Nerovnosti

Petr Vodstrčil

petr.vodstrcil@vsb.cz

Katedra aplikované matematiky, Fakulta elektrotechniky a informatiky,
Vysoká škola báňská–Technická univerzita Ostrava

ŠKOMAM, 3.2. 2011

Věta (AG nerovnost)

Nechť $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ *a* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *jsou nezáporná reálná čísla. Pak platí*

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

Rovnost v poslední nerovnosti nastane právě tehdy, když

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n.$$

Věta (AG nerovnost)

Nechť $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou nezáporná reálná čísla. Pak platí

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}.$$

Rovnost v poslední nerovnosti nastane právě tehdy, když

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n.$$

Důkaz.

Důkaz zatím provedeme pro $n = 2$. To je ale snadné, neboť platí ekvivalence

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} \iff \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} \geq x_1 x_2 \iff (x_1 + x_2)^2 \geq 4 x_1 x_2 \iff$$

$$\iff x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \geq 4x_1x_2 \iff x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 \geq 0.$$

$\square$

Poznámka

Pro $n = 2$ má AG nerovnost

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}$$

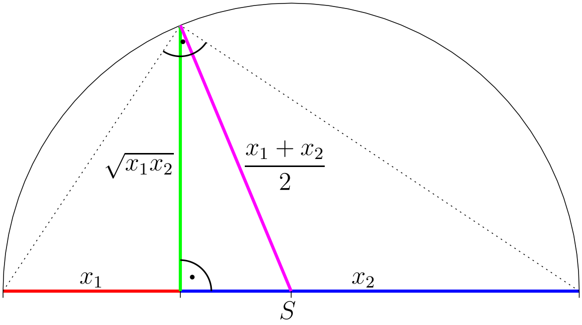
i svůj geometrický význam (viz obrázek).

Poznámka

Pro $n = 2$ má AG nerovnost

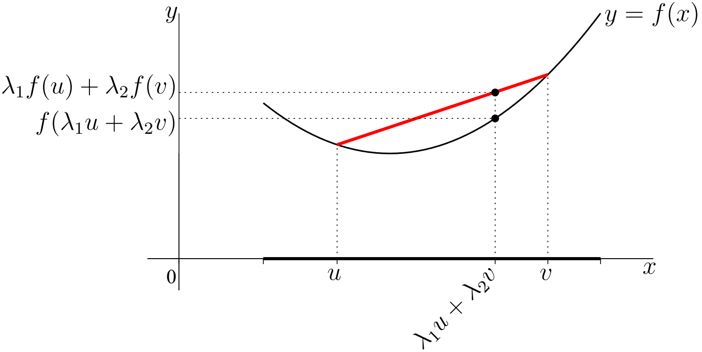
$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}$$

i svůj geometrický význam (viz obrázek).

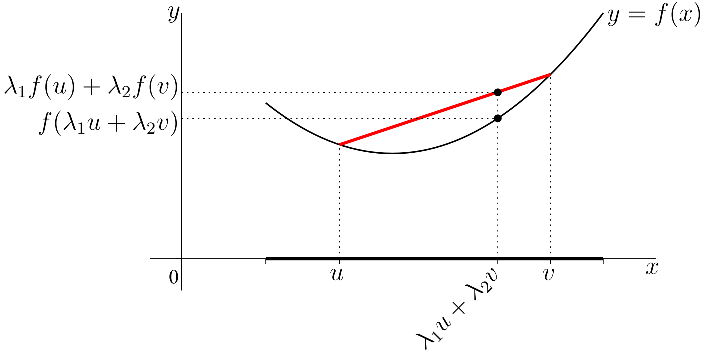


Ryze konvexní funkce:

Ryze konvexní funkce:



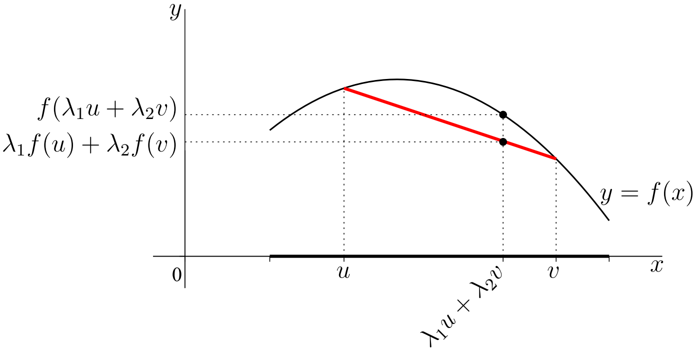
Ryze konvexní funkce:



