

# Lidské poznání a mocniny 2

Jiří Bouchala



Katedra  
aplikované  
matematiky

30. 1. 2013



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP VK  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**Škomam 2013** je pořádán s podporou projektu **Matematika s radostí**.

Uvažujme mocniny čísla 2:

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...

a soustřeďme svoji pozornost na jejich první cifry:

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...

**Otázka:**

Existuje mocnina čísla 2,  
která začíná cifrou 9?

**Odpověď:** Ano, například

$$2^{53} = 9007199254740992.$$

**Problém:**

Kolik je mocnin čísla 2, které začínají cifrou 9?

**Otázka:**

Existuje mocnina čísla 2,  
která „začíná číslem“ 2013?

**Odpověď:** Ano, například

$2^{1363} = 20131868734285031784741980799935761118709484869532457322159573$   
471177001947261465027603086582463846793128612285484268281920147670733  
406708463136332416217684610398336256352522573422305112441282251267561  
771406691387044143950497066004327833961396440752648583943295568092317  
943242499964294347504349529340243320303433490306464528482892951226127  
053576697667165403123175488857638476073150632594290568957164949991115  
9808.

**Problém:**

Kolik je mocnin čísla 2, které „začínají číslem“ 2013?

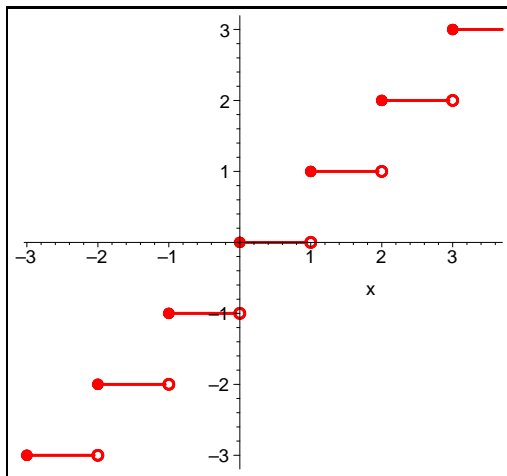
**Zásadní problém:**

Bud'  $\check{c} \in \mathbb{N}$  (zvoleno libovolně).

**Kolik** existuje přirozených čísel  $n$  takových, že (dekadický) zápis čísla  $2^n$  „začíná číslem“  $\check{c}$ ?

Nejdříve pro každé  $x \in \mathbb{R}$  definujeme celou část čísla  $x$  jako takové číslo  $[x] \in \mathbb{Z}$ , pro něž

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$



## Věta (W. Sierpinski, H. Weyl, P. Bohl; 1910).

Bud'  $x \in \mathbb{R}$ . Definujme posloupnost  $(a_n)$  předpisem

$$a_n := nx - [nx].$$

Pak platí:

- je-li  $x \in \mathbb{Z}$ , je  $a_n = 0$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ ;
- je-li  $x = \frac{p}{q}$ , kde  $p \in \mathbb{Z}$  a  $q \in \mathbb{N}$ , je  $a_{n+q} = a_n$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ ;
- je-li  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , je posloupnost  $(a_n)$  prostá a navíc platí, že pro každé  $\alpha, \beta \in \langle 0, 1 \rangle$ ,  $\alpha < \beta$ , leží nekonečně mnoho členů posloupnosti  $(a_n)$  v intervalu  $(\alpha, \beta)$  (tzn.  $\overline{\{a_n : n \in \mathbb{N}\}} = \langle 0, 1 \rangle$ ).

Důkaz prvních dvou tvrzení je velmi snadný, neboť

$$a_{n+q} = (n+q)\frac{p}{q} - [(n+q)\frac{p}{q}] = n\frac{p}{q} + p - [n\frac{p}{q}] - p = a_n.$$

Ukažme si, proč platí tvrzení třetí:

- Je-li

$$nx - [nx] = \underline{a_n} = \underline{a_m} = mx - [mx],$$

je

$$(n - m)x = [nx] - [mx] \in \mathbb{Z},$$

a proto ( $x$  je iracionální!)  $\underline{n = m}$ . Posloupnost  $(a_n)$  je prostá.

