Karetní trik

Petr Kovář

Vysolá škola báňská – TU Ostrava,

ŠKOMAM, 3.února 2011

Trik s asistentkou

Petr Kovář & Pavla Kabelíková

Vysolá škola báňská – TU Ostrava,

ŠKOMAM, 3.února 2011

Popis

- divák vybere 5 karet (a předá je asistentce)

Popis

- divák vybere 5 karet (a předá je asistentce)
- asistentka vybere jednu kartu (a vrátí ji divákovi)

Popis

- divák vybere 5 karet (a předá je asistentce)
- asistentka vybere jednu kartu (a vrátí ji divákovi)
- asistentka zbývající karty seřadí do úhledného balíčku a předá kouzelníkovi (položí na stůl, napíše na tabuli, . . .)

Popis

- divák vybere 5 karet (a předá je asistentce)
- asistentka vybere jednu kartu (a vrátí ji divákovi)
- asistentka zbývající karty seřadí do úhledného balíčku a předá kouzelníkovi (položí na stůl, napíše na tabuli, ...)
- kouzelník se na karty podívá a pozná divákovu kartu

Popis

- divák vybere 5 karet (a předá je asistentce)
- asistentka vybere jednu kartu (a vrátí ji divákovi)
- asistentka zbývající karty seřadí do úhledného balíčku a předá kouzelníkovi
  (položí na stůl, napíše na tabuli, ...)
- kouzelník se na karty podívá a pozná divákovu kartu

Veškerá informace jen v předávaných kartách.

Popis

- divák vybere 5 karet (a předá je asistentce)
- asistentka vybere jednu kartu (a vrátí ji divákovi)
- asistentka zbývající karty seřadí do úhledného balíčku a předá kouzelníkovi (položí na stůl, napíše na tabuli, ...)
- kouzelník se na karty podívá a pozná divákovu kartu

Veškerá informace jen v předávaných kartách.

...Kolik nejvíce karet může mít balíček?

Teoretické maximum

- asistentka vybere jednu kartu z pěti $\binom{5}{1} = 5$

Teoretické maximum

- asistentka vybere jednu kartu z pěti $\binom{5}{1} = 5$
- pořadí čtyř karet $4! = 24$

Teoretické maximum

- asistentka vybere jednu kartu z pěti $\binom{5}{1} = 5$
- pořadí čtyř karet $4! = 24$
- jistě to není žádná ze 4 předaných karet

Teoretické maximum

- asistentka vybere jednu kartu z pěti $\binom{5}{1} = 5$
- pořadí čtyř karet $4! = 24$
- jistě to není žádná ze 4 předaných karet

Celkem $5 \cdot 24 + 4 = 124$ karet.

Teoretické maximum

- asistentka vybere jednu kartu z pěti $\binom{5}{1} = 5$
- pořadí čtyř karet $4! = 24$
- jistě to není žádná ze 4 předaných karet

Celkem $5 \cdot 24 + 4 = 124$ karet.

Tohoto maxima lze dosáhnout!

Existence řešení

Všech pětic z $n = 124$ karet je

$$p = \binom{124}{5} = 124 \cdot 123 \cdot 122 \cdot 121.$$

Existence řešení

Všech pětic z $n = 124$ karet je

$$p = \binom{124}{5} = 124 \cdot 123 \cdot 122 \cdot 121.$$

Všech čtveřic z $n = 124$ karet je

$$c = \binom{124}{4} = \frac{124 \cdot 123 \cdot 122 \cdot 121}{24} = \frac{p}{24}.$$

Existence řešení

Všech pětic z $n = 124$ karet je

$$p = \binom{124}{5} = 124 \cdot 123 \cdot 122 \cdot 121.$$

Všech čtveřic z $n = 124$ karet je

$$c = \binom{124}{4} = \frac{124 \cdot 123 \cdot 122 \cdot 121}{24} = \frac{p}{24}.$$

Různých pořadí čtyř karet je právě 24!

