



# Magická ohodnocení grafů a spravedlivé sportovní turnaje

(turnaj “každý hraje s každým” není spravedlivý!)

Petr Kovář

ŠKOMAM 2012

31.1. 2012, Ostrava



## Přehled přednášky

- 1 Pojem grafu
  - Vrcholy a hrany
- 2 Různá ohodnocení grafů
  - Ohodnocení s fyzikálním významem
  - Ohodnocení jako model
- 3 Magická ohodnocení
  - Losování neúplných turnajů
- 4 Několik (jednoduchých) pozorování
- 5 Několik zajímavějších (složitějších) výsledků
- 6 Otevřené problémy



## Část 1.

# Pojem grafu



## Co je a co není (náš) graf ...

### Definice

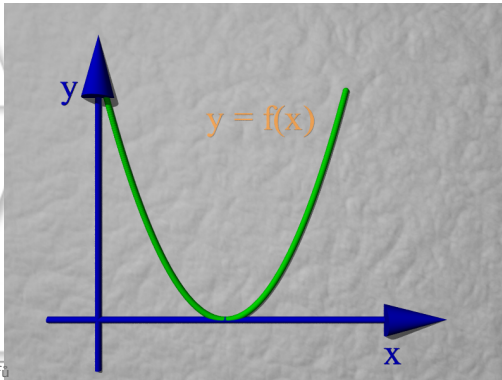
***Graf** je dvojice množin  $(V, E)$ .  $V$  je neprázdna množina vrcholů a  $E$  je množina dvouprvkových podmnožin množiny  $V$ .*



## Co je a co není (náš) graf ...

### Definice

**Graf** je dvojice množin  $(V, E)$ .  $V$  je neprázdná množina vrcholů a  $E$  je množina dvouprvkových podmnožin množiny  $V$ .

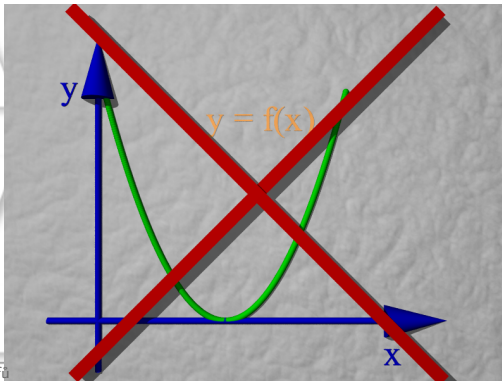




## Co je a co není (náš) graf ...

### Definice

**Graf** je dvojice množin  $(V, E)$ .  $V$  je neprázdná množina vrcholů a  $E$  je množina dvouprvkových podmnožin množiny  $V$ .

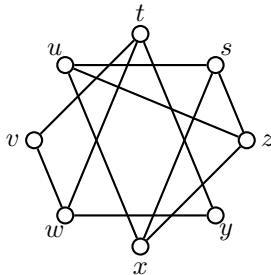




## Co je graf?

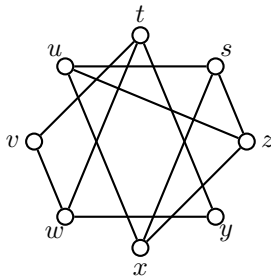
### Definice (přeformulovaná)

**Graf** je dvojice množin  $(V, E)$ .  $V$  je množina bodů v rovině a množina hran  $E$  obsahuje spojnice vrcholů v rovině.





Graf je šikovný díky přehlednému znázornění.

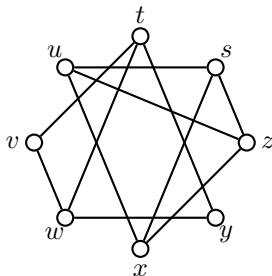


- objekty – vrcholy
- objekty spolu souvisí – mezi vrcholy je hrana
- objekty spolu nesouvisí – mezi vrcholy není hrana





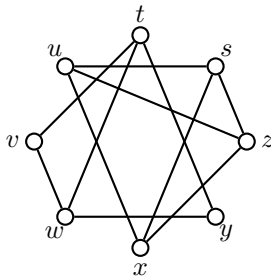
## Graf je šikovný díky přehlednému znázornění.



- objekty – vrcholy
- objekty spolu souvisí – mezi vrcholy je hrana
- objekty spolu nesouvisí – mezi vrcholy není hrana



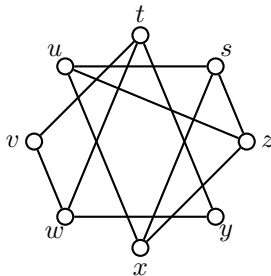
## Graf je šikovný díky přehlednému znázornění.



- objekty – vrcholy
- objekty spolu souvisí – mezi vrcholy je hrana
- objekty spolu nesouvisí – mezi vrcholy není hrana



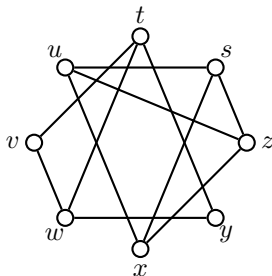
# Graf je šikovný díky přehlednému znázornění.



- objekty – vrcholy
- objekty spolu souvisí – mezi vrcholy je hrana
- objekty spolu nesouvisí – mezi vrcholy není hrana



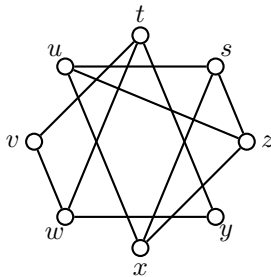
## Další (jednoduché) pojmy



- **Stupeň vrcholu** – počet hran, které vycházejí z vrcholu.
- **$r$ -pravidelný graf** – má všechny vrcholy stupně  $r$ .
- **Cesta v grafu** – posloupnost vrcholů a hran, které “navazují”.  
Například  $u, s, z, x$ .
- **Souvislý graf** – mezi každými dvěma vrcholy najdeme cestu.



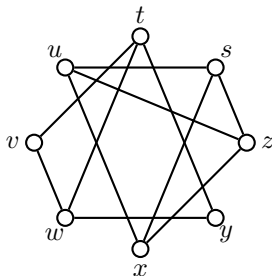
## Další (jednoduché) pojmy



- **Stupeň vrcholu** – počet hran, které vycházejí z vrcholu.
- **$r$ -pravidelný graf** – má všechny vrcholy stupně  $r$ .
- **Cesta v grafu** – posloupnost vrcholů a hran, které “navazují”.  
Například  $u, s, z, x$ .
- **Souvislý graf** – mezi každými dvěma vrcholy najdeme cestu.



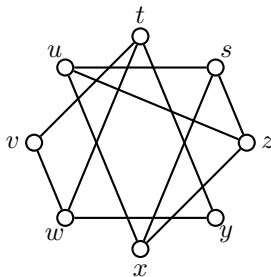
## Další (jednoduché) pojmy



- **Stupeň vrcholu** – počet hran, které vycházejí z vrcholu.
- **$r$ -pravidelný** graf – má všechny vrcholy stupně  $r$ .
- **Cesta v grafu** – posloupnost vrcholů a hran, které “navazují”.  
Například  $u, s, z, x$ .
- **Souvislý** graf – mezi každými dvěma vrcholy najdeme cestu.



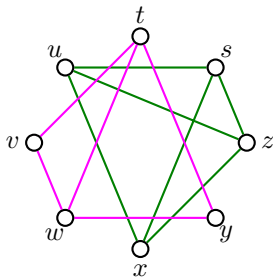
## Další (jednoduché) pojmy



- **Stupeň vrcholu** – počet hran, které vycházejí z vrcholu.
- **$r$ -pravidelný** graf – má všechny vrcholy stupně  $r$ .
- **Cesta v grafu** – posloupnost vrcholů a hran, které “navazují”.  
Například  $u, s, z, x$ .
- **Souvislý** graf – mezi každými dvěma vrcholy najdeme cestu.



## Další (jednoduché) pojmy



- **Stupeň vrcholu** – počet hran, které vycházejí z vrcholu.
- **$r$ -pravidelný** graf – má všechny vrcholy stupně  $r$ .
- **Cesta v grafu** – posloupnost vrcholů a hran, které “navazují”.  
Například  $u, s, z, x$ .
- **Souvislý graf** – mezi každými dvěma vrcholy najdeme cestu.





## Část 2.

# Ohodnocení grafu



## Ohodnocení grafu

Hranám nebo vrcholům přiřadíme čísla.

### Definice

Ohodnocení grafu  $G = (V, E)$  je zobrazení  $f : M \rightarrow X$ , kde

- $M = E$ , *hranové* ohodnocení;
- $M = V$ , *vrcholové* ohodnocení;
- $M = V \cup E$ , *totální* ohodnocení.

