH	KONTAKT
Funkce dvou proměnných		Parciální a směrové derivace	Diferenciál
Taylorův mnohočlen		Lokální extrém	

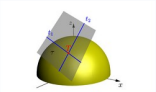
Diferenciální počty funkcí více proměnných



Funkce dvou proměnných



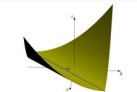
Parciální a směrové derivace



Diferenciál



Taylorův mnohočlen



Lokální extrém

UPOZORNĚNÍ:
PDF SOUBORY JE ZAPOTŘEBÍ
OTEVÍRAT POMOCÍ PROGRAMU
ADOBE READER! JINAK NEBUDE
INTERAKTIVNÍ 3D GRAFIKA FUNGOVAT!

CREATED BY LADISLAV FOLTYN

VYBRANÉ PARTIE Z DIFERENCIÁLNÍHO POČTU FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

KONTAKT

Diferencial

Lokální extrémy

Parciální a směrové derivace



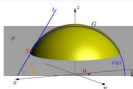
Příklad 1.

Uvažujte funkci $f(x, y) = x^2 + y^2$. Vypočítejte první parciální derivace funkce $f(x, y)$ v bodě $(x_0, y_0) = (2, 1)$.



Příklad 2.

Nechť je dána funkce $f(x, y) = \frac{1}{4}x^3y^2 - \frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{4}xy$. Vypočítejte první parciální derivace funkce $f(x, y)$ v bodě $(x_0, y_0) = (1, 1)$.



Příklad 3.

Nechť je dána funkce $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Vypočítejte derivaci funkce $f(x, y)$ v bodě $(x_0, y_0) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ ve směru jednotkového vektoru $\mathbf{u} = \frac{(-2, 1)}{\|(-2, 1)\|}$.

CREATED BY LADISLAV FOLTYN

- Bakalářská práce slouží jako doplněk ke skriptům:
KUBEN, Jaromír, Šárka MAYEROVÁ, Pavlína RAČKOVÁ a Petra ŠARMANOVÁ [online]. *Diferenciální počet funkcí více proměnných*
- Práce je umístěna na stránkách <http://mi21.vsb.cz/>
- Studenti si mohou stáhnout společně se skripty i nově vytvořenou sbírku příkladů

- Sbíрка patnácti řešených příkladů
- Příklady jsou doplněny o interaktivní 3D grafiku
- Přidán manuál pro práci s Asymptote
- Práce je pro lepší dostupnost umístěna na stránkách <http://homel.vsb.cz/~fol0037/>
- Umístěno i na stránkách <http://mi21.vsb.cz/>

Děkuji za pozornost