

BUDEME SI POVI'DAT, PROČ SI BUDEME POVI'DAT O URČITÉM INTEGRÁLU

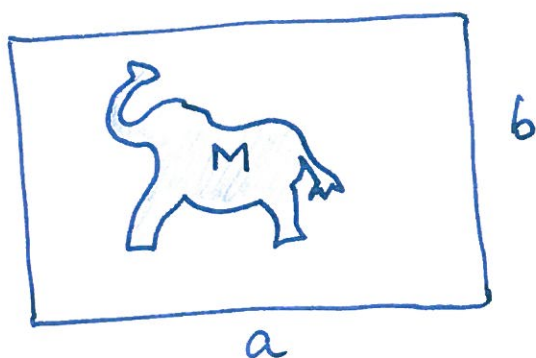
(ŠKOMAM - 21.1.2014)

J. BOUCHALA

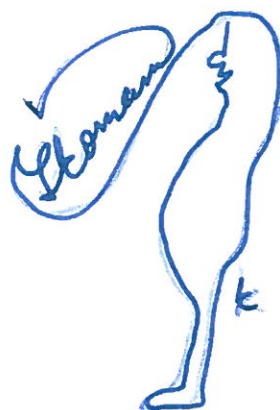
Motivace

① $M \subset \mathbb{R}^2$; „obsah“ $M = ?$

② „křivka“ $k \subset \mathbb{R}^2$,
„délka“ $k = ?$



... chemici
... Monte Carlo



③ $T \subset \mathbb{R}^3$; „objem“ $T = ?$

Jak definovat „...“?

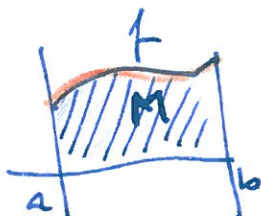
Jak spočítat ...?

Speciální případ

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

f je • spojitá
• měřitelná na $\langle a, b \rangle$

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \langle a, b \rangle \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$$



Co je obsah M ?



obsah $M \doteq f(x_0) \cdot \frac{b-a}{n} + f(x_1) \frac{b-a}{n} + \dots + f(x_{n-1}) \frac{b-a}{n}$

$$\frac{b-a}{n} [f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})]$$

$n \rightarrow \infty$

$$\int_a^b f(x) dx$$

$x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$

Definice Buď $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá na $[a, b]$

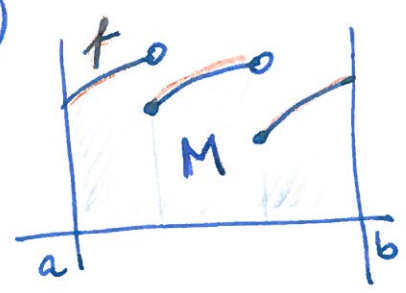
$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{b-a}{n} (f(x_0) + \dots + f(x_{n-1})) \right]$$

"Seriál"

kde $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$

Možní zobrazení a s nimi spojené varování

①



obsah $M = \int_a^b f(x) dx = \lim \dots$

②

$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

$\int_0^1 f(x) dx = \lim \dots = 0,$

$0 < n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$\int_n^{n+1} f(x) dx = \lim \dots = 1,$

$0 < n \in \mathbb{Q} : \int_0^{1+n} f(x) dx = \lim \dots = 0$

$0 < n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \int_0^{1+n} f(x) dx = \lim \dots = 1+n$

$\int_0^{2014} f(x) dx = 0$

$\int_0^{\sqrt{2}} f(x) dx = \sqrt{2}$

Divim ...

Věta f spojité v $\langle a, b \rangle$, je

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{b-a}{n} (f(\xi_1) + \dots + f(\xi_n)) \right],$$

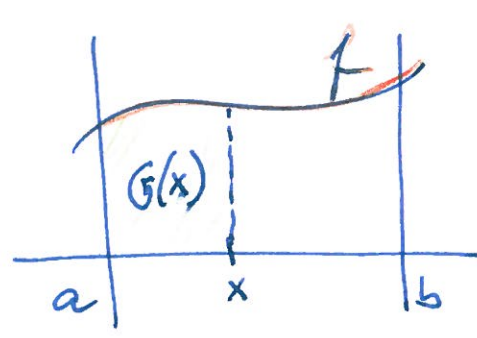
kd $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ pro každý libovolný $(\forall n)$

Definice $\int_a^a f(x) dx \stackrel{\text{def.}}{=} 0$

Pozorování f spojité v $\langle a, b \rangle$

$$G(x) \stackrel{\text{def.}}{=} \int_a^x f(t) dt$$

$(x \in \langle a, b \rangle)$



h „malé“

$$G(x+h) - G(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt \doteq \underline{f(x) \cdot h}$$