Obvykle  $X = \mathbb{R}, \mathbb{N}, \dots$



## Ohodnocení grafu

Hranám nebo vrcholům přiřadíme čísla.

### Definice

Ohodnocení grafu  $G = (V, E)$  je zobrazení  $f : M \rightarrow X$ , kde

- $M = E$ , *hranové* ohodnocení;
- $M = V$ , *vrcholové* ohodnocení;
- $M = V \cup E$ , *totální* ohodnocení.

Obvykle  $X = \mathbb{R}, \mathbb{N}, \dots$



## Ohodnocení grafu

Hranám nebo vrcholům přiřadíme čísla.

### Definice

Ohodnocení grafu  $G = (V, E)$  je zobrazení  $f : M \rightarrow X$ , kde

- $M = E$ , *hranové* ohodnocení;
- $M = V$ , *vrcholové* ohodnocení;
- $M = V \cup E$ , *totální* ohodnocení.

Obvykle  $X = \mathbb{R}, \mathbb{N}, \dots$



## Ohodnocení grafu

Hranám nebo vrcholům přiřadíme čísla.

### Definice

Ohodnocení grafu  $G = (V, E)$  je zobrazení  $f : M \rightarrow X$ , kde

- $M = E$ , *hranové* ohodnocení;
- $M = V$ , *vrcholové* ohodnocení;
- $M = V \cup E$ , *totální* ohodnocení.

Obvykle  $X = \mathbb{R}, \mathbb{N}, \dots$



## Význam ohodnocení grafů – fyzikální interpretace

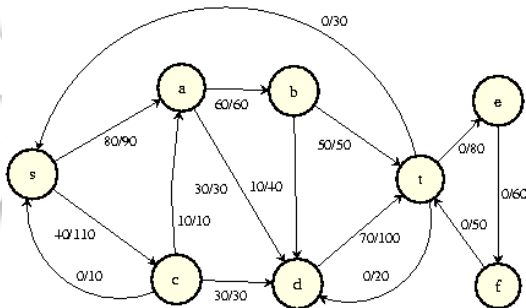
- ohodnocení hran = délka
- ohodnocení hran/vrcholů = kapacita
- ohodnocení hran = odpor





## Význam ohodnocení grafů – fyzikální interpretace

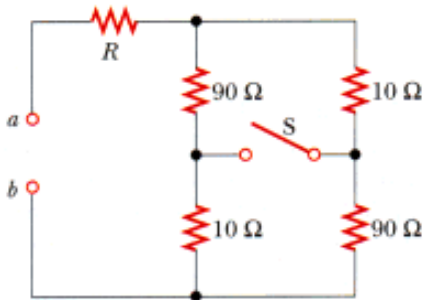
- ohodnocení hran = délka
- ohodnocení hran/vrcholů = kapacita
- ohodnocení hran = odpor





## Význam ohodnocení grafů – fyzikální interpretace

- ohodnocení hran = délka
- ohodnocení hran/vrcholů = kapacita
- ohodnocení hran = odpor



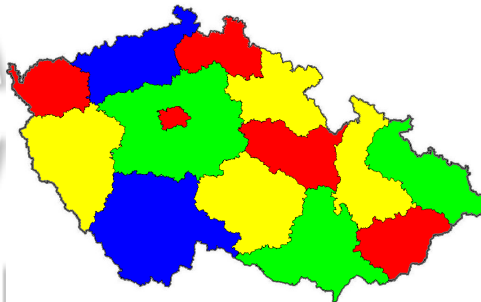




## Jiný význam ohodnocení grafů

Obarvení politické mapy:

- sousední státy/kraje (vrcholy) spojené hranou
- žádné sousedící nemají stejnou barvu (*dobré barvení*)
- hledáme nejmenší počet barev vrcholů (států)

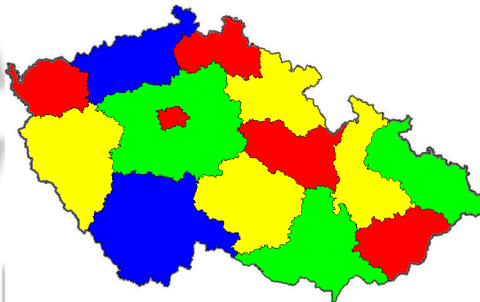




## Jiný význam ohodnocení grafů

Obarvení politické mapy:

- sousední státy/kraje (vrcholy) spojené hranou
- žádné sousedící nemají stejnou barvu (*dobré barvení*)
- hledáme nejmenší počet barev vrcholů (států)

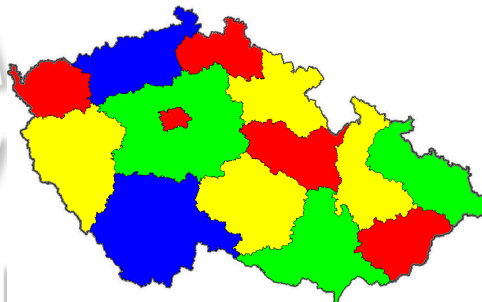




## Jiný význam ohodnocení grafů

Obarvení politické mapy:

- sousední státy/kraje (vrcholy) spojené hranou
- žádné sousedící nemají stejnou barvu (*dobré barvení*)
- hledáme nejmenší počet barev vrcholů (států)

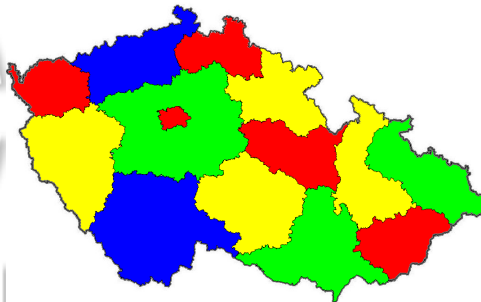




## Jiný význam ohodnocení grafů

Obarvení politické mapy:

- sousední státy/kraje (vrcholy) spojené hranou
- žádné sousedící nemají stejnou barvu (*dobré barvení*)
- hledáme nejmenší počet barev vrcholů (států)





## Ekvivalentní úlohy

Skladovací problém:

- komodity = vrcholy
- hranou spojíme komodity, které nesmíme skladovat spolu
- hledáme nejmenší počet barev vrcholů

Křižovatky:

- dopravní trasy (jízdní pruhy, přechody) = vrcholy
- hranou spojíme, pokud kolidují
- hledáme nejmenší počet barev vrcholů

Barvu vyjádříme číslem, dostaneme ohodnocení grafu.



## Ekvivalentní úlohy

Skladovací problém:

- komodity = vrcholy
- hranou spojíme komodity, které nesmíme skladovat spolu
- hledáme nejmenší počet barev vrcholů

Křižovatky:

- dopravní trasy (jízdní pruhy, přechody) = vrcholy
- hranou spojíme, pokud kolidují
- hledáme nejmenší počet barev vrcholů

Barvu vyjádříme číslem, dostaneme ohodnocení grafu.



## Ekvivalentní úlohy

Skladovací problém:

- komodity = vrcholy
- hranou spojíme komodity, které nesmíme skladovat spolu
- hledáme nejmenší počet barev vrcholů

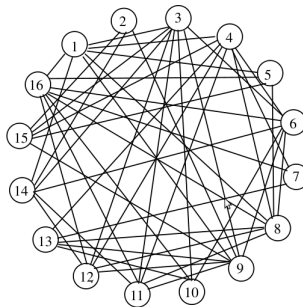
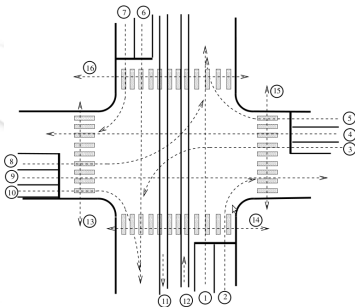
Křižovatky:

- dopravní trasy (jízdní pruhy, přechody) = vrcholy
- hranou spojíme, pokud kolidují
- hledáme nejmenší počet barev vrcholů

Barvu vyjádříme číslem, dostaneme ohodnocení grafu.



## Příklad







## Část 3.

# Magická ohodnocení



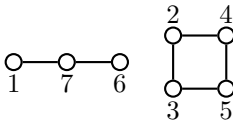
## Magická ohodnocení grafů

### Definice

Mějme graf  $G = (V, E)$  na  $n$  vrcholech. Ohodnocení  $f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  nazveme "*distance magic*" ohodnocení, jestliže váha

$$w(v) = \sum_{u \in N(v)} f(u)$$

každého vrcholu  $v \in V$  je rovna stejnému číslu  $k$ .  
Číslo  $k$  nazýváme *magická konstanta*.