- Bud'  $n \in \mathbb{N}$  takové, že

$$\frac{1}{n} < \beta - \alpha,$$

a uvažujme body

$$a_1, a_2, \dots, a_{n+1} \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Pak zřejmě existují  $i, s \in \mathbb{N}$  takové, že  $i, i + s \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$  a že

$$0 < \varepsilon := |a_i - a_{i+s}| \leq \frac{1}{n} < \beta - \alpha.$$

- Nyní si představme reálnou osu navinutou na kružnici  $K$  o délce 1, na níž je vyznačen bod 0 (situace je podobná jako při znázorňování goniometrických funkcí, ale poloměr příslušné kružnice není 1, ale  $\frac{1}{2\pi}$ ). Reálná čísla si znázorňujeme jako body této kružnice, intervalu  $(\alpha, \beta) \subset \langle 0, 1 \rangle$  pak odpovídá oblouk na této kružnici.
- Uvažujme zobrazení  $f : K \rightarrow K$  definované jako otočení (v kladném směru) kolem středu  $K$  o úhel  $2\pi x$  radianů a posloupnost  $(b_n)$  bodů ležících na  $K$  definovanou rekurentně:

$$b_1 = f(0),$$

$$b_2 = f(b_1) = (f \circ f)(0),$$

...

$$b_n = f(b_{n-1}) = \underbrace{(f \circ \dots \circ f)}_{n \text{-krát}}(0).$$



- Všimněme si, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  je délka oblouku  $(0, b_n)$  rovna číslu  $a_n$ , a proto délka oblouku mezi body  $b_i$  a  $b_{i+s}$  je rovna číslu  $\varepsilon < \beta - \alpha$ . Takže  $\underbrace{f \circ \dots \circ f}_{s\text{-krát}}$  je otočení o úhel  $2\pi\varepsilon$  radianů.

- Z uvedených úvah již snadno plyne, že nekonečně mnoho z bodů

$$b_s, b_{2s}, b_{3s}, b_{4s}, \dots$$

leží v oblouku  $(\alpha, \beta)$  (jehož délka je větší než  $\varepsilon$ , což je délka oblouků s krajními body  $b_{ns}, b_{(n+1)s}$ ), a proto nekonečně mnoho členů posloupnosti  $(a_n)$  leží v intervalu  $(\alpha, \beta)$ .



## Věta (odpověď na Zásadní problém).

Bud'  $c \in \mathbb{N}$  dáno. Pak existuje nekonečně mnoho přirozených čísel  $n$  takových, že (dekadický) zápis čísla  $2^n$  „začíná číslem“  $c$ .

### Důkaz.

- Nejdříve si všimněme, že pro každé  $c \in \mathbb{N}$ , jehož (dekadický) zápis má právě  $k$  cifer, platí  $\lfloor \log c \rfloor = k - 1$ :

$c \in \mathbb{N}$  má právě  $k$  cifer

↓

$$10^{k-1} \leq c < 10^k$$

↓

$$k - 1 \leq \log c < k$$

↓

$$\lfloor \log c \rfloor = k - 1.$$

- Nyní buď dáno číslo  $\check{c} \in \mathbb{N}$  a uvažujme čísla  $\check{c}1 := 10\check{c} + 1$ ,  $\check{c}2 := 10\check{c} + 2$ . Zřejmě platí:

$$\begin{aligned}
 & 2^n \text{ „začíná číslem“ } \check{c} \\
 & \uparrow \\
 & \exists k \in \mathbb{N} : \check{c}1 \cdot 10^k \leq 2^n \leq \check{c}2 \cdot 10^k \\
 & \Downarrow \\
 & \exists k \in \mathbb{N} : \log(\check{c}1) + k \leq n \log 2 \leq \log(\check{c}2) + k \\
 & \Downarrow \\
 & \exists k \in \mathbb{N} : s + \alpha + k \leq n \log 2 \leq s + \beta + k, \\
 & \text{kde } s := [\log(\check{c}1)] = [\log(\check{c}2)], 0 \leq \alpha < \beta < 1 \\
 & \Downarrow \\
 & \exists k \in \mathbb{N} : \alpha \leq n \log 2 - \underbrace{(s + k)}_{\in \mathbb{Z}} \leq \beta \\
 & \Downarrow \\
 & \alpha \leq n \log 2 - [n \log 2] \leq \beta
 \end{aligned}$$