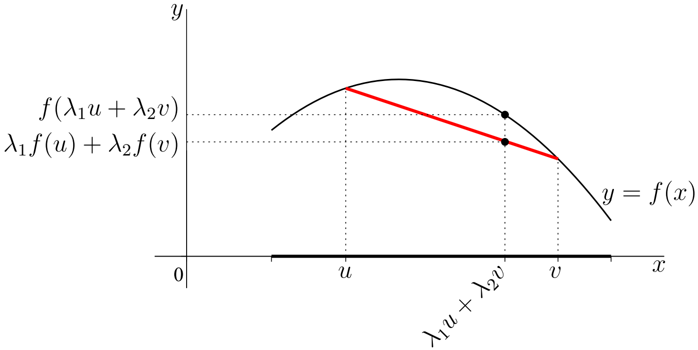
$$f(\lambda_1 u + \lambda_2 v) \leq \lambda_1 f(u) + \lambda_2 f(v)$$

Ryze konkávní funkce:

Ryze konkávní funkce:



Ryze konkávní funkce:



$$f(\lambda_1 u + \lambda_2 v) \geq \lambda_1 f(u) + \lambda_2 f(v)$$

Definice

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je ryze konvexní, resp. ryze konkávní, na intervalu* I, *pokud pro všechna* $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ *(splňující* $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$*) a všechna* $u, v \in I$ *platí*

$$f(\lambda_1 u + \lambda_2 v) \leq \lambda_1 f(u) + \lambda_2 f(v), \tag{1}$$

resp.

$$f(\lambda_1 u + \lambda_2 v) \geq \lambda_1 f(u) + \lambda_2 f(v), \tag{2}$$

přičemž rovnost v (1), *resp. v* (2), *nastává právě tehdy, když* $u = v$.

Definice

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je ryze konvexní, resp. ryze konkávní, na intervalu* I*, pokud pro všechna* $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ *(splňující* $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$*) a všechna* $u, v \in I$ *platí*

$$f(\lambda_1 u + \lambda_2 v) \le \lambda_1 f(u) + \lambda_2 f(v), \tag{1}$$

resp.

$$f(\lambda_1 u + \lambda_2 v) \ge \lambda_1 f(u) + \lambda_2 f(v), \tag{2}$$

přičemž rovnost v (1)*, resp. v* (2)*, nastává právě tehdy, když* $u = v$.

Věta (souvislost s derivacemi)

Je-li $f''(x) > 0$*, resp.* $f''(x) < 0$*, na intervalu* I*, pak funkce* f *je na* I *ryze konvexní, resp. ryze konkávní.*

Zvolme $f(x) = \log x$ (ryze konkávní funkce na intervalu $(0, +\infty)$). Pak pro libovolná $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ (splňující $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$) a libovolná $u, v > 0$ platí

$$\log(\lambda_1 u + \lambda_2 v) \geq \lambda_1 \log u + \lambda_2 \log v,$$

Zvolme $f(x) = \log x$ (ryze konkávní funkce na intervalu $(0, +\infty)$). Pak pro libovolná $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ (splňující $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$) a libovolná $u, v > 0$ platí

$$\log(\lambda_1 u + \lambda_2 v) \geq \lambda_1 \log u + \lambda_2 \log v,$$

což lze ekvivalentně přepsat jako

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v \geq u^{\lambda_1} \cdot v^{\lambda_2}. \qquad (\heartsuit)$$

Zvolme $f(x) = \log x$ (ryze konkávní funkce na intervalu $(0, +\infty)$). Pak pro libovolná $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ (splňující $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$) a libovolná $u, v > 0$ platí

$$\log(\lambda_1 u + \lambda_2 v) \geq \lambda_1 \log u + \lambda_2 \log v,$$

což lze ekvivalentně přepsat jako

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v \geq u^{\lambda_1} \cdot v^{\lambda_2}. \tag{$\heartsuit$}$$

Nerovnost ($\heartsuit$) platí dokonce i v případě nulového u nebo v (pak je totiž pravá strana v ($\heartsuit$) nulová). Rovnost v ($\heartsuit$) nastane právě tehdy, když $u = v$.