## Magická ohodnocení grafů

Existuje řada magických ohodnocení:

- EMT, VMT
- supermagic (VME)
- VAT,  $(a, d)$ -VAT
- distance  $(a, d)$ -antimagic . . .

J.A. Gallian, A dynamic survey of graph labeling, *The Electronic Journal of Combinatorics*, DS 6 (2010).

Matematická hříčka, někdy má překvapivé praktické využití.



## Magická ohodnocení grafů

Existuje řada magických ohodnocení:

- EMT, VMT
- supermagic (VME)
- VAT,  $(a, d)$ -VAT
- distance  $(a, d)$ -antimagic . . .

J.A. Gallian, A dynamic survey of graph labeling, *The Electronic Journal of Combinatorics*, DS 6 (2010).

Matematická hříčka, někdy má překvapivé praktické využití.



## Magická ohodnocení grafů

Existuje řada magických ohodnocení:

- EMT, VMT
- supermagic (VME)
- VAT,  $(a, d)$ -VAT
- distance  $(a, d)$ -antimagic . . .

J.A. Gallian, A dynamic survey of graph labeling, *The Electronic Journal of Combinatorics*, DS 6 (2010).

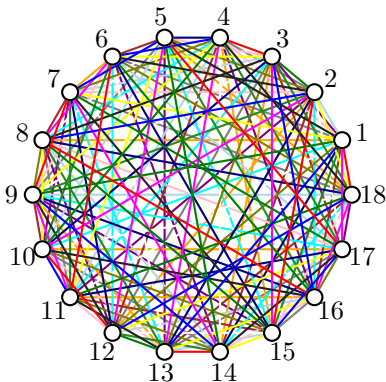
Matematická hříčka, někdy má překvapivé praktické využití.



## (Úplný) turnaj

■  $n$  týmů

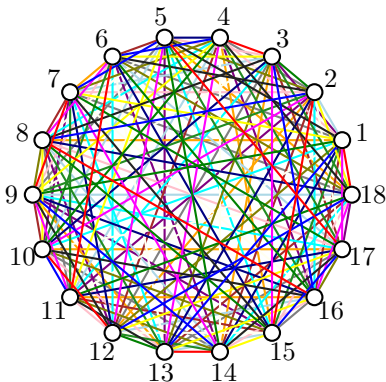
■ každý hraje  $n - 1$  zápasů, během  $n - 1$  kol (týdnů)





## (Úplný) turnaj

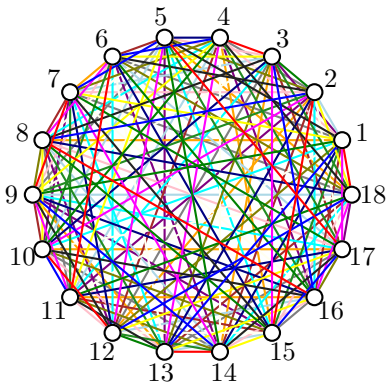
- $n$  týmů
- každý hraje  $n - 1$  zápasů, během  $n - 1$  kol (týdnů)





## (Úplný) turnaj

- $n$  týmů
- každý hraje  $n - 1$  zápasů, během  $n - 1$  kol (týdnů)

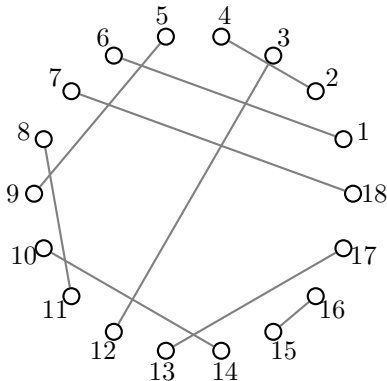
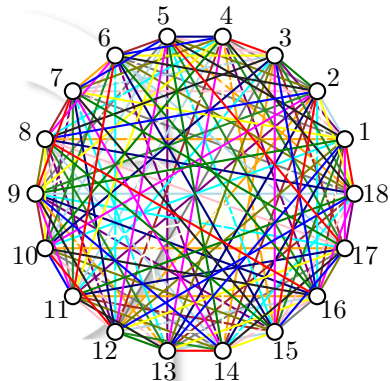






## (Úplný) turnaj

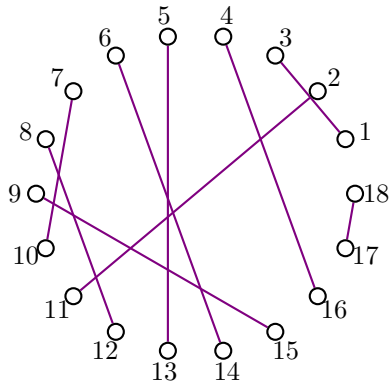
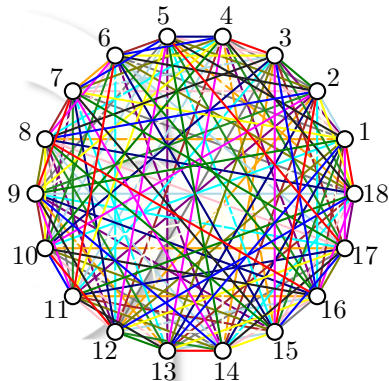
- $n$  týmů
- každý hraje  $n - 1$  zápasů, během  $n - 1$  kol (týdnů)





## (Úplný) turnaj

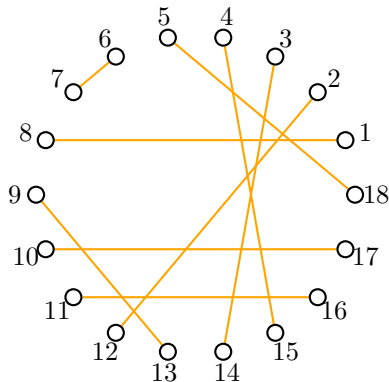
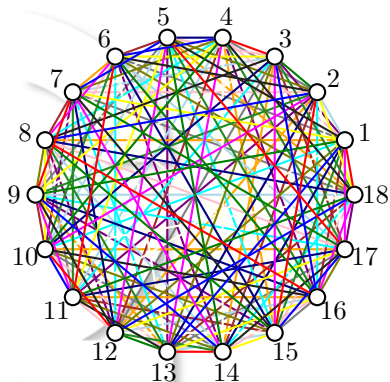
- $n$  týmů
- každý hraje  $n - 1$  zápasů, během  $n - 1$  kol (týdnů)





## (Úplný) turnaj

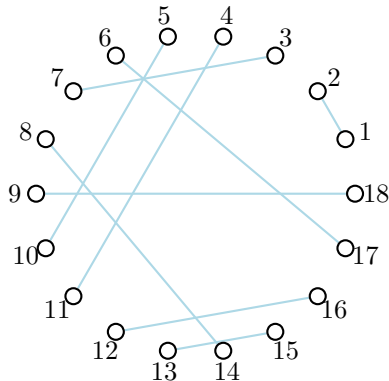
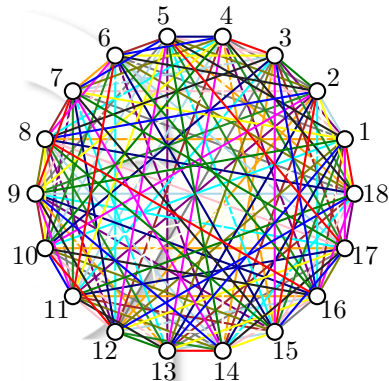
- $n$  týmů
- každý hraje  $n - 1$  zápasů, během  $n - 1$  kol (týdnů)





## (Úplný) turnaj

- $n$  týmů
- každý hraje  $n - 1$  zápasů, během  $n - 1$  kol (týdnů)

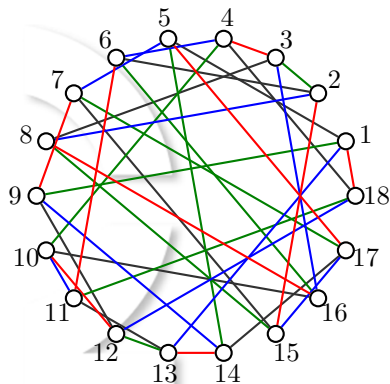




## Neúplný turnaj

■  $n$  týmů

■ každý hraje  $r$  zápasů, srovnejme soupeře týmů 17 a 18.