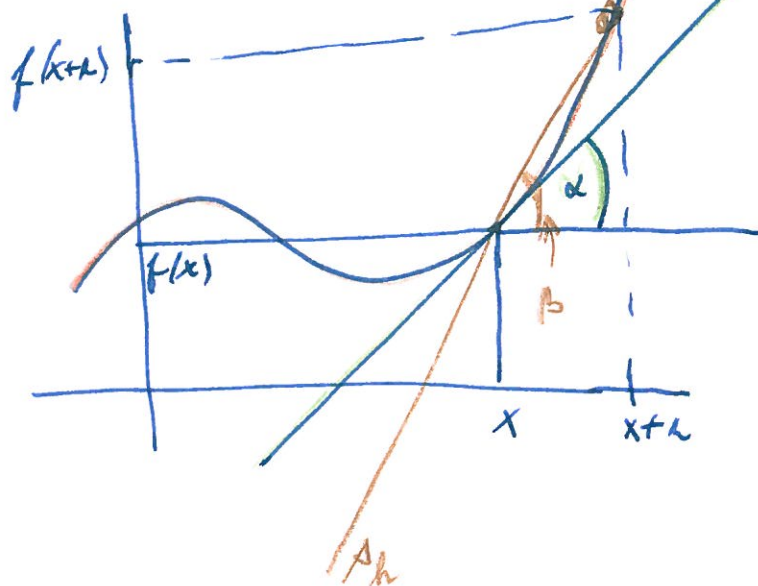
$$\frac{G(x+h) - G(x)}{h} \doteq f(x)$$

$\downarrow h \rightarrow 0$

$$\boxed{G'(x) = f(x)}$$

$G \dots$ primitivní funkce k f

Vzorek o derivacích



t... tečna v bodě
 $(x, f(x))$
 ... její směrnice $\equiv f'(x)$
 $\parallel$
 $\text{tg } \alpha$
 $\parallel$
 směrnice A_h
 $\parallel$
 $\text{tg } \beta$
 $\parallel$
 $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
 $h \rightarrow 0$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Příklady

① $f(x) = x$

$$f'(x) = (x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

② $f(x) = x^2$

$$f'(x) = (x^2)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x$$

③ $f(x) = x^3$

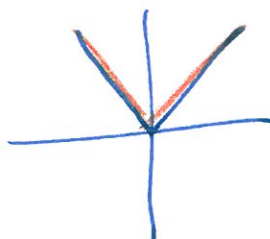
$$f'(x) = (x^3)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$

④ $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = (\sin x)' = \cos x$$

⑤ $f(x) = |x|$

$f'(0)$ neexistuje



Vraťme se k pozorování z shr. 3

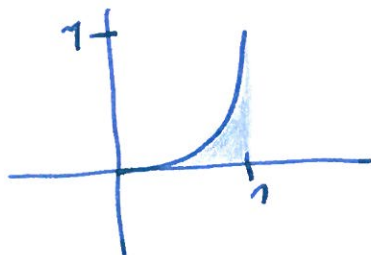
$$G(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \left(G'(x) = f(x) \right) \\ \forall x \in (a, b)$$

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) = G(b) - \underbrace{G(a)}_0$$

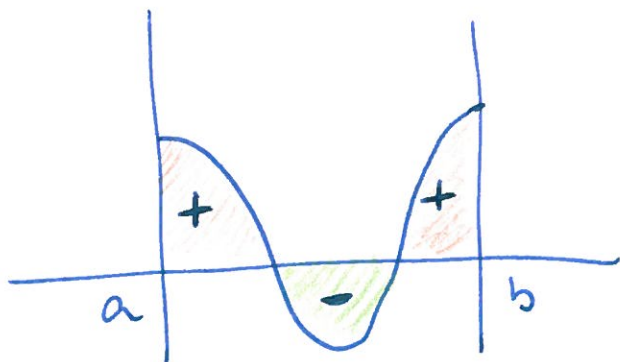
Věta f, F spojití v $\langle a, b \rangle$
 $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$

$$\Downarrow \\ \boxed{\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b \stackrel{\text{om.}}{=} F(b) - F(a)}$$

Příklad $\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$



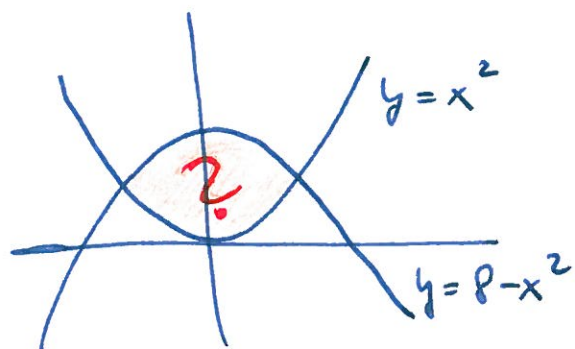
Pozorování - geometrický význam $\int_a^b f(x) dx$,
kde f je spojití v $\langle a, b \rangle$



$$\int_a^b f(x) dx = \text{Obzrah} - \text{Obzrah}$$

Ukol

Vypočítejte obsah plochy ohraničené
křivkami $y = x^2$ a $y = 8 - x^2$.



$$\left(= \frac{64}{3} \right)$$