Zvolme $f(x) = \log x$ (ryze konkávní funkce na intervalu $(0, +\infty)$). Pak pro libovolná $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ (splňující $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$) a libovolná $u, v > 0$ platí

$$\log(\lambda_1 u + \lambda_2 v) \geq \lambda_1 \log u + \lambda_2 \log v,$$

což lze ekvivalentně přepsat jako

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v \geq u^{\lambda_1} \cdot v^{\lambda_2}. \qquad (\heartsuit)$$

Nerovnost $(\heartsuit)$ platí dokonce i v případě nulového u nebo v (pak je totiž pravá strana v $(\heartsuit)$ nulová). Rovnost v $(\heartsuit)$ nastane právě tehdy, když $u = v$.

Pokud v $(\heartsuit)$ zvolíme $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$, $u = x_1$ (≥ 0) a $v = x_2$ (≥ 0), dostaneme nerovnost

$$\frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 \geq x_1^{\frac{1}{2}} \cdot x_2^{\frac{1}{2}},$$

což je AG nerovnost pro $n = 2$.

Nyní se na základě získané nerovnosti

$$(\forall \lambda_1, \lambda_2 > 0;\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1)\,(\forall u, v \geq 0): \quad \lambda_1 u + \lambda_2 v \geq u^{\lambda_1} \cdot v^{\lambda_2} \qquad (\heartsuit)$$

pokusíme dokázat AG nerovnost pro obecné n.

Nyní se na základě získané nerovnosti

$$(\forall \lambda_1, \lambda_2 > 0;\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1)\,(\forall u, v \geq 0):\quad \lambda_1 u + \lambda_2 v \geq u^{\lambda_1} \cdot v^{\lambda_2} \qquad (\heartsuit)$$

pokusíme dokázat AG nerovnost pro obecné n.

Náznak důkazu AG nerovnosti pro obecné n.

Důkaz lze provést matematickou indukcí. My si ukážeme podstatu indukčního kroku. Pro $n = 2$ už jsme důkaz provedli.

$\underline{n = 3:}$

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{1}{3} x_3 \overset{\text{AG}}{\geq} \frac{2}{3} \underbrace{\sqrt{x_1 x_2}}_{u} + \frac{1}{3} \underbrace{x_3}_{v} \overset{(\heartsuit)}{\geq}$$

$$\geq \left(\sqrt{x_1 x_2}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot x_3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}.$$

Pokračování důkazu.

<u>$n = 4$:</u>

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} + \frac{1}{4} x_4 \overset{AG}{\geq} \frac{3}{4} \underbrace{\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}}_{u} + \frac{1}{4} \underbrace{x_4}_{v} \overset{(\heartsuit)}{\geq}$$

$$\geq \left(\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot x_4^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4}.$$

Tímto způsobem bychom mohli pokračovat dále. $\square$

Pokračování důkazu.

$\underline{n = 4:}$

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} + \frac{1}{4} x_4 \overset{\text{AG}}{\geq} \frac{3}{4} \underbrace{\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}}_{u} + \frac{1}{4} \underbrace{x_4}_{v} \overset{(\heartsuit)}{\geq}$$

$$\geq \left(\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot x_4^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4}.$$

Tímto způsobem bychom mohli pokračovat dále. $\square$

Domácí cvičení

- *Proveďte si indukční krok z důkazu AG nerovnosti obecně.*

Pokračování důkazu.

$n = 4$:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} + \frac{1}{4} x_4 \overset{AG}{\geq} \frac{3}{4} \underbrace{\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}}_{u} + \frac{1}{4} \underbrace{x_4}_{v} \overset{(\heartsuit)}{\geq}$$

$$\geq \left(\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot x_4^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4}.$$

Tímto způsobem bychom mohli pokračovat dále. □

Domácí cvičení

- *Proveďte si indukční krok z důkazu AG nerovnosti obecně.*
- *Zkuste si promyslet, proč v AG nerovnosti nastane rovnost právě tehdy, když* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Příklad (horní odhad faktoriálu)

Z AG nerovnosti vyplývá, že pro každé $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ platí

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} \overset{AG}{\leq} \frac{1 + 2 + \ldots + n}{n} = \frac{\frac{n}{2}(n+1)}{n} = \frac{n+1}{2},$$

Příklad (horní odhad faktoriálu)

Z AG nerovnosti vyplývá, že pro každé $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ *platí*

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} \overset{AG}{\leq} \frac{1 + 2 + \ldots + n}{n} = \frac{\frac{n}{2}(n+1)}{n} = \frac{n+1}{2},$$

odkud

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2} \right)^n .$$

Příklad (horní odhad faktoriálu)

Z AG nerovnosti vyplývá, že pro každé $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ platí