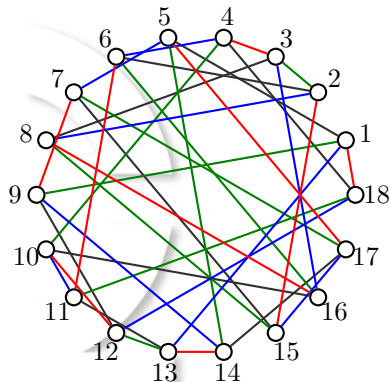
$$w(17) = 5 + 7 + 14 + 15 = 41$$

$$w(18) = 1 + 4 + 11 + 12 = 28$$



## Neúplný turnaj

- $n$  týmů
- každý hraje  $r$  zápasů, srovnejme soupeře týmů 17 a 18.



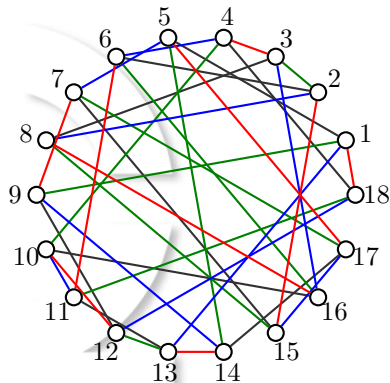
$$w(17) = 5 + 7 + 14 + 15 = 41$$

$$w(18) = 1 + 4 + 11 + 12 = 28$$



## Neúplný turnaj

- $n$  týmů
- každý hraje  $r$  zápasů, srovnejme soupeře týmů 17 a 18.



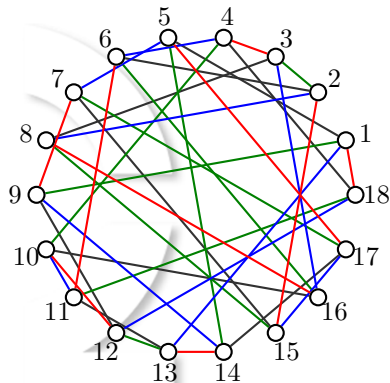
$$w(17) = 5 + 7 + 14 + 15 = 41$$

$$w(18) = 1 + 4 + 11 + 12 = 28$$



## Neúplný turnaj

- $n$  týmů
- každý hraje  $r$  zápasů, srovnejme soupeře týmů 17 a 18.



$$w(17) = 5 + 7 + 14 + 15 = 41$$

$$w(18) = 1 + 4 + 11 + 12 = 28$$





## Spravedlivý neúplný turnaj

*Požadujeme, aby součet "sil" oponentů byl pro každý tým stejný.*

"síla" = pořadí z výsledkové listiny úplného turnaje (třeba z minulého ročníku)

*Požadujeme, aby součet pořadí oponentů byl pro každý tým stejný.*

Ohodnocení vrcholů = pořadí (opačný význam než síla)

*Požadujeme, aby součet ohodnocení sousedních vrcholů byl pro každý vrchol stejný.*

To je právě definice distance magic ohodnocení!



## Spravedlivý neúplný turnaj

*Požadujeme, aby součet “sil” oponentů byl pro každý tým stejný.*

“síla” = pořadí z výsledkové listiny úplného turnaje (třeba z minulého ročníku)

*Požadujeme, aby součet pořadí oponentů byl pro každý tým stejný.*

Ohodnocení vrcholů = pořadí (opačný význam než síla)

*Požadujeme, aby součet ohodnocení sousedních vrcholů byl pro každý vrchol stejný.*

To je právě definice distance magic ohodnocení!



## Spravedlivý neúplný turnaj

*Požadujeme, aby součet "sil" oponentů byl pro každý tým stejný.*

"síla" = pořadí z výsledkové listiny úplného turnaje (třeba z minulého ročníku)

*Požadujeme, aby součet pořadí oponentů byl pro každý tým stejný.*

Ohodnocení vrcholů = pořadí (opačný význam než síla)

*Požadujeme, aby součet ohodnocení sousedních vrcholů byl pro každý vrchol stejný.*

To je právě definice distance magic ohodnocení!



## Spravedlivý neúplný turnaj

*Požadujeme, aby součet "sil" oponentů byl pro každý tým stejný.*

"síla" = pořadí z výsledkové listiny úplného turnaje (třeba z minulého ročníku)

*Požadujeme, aby součet pořadí oponentů byl pro každý tým stejný.*

Ohodnocení vrcholů = pořadí (opačný význam než síla)

*Požadujeme, aby součet ohodnocení sousedních vrcholů byl pro každý vrchol stejný.*

**To je právě definice distance magic ohodnocení!**



## Přirozené požadavky na neúplný turnaj

Spravedlivý neúplný turnaj  $n$  týmů je graf

- $r$ -pravidelný
- souvislý
- má distance magic ohodnocení (je distance magic)

Hledáme (souvislé) pravidelné grafy pro dané  $n$  a  $r$ , které mají distance magic ohodnocení.

Otázka: Pro jaké parametry  $n, r$  existuje?

- ne, když oba parametry  $n, r$  liché
- ne, když oba parametry  $n, r \equiv 2 \pmod{4}$



## Přirozené požadavky na neúplný turnaj

Spravedlivý neúplný turnaj  $n$  týmů je graf

- $r$ -pravidelný
- souvislý
- má distance magic ohodnocení (je distance magic)

Hledáme (souvislé) pravidelné grafy pro dané  $n$  a  $r$ , které mají distance magic ohodnocení.

**Otázka: Pro jaké parametry  $n, r$  existuje?**

- ne, když oba parametry  $n, r$  liché
- ne, když oba parametry  $n, r \equiv 2 \pmod{4}$



## Přirozené požadavky na neúplný turnaj

Spravedlivý neúplný turnaj  $n$  týmů je graf

- $r$ -pravidelný
- souvislý
- má distance magic ohodnocení (je distance magic)

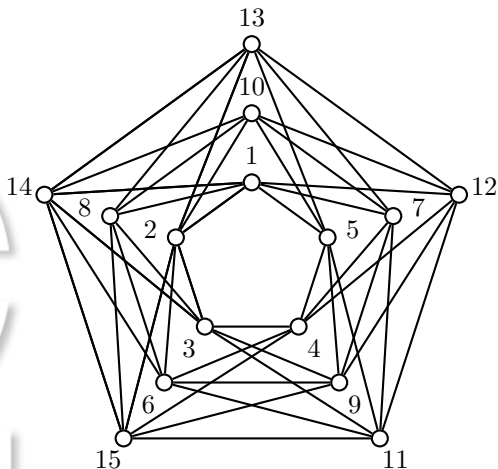
Hledáme (souvislé) pravidelné grafy pro dané  $n$  a  $r$ , které mají distance magic ohodnocení.

**Otázka:** Pro jaké parametry  $n, r$  existuje?

- ne, když oba parametry  $n, r$  liché
- ne, když oba parametry  $n, r \equiv 2 \pmod{4}$



## Graf s distance magic ohodnocením, $k = 48$







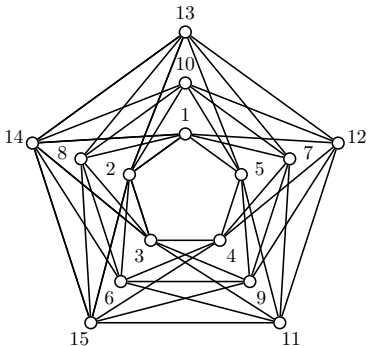
## Jak sestavit rozpis turnaje?

... to je jiná otázka, kterou v této přednášce neřešíme.

Máme 15 týmů, každý hraje 6 zápasů.

**Otázka:** tento neúplný turnaj nelze odehrát během 6 kol, proč?

(**otázka navíc:** Kolik **nejméně** kol je potřeba?)





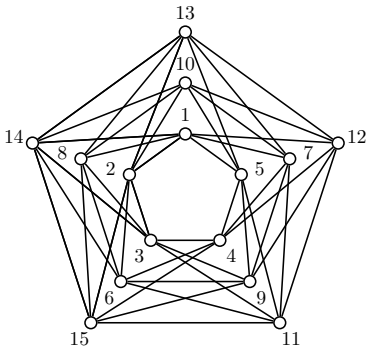
## Jak sestavit rozpis turnaje?

... to je jiná otázka, kterou v této přednášce neřešíme.

Máme 15 týmů, každý hraje 6 zápasů.

**Otázka:** tento neúplný turnaj nelze odehrát během 6 kol, proč?

(**otázka navíc:** Kolik **nejméně** kol je potřeba?)





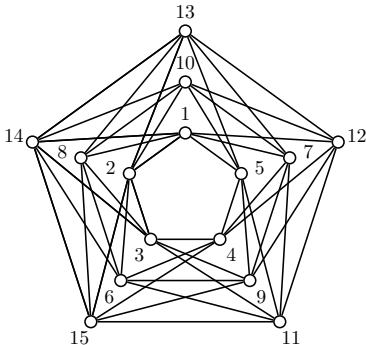
## Jak sestavit rozpis turnaje?