A zbývající část důkazu již snadno plyne z předcházející věty a faktu, že  $\log 2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

## ... a něco numerologie:




1931... = $2^{7462}$ ,	1946... = $2^{10475}$ ,	1961... = $2^{187}$ ,	1976... = $2^{1064}$ ,	1991... = $2^{1941}$ ,
1932... = $2^{569}$ ,	1947... = $2^{1446}$ ,	1962... = $2^{4459}$ ,	1977... = $2^{5336}$ ,	1992... = $2^{4077}$ ,
1933... = $2^{6977}$ ,	1948... = $2^{9990}$ ,	1963... = $2^{1838}$ ,	1978... = $2^{579}$ ,	1993... = $2^{1456}$ ,
1934... = $2^{84}$ ,	1949... = $2^{961}$ ,	1964... = $2^{3974}$ ,	1979... = $2^{4851}$ ,	1994... = $2^{3592}$ ,
1935... = $2^{6492}$ ,	1950... = $2^{7369}$ ,	1965... = $2^{10382}$ ,	1980... = $2^{94}$ ,	1995... = $2^{971}$ ,
1936... = $2^{1735}$ ,	1951... = $2^{476}$ ,	1966... = $2^{1353}$ ,	1981... = $2^{2230}$ ,	1996... = $2^{3107}$ ,
1937... = $2^{6007}$ ,	1952... = $2^{6884}$ ,	1967... = $2^{9897}$ ,	1982... = $2^{10774}$ ,	1997... = $2^{486}$ ,
1938... = $2^{1250}$ ,	1953... = $2^{2127}$ ,	1968... = $2^{868}$ ,	1983... = $2^{1745}$ ,	1998... = $2^{2622}$ ,
1939... = $2^{5522}$ ,	1954... = $2^{6399}$ ,	1969... = $2^{7276}$ ,	1984... = $2^{8153}$ ,	1999... = $2^{9030}$ ,
1940... = $2^{765}$ ,	1955... = $2^{1642}$ ,	1970... = $2^{383}$ ,	1985... = $2^{1260}$ ,	2000... = $2^{2137}$ ,
1941... = $2^{5037}$ ,	1956... = $2^{5914}$ ,	1971... = $2^{6791}$ ,	1986... = $2^{7668}$ ,	2001... = $2^{8545}$ ,
1942... = $2^{280}$ ,	1957... = $2^{1157}$ ,	1972... = $2^{2034}$ ,	1987... = $2^{775}$ ,	2002... = $2^{1652}$ ,
1943... = $2^{4552}$ ,	1958... = $2^{5429}$ ,	1973... = $2^{6306}$ ,	1988... = $2^{7183}$ ,	2003... = $2^{5924}$ ,
1944... = $2^{10960}$ ,	1959... = $2^{672}$ ,	1974... = $2^{1549}$ ,	1989... = $2^{290}$ ,	2004... = $2^{1167}$ ,
1945... = $2^{1931}$ ,	1960... = $2^{4944}$ ,	1975... = $2^{5821}$ ,	1990... = $2^{6698}$ ,	2005... = $2^{5439}$ .

**Domácí úkol:**

Bud'  $\check{c} \in \mathbb{N}$  (zvoleno libovolně).

Zjistěte, kolik existuje přirozených čísel  $n$  takových, že (dekadický) zápis čísla  $n^2$  „začíná číslem“  $\check{c}$ ?

## Literatura a zdroje

-  P. Strzelecki  
*On powers of 2*  
EMS Newsletter, No. 52 (2004), 7-8
-  V. Jarník  
*Diferenciální počet II*  
Academia, Praha (1976), 72-74
-  P. Vodstrčil  
*... ten, co umí s Maplem*  
Katedra aplikované matematiky (už nějaký čas)