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} \overset{AG}{\leq} \frac{1 + 2 + \ldots + n}{n} = \frac{\frac{n}{2}(n+1)}{n} = \frac{n+1}{2},$$

odkud

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Poslední nerovnost přitom platí i pro $n = 1$ (a dokonce i pro $n = 0$), takže máme horní odhad faktoriálu pro libovolné $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Příklad (horní odhad faktoriálu)

Z AG nerovnosti vyplývá, že pro každé $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ *platí*

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} \overset{AG}{\leq} \frac{1 + 2 + \ldots + n}{n} = \frac{\frac{n}{2}(n+1)}{n} = \frac{n+1}{2},$$

odkud

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n .$$

Poslední nerovnost přitom platí i pro $n = 1$ *(a dokonce i pro* $n = 0$*), takže máme horní odhad faktoriálu pro libovolné* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Domácí cvičení

Pokuste se výše uvedený odhad faktoriálu dokázat bez použití AG nerovnosti.

Příklad

Ze všech válců o daném objemu $V > 0$ *najděte ten, který má nejmenší povrch.*

Příklad

Ze všech válců o daném objemu $V > 0$ najděte ten, který má nejmenší povrch.

Řešení.

Platí $V = \pi r^2 v \implies v = \frac{V}{\pi r^2}$. Odtud máme

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r v = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Příklad

Ze všech válců o daném objemu $V > 0$ najděte ten, který má nejmenší povrch.

Řešení.

Platí $V = \pi r^2 v \implies v = \frac{V}{\pi r^2}$. Odtud máme

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r v = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Z AG nerovnosti poté dostaneme

$$S = 2\pi r^2 + \frac{V}{r} + \frac{V}{r} \overset{\text{AG}}{\geq} 3\sqrt[3]{2\pi r^2 \cdot \frac{V}{r} \cdot \frac{V}{r}} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}.$$

Příklad

Ze všech válců o daném objemu $V > 0$ najděte ten, který má nejmenší povrch.

Řešení.

Platí $V = \pi r^2 v \implies v = \frac{V}{\pi r^2}$. Odtud máme

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r v = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Z AG nerovnosti poté dostaneme

$$S = 2\pi r^2 + \frac{V}{r} + \frac{V}{r} \overset{AG}{\geq} 3\sqrt[3]{2\pi r^2 \cdot \frac{V}{r} \cdot \frac{V}{r}} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}.$$

Rovnost nastane právě tehdy, když $2\pi r^2 = \frac{V}{r}$, tj. $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, odkud již snadno dopočítáme $v = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2r$ (tzv. rovnostranný válec). □

Další úlohy:

Příklad

Do kužele s poloměrem podstavy $r > 0$ *a výškou* $v > 0$ *vepište válec s maximálním možným objemem tak, aby podstavy obou těles ležely v jedné rovině. Určete poloměr podstavy a výšku tohoto válce.*

Další úlohy:

Příklad

Do kužele s poloměrem podstavy $r > 0$ *a výškou* $v > 0$ *vepište válec s maximálním možným objemem tak, aby podstavy obou těles ležely v jedné rovině. Určete poloměr podstavy a výšku tohoto válce.*

Příklad

Do elipsy o poloosách $a, b > 0$ *vepište obdélník tak, aby jeho strany byly rovnoběžné s osami elipsy a jeho obsah byl maximální.*

Soutěžní problém

Pomocí AG nerovnosti najděte největší hodnotu výrazu

$$V = x^{2010} - x^{2011}$$

na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Soutěžní problém

Pomocí AG nerovnosti najděte největší hodnotu výrazu

$$V = x^{2010} - x^{2011}$$

na intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

Řešení.

Platí

$$2010V = x^{2010} \cdot (2010 - 2010x) = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{\text{2010 krát}} \cdot (2010 - 2010x)$$

Odtud (podle AG nerovnosti)

$$\sqrt[2011]{2010V} \leq \frac{\overbrace{x + x + \ldots + x}^{\text{2010 krát}} + (2010 - 2010x)}{2011} = \frac{2010}{2011} \implies V \leq \frac{2010^{2010}}{2011^{2011}}.$$

Rovnost přitom nastane právě tehdy, když $x = 2010 - 2010x$, tj. $x = \frac{2010}{2011}$.

Závěr: Největší hodnota výrazu V na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ je $\frac{2010^{2010}}{2011^{2011}}$ (a to pro $x = \frac{2010}{2011}$). □

Děkuji za pozornost !!!