... to je jiná otázka, kterou v této přednášce neřešíme.

Máme 15 týmů, každý hraje 6 zápasů.

**Otázka:** tento neúplný turnaj nelze odehrát během 6 kol, proč?

(**otázka navíc:** Kolik **nejméně** kol je potřeba?)





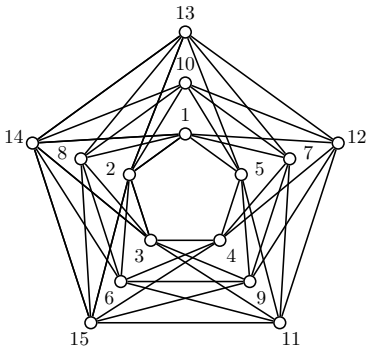
## Jak sestavit rozpis turnaje?

... to je jiná otázka, kterou v této přednášce neřešíme.

Máme 15 týmů, každý hraje 6 zápasů.

**Otázka:** tento neúplný turnaj nelze odehrát během 6 kol, proč?

(**otázka navíc:** Kolik **nejméně** kol je potřeba?)





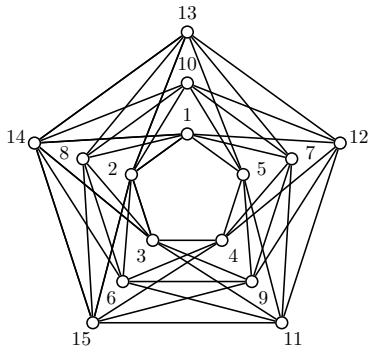
## Jak sestavit rozpis turnaje?

... to je jiná otázka, kterou v této přednášce neřešíme.

Máme 15 týmů, každý hraje 6 zápasů.

**Otázka:** tento neúplný turnaj nelze odehrát během 6 kol, proč?

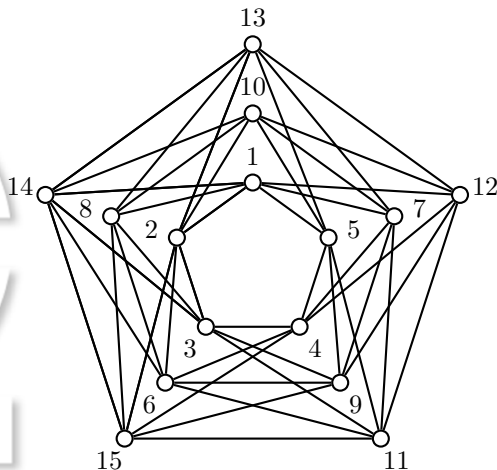
(**otázka navíc:** Kolik **nejméně** kol je potřeba?)





## Soutěžní otázka

Proč tento neúplný turnaj nelze odehrát během 6 kol?





## Část 4.

### Několik (jednoduchých) pozorování



## Neúplný turnaj – každý tým hraje jeden zápas

Počet zápasů:  $r = 1$

Spravedlivý neúplný turnaj, kdy každý hraje jeden zápas neexistuje!

- každý tým má jediného soupeře
- každý tým má **jiného** soupeře
- každý soupeř **jinak** silný





## Neúplný turnaj – každý tým hraje jeden zápas

Počet zápasů:  $r = 1$

Spravedlivý neúplný turnaj, kdy každý hraje jeden zápas neexistuje!

- každý tým má jediného soupeře
- každý tým má jiného soupeře
- každý soupeř jinak silný



## Neúplný turnaj – každý tým hraje jeden zápas

Počet zápasů:  $r = 1$

Spravedlivý neúplný turnaj, kdy každý hraje jeden zápas neexistuje!

- každý tým má jediného soupeře
- každý tým má **jiného** soupeře
- každý soupeř **jinak** silný



## Neúplný turnaj – každý tým hraje jeden zápas

Počet zápasů:  $r = 1$

Spravedlivý neúplný turnaj, kdy každý hraje jeden zápas neexistuje!

- každý tým má jediného soupeře
- každý tým má **jiného** soupeře
- každý soupeř **jinak** silný



## Úplný turnaj – každý tým hraje $n - 1$ zápasů

Počet zápasů:  $r = n - 1$

Úplný turnaj není spravedlivý!

- každý tým má  $n - 1$  soupeřů
- týmu  $x$  chybí jediný soupeř s ohodnocením  $x$
- každému týmu chybí **jíný** soupeř
- každému týmu chybí **jinak silný** soupeř



## Úplný turnaj – každý tým hraje $n - 1$ zápasů

Počet zápasů:  $r = n - 1$

Úplný turnaj není spravedlivý!

- každý tým má  $n - 1$  soupeřů
- týmu  $x$  chybí jediný soupeř s ohodnocením  $x$
- každému týmu chybí **jíný** soupeř
- každému týmu chybí **jinak silný** soupeř



## Úplný turnaj – každý tým hraje $n - 1$ zápasů

Počet zápasů:  $r = n - 1$

Úplný turnaj není spravedlivý!

- každý tým má  $n - 1$  soupeřů
- týmu  $x$  chybí jediný soupeř s ohodnocením  $x$
- každému týmu chybí jiný soupeř
- každému týmu chybí jinak silný soupeř



## Úplný turnaj – každý tým hraje $n - 1$ zápasů

Počet zápasů:  $r = n - 1$

Úplný turnaj není spravedlivý!

- každý tým má  $n - 1$  soupeřů
- týmu  $x$  chybí jediný soupeř s ohodnocením  $x$
- každému týmu chybí **jiný** soupeř
- každému týmu chybí **jinak silný** soupeř



## Úplný turnaj – každý tým hraje $n - 1$ zápasů

Počet zápasů:  $r = n - 1$

Úplný turnaj není spravedlivý!

- každý tým má  $n - 1$  soupeřů
- týmu  $x$  chybí jediný soupeř s ohodnocením  $x$
- každému týmu chybí **jiný** soupeř
- každému týmu chybí **jinak silný** soupeř





## Neúplný turnaj – každý tým hraje dva zápasy

Počet zápasů:  $r = 2$

Spravedlivý neúplný turnaj, kdy každý hraje dva zápasy existuje jen pro  $n = 4t$ .

Zformulujeme v jazyce teorie grafů:

Věta (Miller et al.; 2003)

Mějme  $r$ -pravidelný distance magic graf. Jeho magická konstanta je  $k = r(n + 1)/2$ .

Věta (Jinnah; 1999)

2-pravidelný graf  $G$  je distance magic právě tehdy a jen tehdy, je-li  $G = tC_4$ .



## Neúplný turnaj – každý tým hraje dva zápasy

Počet zápasů:  $r = 2$

Spravedlivý neúplný turnaj, kdy každý hraje dva zápasy existuje jen pro  $n = 4t$ .

Zformulujeme v jazyce teorie grafů:

Věta (Miller et al.; 2003)

Mějme  $r$ -pravidelný distance magic graf. Jeho magická konstanta je  $k = r(n + 1)/2$ .

Věta (Jinnah; 1999)

2-pravidelný graf  $G$  je distance magic právě tehdy a jen tehdy, je-li  $G = tC_4$ .



## Neúplný turnaj – každý tým hraje dva zápasy

Počet zápasů:  $r = 2$

Spravedlivý neúplný turnaj, kdy každý hraje dva zápasy existuje jen pro  $n = 4t$ .

Zformulujeme v jazyce teorie grafů:

Věta (Miller et al.; 2003)

Mějme  $r$ -pravidelný distance magic graf. Jeho magická konstanta je  $k = r(n + 1)/2$ .

Věta (Jinnah; 1999)

2-pravidelný graf  $G$  je distance magic právě tehdy a jen tehdy, je-li  $G = tC_4$ .



## Neúplný turnaj – každý tým hraje dva zápasy

Počet zápasů:  $r = 2$

Spravedlivý neúplný turnaj, kdy každý hraje dva zápasy existuje jen pro  $n = 4t$ .

Zformulujeme v jazyce teorie grafů:

Věta (Miller et al.; 2003)

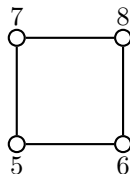
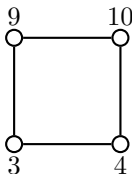
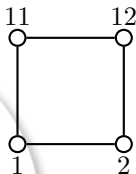
Mějme  $r$ -pravidelný distance magic graf. Jeho magická konstanta je  $k = r(n + 1)/2$ .

Věta (Jinnah; 1999)

2-pravidelný graf  $G$  je distance magic právě tehdy a jen tehdy, je-li  $G = tC_4$ .



## Příklad pro 12 týmů

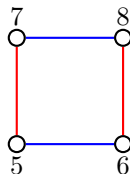
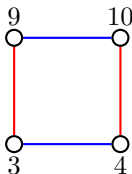
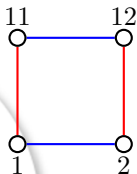


Lze odehrát během 2 kol.

Ale takový graf **není souvislý**! To je vzhledem ke spravedlivosti turnaje “podezřelý”...



## Příklad pro 12 týmů

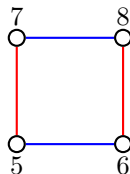
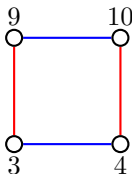
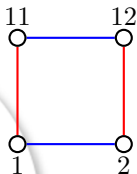


Lze odehrát během 2 kol.

Ale takový graf **není souvislý**! To je vzhledem ke spravedlivosti turnaje “podezřelé”...



## Příklad pro 12 týmů



Lze odehrát během 2 kol.

Ale takový graf **není souvislý**! To je vzhledem ke spravedlivosti turnaje “podezřelé”...



## Neúplný turnaj – každý tým hraje tři zápasy

Počet zápasů:  $r = 3$

Spravedlivý neúplný turnaj, kdy každý hraje tři zápasy neexistuje!

Důkaz v jazyce teorie grafů.

Využijeme princip sudosti: Každý graf, ve kterém jsou všechny vrcholy lichého stupně, musí mít sudý počet vrcholů.

Dále postupujeme **sporem**.

Každý vrchol (tým) hraje tři zápasy – jeho ohodnocení se započítá do váhy třem sousedním vrcholům.

Každý z  $n$  vrcholů (týmů) má stejnou váhu  $k$ .

Musí platit  $nk = 3(1 + 2 + \dots + n)$ , odtud  $k = 3(n + 1)/2$ .

Ale  $k$  není celé číslo! (liché·liché/2).

Dostáváme **SPOR**.





## Neúplný turnaj – každý tým hraje tři zápasy

Počet zápasů:  $r = 3$

Spravedlivý neúplný turnaj, kdy každý hraje tři zápasy neexistuje!

Důkaz v jazyce teorie grafů.

Využijeme princip sudosti: Každý graf, ve kterém jsou všechny vrcholy lichého stupně, musí mít sudý počet vrcholů.

Dále postupujeme **sporem**.

Každý vrchol (tým) hraje tři zápasy – jeho ohodnocení se započítá do váhy třem sousedním vrcholům.

Každý z  $n$  vrcholů (týmů) má stejnou váhu  $k$ .

Musí platit  $nk = 3(1 + 2 + \dots + n)$ , odtud  $k = 3(n + 1)/2$ .

Ale  $k$  není celé číslo! (liché·liché/2).

Dostáváme **SPOR**.



## Neúplný turnaj – každý tým hraje tři zápasy

Počet zápasů:  $r = 3$

Spravedlivý neúplný turnaj, kdy každý hraje tři zápasy neexistuje!

Důkaz v jazyce teorie grafů.

Využijeme princip sudosti: Každý graf, ve kterém jsou všechny vrcholy lichého stupně, musí mít sudý počet vrcholů.

Dále postupujeme **sporem**.

Každý vrchol (tým) hraje tři zápasy – jeho ohodnocení se započítá do váhy třem sousedním vrcholům.

Každý z  $n$  vrcholů (týmů) má stejnou váhu  $k$ .

Musí platit  $nk = 3(1 + 2 + \dots + n)$ , odtud  $k = 3(n + 1)/2$ .

Ale  $k$  není celé číslo! (liché·liché/2).

Dostáváme **SPOR**.



## Neúplný turnaj – každý tým hraje tři zápasy

Počet zápasů:  $r = 3$

Spravedlivý neúplný turnaj, kdy každý hraje tři zápasy neexistuje!

Důkaz v jazyce teorie grafů.

Využijeme princip sudosti: Každý graf, ve kterém jsou všechny vrcholy lichého stupně, musí mít sudý počet vrcholů.

Dále postupujeme **sporem**.

Každý vrchol (tým) hraje tři zápasy – jeho ohodnocení se započítá do váhy třem sousedním vrcholům.

Každý z  $n$  vrcholů (týmů) má stejnou váhu  $k$ .

Musí platit  $nk = 3(1 + 2 + \dots + n)$ , odtud  $k = 3(n + 1)/2$ .

Ale  $k$  není celé číslo! (liché·liché/2).

Dostáváme **SPOR**.



## Neúplný turnaj – každý tým hraje tři zápasy

Počet zápasů:  $r = 3$

Spravedlivý neúplný turnaj, kdy každý hraje tři zápasy neexistuje!

Důkaz v jazyce teorie grafů.

Využijeme princip sudosti: Každý graf, ve kterém jsou všechny vrcholy lichého stupně, musí mít sudý počet vrcholů.

Dále postupujeme **sporem**.

Každý vrchol (tým) hraje tři zápasy – jeho ohodnocení se započítá do váhy třem sousedním vrcholům.

Každý z  $n$  vrcholů (týmů) má stejnou váhu  $k$ .

Musí platit  $nk = 3(1 + 2 + \dots + n)$ , odtud  $k = 3(n + 1)/2$ .

Ale  $k$  není celé číslo! (liché·liché/2).

Dostáváme **SPOR**.



## Neúplný turnaj – každý tým hraje tři zápasy

Počet zápasů:  $r = 3$

Spravedlivý neúplný turnaj, kdy každý hraje tři zápasy neexistuje!

Důkaz v jazyce teorie grafů.

Využijeme princip sudosti: Každý graf, ve kterém jsou všechny vrcholy lichého stupně, musí mít sudý počet vrcholů.

Dále postupujeme **sporem**.

Každý vrchol (tým) hraje tři zápasy – jeho ohodnocení se započítá do váhy třem sousedním vrcholům.

Každý z  $n$  vrcholů (týmů) má stejnou váhu  $k$ .

Musí platit  $nk = 3(1 + 2 + \dots + n)$ , odtud  $k = 3(n + 1)/2$ .

Ale  $k$  není celé číslo! (liché·liché/2).

Dostáváme **SPOR**.



## Neúplný turnaj – každý tým hraje tři zápasy

Počet zápasů:  $r = 3$

Spravedlivý neúplný turnaj, kdy každý hraje tři zápasy neexistuje!

Důkaz v jazyce teorie grafů.

Využijeme princip sudosti: Každý graf, ve kterém jsou všechny vrcholy lichého stupně, musí mít sudý počet vrcholů.

Dále postupujeme **sporem**.

Každý vrchol (tým) hraje tři zápasy – jeho ohodnocení se započítá do váhy třem sousedním vrcholům.

Každý z  $n$  vrcholů (týmů) má stejnou váhu  $k$ .

Musí platit  $nk = 3(1 + 2 + \dots + n)$ , odtud  $k = 3(n + 1)/2$ .

Ale  $k$  není celé číslo! (liché·liché/2).

Dostáváme **SPOR**.



## Neúplný turnaj – každý tým hraje tři zápasy

Počet zápasů:  $r = 3$

Spravedlivý neúplný turnaj, kdy každý hraje tři zápasy neexistuje!

Důkaz v jazyce teorie grafů.

Využijeme princip sudosti: Každý graf, ve kterém jsou všechny vrcholy lichého stupně, musí mít sudý počet vrcholů.

Dále postupujeme **sporem**.

Každý vrchol (tým) hraje tři zápasy – jeho ohodnocení se započítá do váhy třem sousedním vrcholům.

Každý z  $n$  vrcholů (týmů) má stejnou váhu  $k$ .

Musí platit  $nk = 3(1 + 2 + \dots + n)$ , odtud  $k = 3(n + 1)/2$ .

Ale  $k$  není celé číslo! (liché·liché/2).

Dostáváme **SPOR**.



## Lze zobecnit

Věta (Fronček, Kovářová, K.; 2006)

Pro sudá  $n$  existuje  $r$ -pravidelný distance magic graf právě tehdy, když  $2 \leq r \leq n - 2$  je sudé a současně  $n \equiv 0 \pmod{4}$  nebo  $r \equiv 0 \pmod{4}$ .

... ale to nejsou úplně “jednoduché” výsledky...





## Lze zobecnit

Věta (Fronček, Kovářová, K.; 2006)

Pro sudá  $n$  existuje  $r$ -pravidelný distance magic graf právě tehdy, když  $2 \leq r \leq n - 2$  je sudé a současně  $n \equiv 0 \pmod{4}$  nebo  $r \equiv 0 \pmod{4}$ .

... ale to nejsou úplně “jednoduché” výsledky...



## Část 5.

Několik zajímavějších (složitějších) výsledků



## Dosažené výsledky

První články;

- M. Miller, C. Rodger and R. Simanjuntak: Distance magic labelings of graphs, *Australasian Journal of Combinatorics*, 28 (2003), 305–315.
- V. Vilfred:  $\Sigma$ -labelled graph and Circulant Graphs, *Ph.D. Thesis*, University of Kerala, Trivandrum, India, (1994)

Dnes už desítky článků.

- J.A. Gallian, A dynamic survey of graph labeling, *The Electronic Journal of Combinatorics*, DS 6 (2010).
- S. Arumugam, et al: Distance magic graphs — A Survey, *The Journal of Indonesian Mathematics Society*, 2011, (preprint)



## Dosažené výsledky

První články;

- M. Miller, C. Rodger and R. Simanjuntak: Distance magic labelings of graphs, *Australasian Journal of Combinatorics*, 28 (2003), 305–315.
- V. Vilfred:  $\Sigma$ -labelled graph and Circulant Graphs, *Ph.D. Thesis*, University of Kerala, Trivandrum, India, (1994)

Dnes už desítky článků.

- J.A. Gallian, A dynamic survey of graph labeling, *The Electronic Journal of Combinatorics*, DS 6 (2010).
- S. Arumugam, et al: Distance magic graphs — A Survey, *The Journal of Indonesian Mathematics Society*, 2011, (preprint)



## Dosažené výsledky (pokračování)

### Věta (Fronček, Kovářová, K.; 2006)

Pro sudá  $n$  existuje  $r$ -pravidelný distance magic graf právě tehdy, když  $2 \leq r \leq n - 2$  je sudé a současně  $n \equiv 0 \pmod{4}$  nebo  $r \equiv 0 \pmod{4}$ .

### Věta (Fronček; 2007)

Mějme lichá čísla  $n, q \in \mathbb{N}$  a  $s \in \mathbb{N}$ , kde  $q \geq 3$ ,  $s \geq 1$ . Pro  $r = 2^s q$ ,  $q|n$  and  $n \geq r + q$  existuje  $r$ -pravidelný distance magic graf na  $n$  vrcholech.



## Dosažené výsledky (pokračování)

### Věta (Fronček, Kovářová, K.; 2006)

Pro sudá  $n$  existuje  $r$ -pravidelný distance magic graf právě tehdy, když  $2 \leq r \leq n - 2$  je sudé a současně  $n \equiv 0 \pmod{4}$  nebo  $r \equiv 0 \pmod{4}$ .

### Věta (Fronček; 2007)

Mějme lichá čísla  $n, q \in \mathbb{N}$  a  $s \in \mathbb{N}$ , kde  $q \geq 3$ ,  $s \geq 1$ . Pro  $r = 2^s q$ ,  $q|n$  and  $n \geq r + q$  existuje  $r$ -pravidelný distance magic graf na  $n$  vrcholech.



## Dosažené výsledky (pokračování)

### Věta (Silber; 2010)

Pro přirozená čísla  $n, r$  existuje  $r$ -pravidelný distance magic graf na  $n$  vrcholech, jestliže existuje  $r$ -pravidelný graf na  $m$  vrcholech, přičemž platí  $m = kl \equiv 1 \pmod{1}$ , kde  $k, l \geq 1$  a  $r = sl$  kde  $s \leq k - 1$  a současně platí  $n - m \geq r + 2$  a buď  $r \equiv 0 \pmod{4}$  nebo  $n - m \equiv 0 \pmod{4}$ .

### Věta (Silber, K.; 2011)

Pro každé přirozené číslo  $n$  existuje alespoň jedno takové přirozené číslo  $r$ , že existuje  $r$ -pravidelný distance magic graf na  $n$  vrcholech právě tehdy, když  $n \neq 1, 2, 3, 5, 7, 11$ .



## Dosažené výsledky (pokračování)

### Věta (Silber; 2010)

Pro přirozená čísla  $n, r$  existuje  $r$ -pravidelný distance magic graf na  $n$  vrcholech, jestliže existuje  $r$ -pravidelný graf na  $m$  vrcholech, přičemž platí  $m = kl \equiv 1 \pmod{1}$ , kde  $k, l \geq 1$  a  $r = sl$  kde  $s \leq k - 1$  a současně platí  $n - m \geq r + 2$  a buď  $r \equiv 0 \pmod{4}$  nebo  $n - m \equiv 0 \pmod{4}$ .

### Věta (Silber, K.; 2011)

Pro každé přirozené číslo  $n$  existuje alespoň jedno takové přirozené číslo  $r$ , že existuje  $r$ -pravidelný distance magic graf na  $n$  vrcholech právě tehdy, když  $n \neq 1, 2, 3, 5, 7, 11$ .





## V přehledovém článku (Arumugam et al.)

- Klasifikujte všechny 4-pravidelné distance magic grafy.
- Existuje distance magic graf s magickou konstantou rovnou mocnině 2?
- Existuje  $r$ -pravidelný distance magic graf s  $n$  vrcholy, kde  $n$  je liché a  $r$  je mocnina 2?
- Existuje distance magic graf se dvěma různými distance magic ohodnoceními s různými magickými konstantami?
- Pro sudé  $n \geq 4$ , není hyperkrychle  $Q_n$  řádu  $n$  distance magic grafem.



## Nové výsledky

Věta (Fronček, Kovářová, K.; 2011)

4-pravidelný distance magic graf na  $n$  vrcholech existuje právě tehdy, když  $n \geq 17$ .

Věta (Fronček, Kovářová, K.; 2011)

Existuje nekonečně mnoho graf (4-pravidelných) s magickou konstantou rovnou mocnině 2.

Věta (Fronček et al.; 2011)

Hyperkrychle  $Q_6$  je distance magic.



## Nové výsledky

Věta (Fronček, Kovářová, K.; 2011)

4-pravidelný distance magic graf na  $n$  vrcholech existuje právě tehdy, když  $n \geq 17$ .

Věta (Fronček, Kovářová, K.; 2011)

Existuje nekonečně mnoho graf (4-pravidelných) s magickou konstantou rovnou mocnině 2.

Věta (Fronček et al.; 2011)

Hyperkrychle  $Q_6$  je distance magic.



## Nové výsledky

Věta (Fronček, Kovářová, K.; 2011)

4-pravidelný distance magic graf na  $n$  vrcholech existuje právě tehdy, když  $n \geq 17$ .

Věta (Fronček, Kovářová, K.; 2011)

Existuje nekonečně mnoho graf (4-pravidelných) s magickou konstantou rovnou mocnině 2.

Věta (Fronček et al.; 2011)

Hyperkrychle  $Q_6$  je distance magic.



## Dosažené výsledky (pokračování)

Věta (Silber, Kabelíková, Kravčenko, K.; 201?)

6-pravidelný distance magic graf na  $n$  vrcholech existuje právě tehdy, když  $n = 9$  nebo  $n \geq 13$ .

Věta (Silber, Kabelíková, Kravčenko, K.; 201?)

8-, 10-, 12-pravidelný distance magic graf na  $n$  vrcholech existuje právě tehdy, když  $n \geq 15$ .

Věta (Krbeček, Žáček, K.; 201?)

14-pravidelný distance magic graf na  $n$  vrcholech existuje právě tehdy, když  $n \geq 19$ .



## Dosažené výsledky (pokračování)

Věta (Silber, Kabelíková, Kravčenko, K.; 201?)

6-pravidelný distance magic graf na  $n$  vrcholech existuje právě tehdy, když  $n = 9$  nebo  $n \geq 13$ .

Věta (Silber, Kabelíková, Kravčenko, K.; 201?)

8-, 10-, 12-pravidelný distance magic graf na  $n$  vrcholech existuje právě tehdy, když  $n \geq 15$ .

Věta (Krbeček, Žáček, K.; 201?)

14-pravidelný distance magic graf na  $n$  vrcholech existuje právě tehdy, když  $n \geq 19$ .



## Dosažené výsledky (pokračování)

Věta (Silber, Kabelíková, Kravčenko, K.; 201?)

6-pravidelný distance magic graf na  $n$  vrcholech existuje právě tehdy, když  $n = 9$  nebo  $n \geq 13$ .

Věta (Silber, Kabelíková, Kravčenko, K.; 201?)

8-, 10-, 12-pravidelný distance magic graf na  $n$  vrcholech existuje právě tehdy, když  $n \geq 15$ .

Věta (Krbeček, Žáček, K.; 201?)

14-pravidelný distance magic graf na  $n$  vrcholech existuje právě tehdy, když  $n \geq 19$ .



## Dosažené výsledky (pokračování)

Věta (Silber, K.; 201?)

$(n - 3)$ -pravidelný distance magic graf na  $n$  vrcholech existuje právě tehdy, když  $n = 3t$ .

Věta (Žídek, K.; 201?)

$(n - 5)$ -pravidelný distance magic graf na  $n$  vrcholech existuje právě tehdy, když  $n \geq 17$ .

Věta (Žídek, K.; 201?)

$(n - 7)$ -pravidelný distance magic graf na  $n$  vrcholech existuje právě tehdy, když  $n \geq 13$  (?). Chybí dořešit některé konečné případy!





## Dosažené výsledky (pokračování)

Věta (Silber, K.; 201?)

$(n - 3)$ -pravidelný distance magic graf na  $n$  vrcholech existuje právě tehdy, když  $n = 3t$ .

Věta (Žídek, K.; 201?)

$(n - 5)$ -pravidelný distance magic graf na  $n$  vrcholech existuje právě tehdy, když  $n \geq 17$ .

Věta (Žídek, K.; 201?)

$(n - 7)$ -pravidelný distance magic graf na  $n$  vrcholech existuje právě tehdy, když  $n \geq 13$  (?). Chybí dořešit některé konečné případy!



## Dosažené výsledky (pokračování)

Věta (Silber, K.; 201?)

$(n - 3)$ -pravidelný distance magic graf na  $n$  vrcholech existuje právě tehdy, když  $n = 3t$ .

Věta (Žídek, K.; 201?)

$(n - 5)$ -pravidelný distance magic graf na  $n$  vrcholech existuje právě tehdy, když  $n \geq 17$ .

Věta (Žídek, K.; 201?)

$(n - 7)$ -pravidelný distance magic graf na  $n$  vrcholech existuje právě tehdy, když  $n \geq 13$  (?). Chybí dořešit některé konečné případy!



## Dosažené výsledky (pokračování)

Věta (Silber, K.; 201?)

$(n - 3)$ -pravidelný distance magic graf na  $n$  vrcholech existuje právě tehdy, když  $n = 3t$ .

Věta (Žídek, K.; 201?)

$(n - 5)$ -pravidelný distance magic graf na  $n$  vrcholech existuje právě tehdy, když  $n \geq 17$ .

Věta (Žídek, K.; 201?)

$(n - 7)$ -pravidelný distance magic graf na  $n$  vrcholech existuje právě tehdy, když  $n \geq 13$  (?). **Chybí dořešit některé konečné případy!**



## Počítačový program

Proč nenajdeme chybějící grafy počítačem?

- Pro malá  $n$  to je možné  $n < 30$ .
- Výpočet trvá desítky hodin ( $n = 25$ ).
- Narážíme na fenomén “kombinatorické exploze”.

$$25! = 15511210043330985984000000 \doteq 1.5 \cdot 10^{25}$$

$$30! = 265252859812191058636308480000000 \doteq 2.6 \cdot 10^{32}$$

$$40! = 815915283247897734345611269596115894272000000000 \doteq 8.2 \cdot 10^{47}$$

Počet atomů na Zemi je asi  $9 \cdot 10^{49}$ .



## Počítačový program

Proč nenajdeme chybějící grafy počítačem?

- Pro malá  $n$  to je možné  $n < 30$ .
  - Výpočet trvá desítky hodin ( $n = 25$ ).
  - Narážíme na fenomén “kombinatorické exploze”.

$$25! = 15511210043330985984000000 \doteq 1.5 \cdot 10^{25}$$

$$30! = 265252859812191058636308480000000 \doteq 2.6 \cdot 10^{32}$$

$$40! = 815915283247897734345611269596115894272000000000 \doteq 8.2 \cdot 10^{47}$$

Počet atomů na Zemi je asi  $9 \cdot 10^{49}$ .



## Počítačový program

Proč nenajdeme chybějící grafy počítačem?

- Pro malá  $n$  to je možné  $n < 30$ .
- Výpočet trvá desítky hodin ( $n = 25$ ).
- Narážíme na fenomén “kombinatorické exploze”.

$$25! = 15511210043330985984000000 \doteq 1.5 \cdot 10^{25}$$

$$30! = 265252859812191058636308480000000 \doteq 2.6 \cdot 10^{32}$$

$$40! = 815915283247897734345611269596115894272000000000 \doteq 8.2 \cdot 10^{47}$$

Počet atomů na Zemi je asi  $9 \cdot 10^{49}$ .



## Počítačový program

Proč nenajdeme chybějící grafy počítačem?

- Pro malá  $n$  to je možné  $n < 30$ .
- Výpočet trvá desítky hodin ( $n = 25$ ).
- Narážíme na fenomén “kombinatorické exploze”.

$$25! = 15511210043330985984000000 \doteq 1.5 \cdot 10^{25}$$

$$30! = 265252859812191058636308480000000 \doteq 2.6 \cdot 10^{32}$$

$$40! = 815915283247897734345611269596115894272000000000 \doteq 8.2 \cdot 10^{47}$$

Počet atomů na Zemi je asi  $9 \cdot 10^{49}$ .



## Počítačový program

Proč nenajdeme chybějící grafy počítačem?

- Pro malá  $n$  to je možné  $n < 30$ .
- Výpočet trvá desítky hodin ( $n = 25$ ).
- Narážíme na fenomén “kombinatorické exploze”.

$$25! = 15511210043330985984000000 \doteq 1.5 \cdot 10^{25}$$

$$30! = 265252859812191058636308480000000 \doteq 2.6 \cdot 10^{32}$$

$$40! = 815915283247897734345611269596115894272000000000 \doteq 8.2 \cdot 10^{47}$$

Počet atomů na Zemi je asi  $9 \cdot 10^{49}$ .





## Počítačový program

Proč nenajdeme chybějící grafy počítačem?

- Pro malá  $n$  to je možné  $n < 30$ .
- Výpočet trvá desítky hodin ( $n = 25$ ).
- Narážíme na fenomén “kombinatorické exploze”.

$$25! = 15511210043330985984000000 \doteq 1.5 \cdot 10^{25}$$

$$30! = 265252859812191058636308480000000 \doteq 2.6 \cdot 10^{32}$$

$$40! = 815915283247897734345611269596115894272000000000 \doteq 8.2 \cdot 10^{47}$$

Počet atomů na Zemi je asi  $9 \cdot 10^{49}$ .



## Část 6.

Otevřené problémy.



## Otevřené problémy

- 16-pravidelné grafy (zápasy pro  $n$  týmů, kdy každý hraje 16 zápasů)
  - $(n - 7)$ -pravidelný graf pro  $n = 39, 53, 65$
  - $(n - 9)$ -pravidelný graf, mnoho případů.
  - Hyperkrychle  $Q_n$  řádu  $n = 4t + 2$

Chcete se přidat? Můžete!



## Otevřené problémy

- 16-pravidelné grafy (zápasy pro  $n$  týmů, kdy každý hraje 16 zápasů)
- $(n - 7)$ -pravidelný graf pro  $n = 39, 53, 65$
- $(n - 9)$ -pravidelný graf, mnoho případů.
- Hyperkrychle  $Q_n$  řádu  $n = 4t + 2$

Chcete se přidat? Můžete!



## Otevřené problémy

- 16-pravidelné grafy (zápasy pro  $n$  týmů, kdy každý hraje 16 zápasů)
- $(n - 7)$ -pravidelný graf pro  $n = 39, 53, 65$
- $(n - 9)$ -pravidelný graf, mnoho případů.
- Hyperkrychle  $Q_n$  řádu  $n = 4t + 2$

Chcete se přidat? Můžete!



## Otevřené problémy

- 16-pravidelné grafy (zápasy pro  $n$  týmů, kdy každý hraje 16 zápasů)
- $(n - 7)$ -pravidelný graf pro  $n = 39, 53, 65$
- $(n - 9)$ -pravidelný graf, mnoho případů.
- Hyperkrychle  $Q_n$  řádu  $n = 4t + 2$

Chcete se přidat? Můžete!



## Otevřené problémy

- 16-pravidelné grafy (zápasy pro  $n$  týmů, kdy každý hraje 16 zápasů)
- $(n - 7)$ -pravidelný graf pro  $n = 39, 53, 65$
- $(n - 9)$ -pravidelný graf, mnoho případů.
- Hyperkrychle  $Q_n$  řádu  $n = 4t + 2$

Chcete se přidat? Můžete!



**Děkuji za pozornost.**

Vytvořeno v rámci realizace projektu *Matematika pro inženýry 21. století* (reg. č. CZ.1.07/2.2.00/07.0332), na kterém se společně podílela Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni.



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