Existence řešení

Všech pětic z $n = 124$ karet je

$$p = \binom{124}{5} = 124 \cdot 123 \cdot 122 \cdot 121.$$

Všech čtveřic z $n = 124$ karet je

$$c = \binom{124}{4} = \frac{124 \cdot 123 \cdot 122 \cdot 121}{24} = \frac{p}{24}.$$

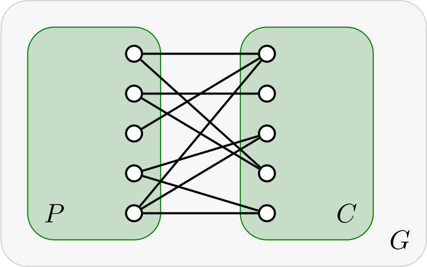
Různých pořadí čtyř karet je právě 24!

Stačí každé uspořádané čtveřici (a_1, a_2, a_3, a_4) jednoznačně přiřadit některou pětic $\{a_1, a_2, a_3, a_4, x\}$ (a naopak).

Hallova věta

Hallova věta

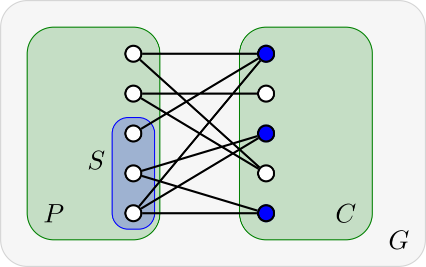
Nechť G je bipartitní graf s partitami P a C. Graf G má párování M, které saturuje všechny vrcholy množiny P právě tehdy, když $|S| \leq |N(S)|$ pro každou podmnožinu $S \subseteq P$.



Hallova věta

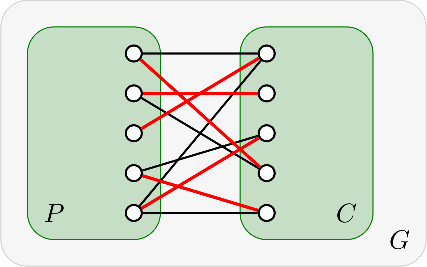
Hallova věta

Nechť G je bipartitní graf s partitami P a C. Graf G má párování M, které saturuje všechny vrcholy množiny P právě tehdy, když $|S| \leq |N(S)|$ pro každou podmnožinu $S \subseteq P$.



Hallova věta

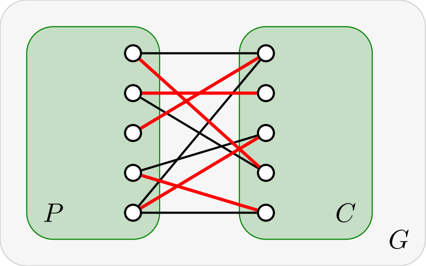
Nechť G je bipartitní graf s partitami P a C. Graf G má párování M, které saturuje všechny vrcholy množiny P právě tehdy, když $|S| \leq |N(S)|$ pro každou podmnožinu $S \subseteq P$.



Hallova věta

Hallova věta

Nechť G je bipartitní graf s partitami P a C. Graf G má párování M, které saturuje všechny vrcholy množiny P právě tehdy, když $|S| \leq |N(S)|$ pro každou podmnožinu $S \subseteq P$.



Důsledek

Každý pravidelný bipartitní graf s alespoň jednou hranou má úplné párování.

Existence z (důsledku) Hallovy věty

Sestavíme bipartitní graf $G = (P \cup C, E)$:

Existence z (důsledku) Hallovy věty

Sestavíme bipartitní graf $G = (P \cup C, E)$:
Partita P – všechny *neuspořádané* pětice karet.
Partita C – všechny *uspořádané* čtveřice karet.

Existence z (důsledku) Hallovy věty

Sestavíme bipartitní graf $G = (P \cup C, E)$:
Partita P – všechny *neuspořádané* pětice karet.
Partita C – všechny *uspořádané* čtveřice karet.

Každá partita má $124 \cdot 123 \cdot 122 \cdot 121 = 225\ 150\ 024$ vrcholů.

Existence z (důsledku) Hallovy věty

Sestavíme bipartitní graf $G = (P \cup C, E)$:
Partita P – všechny *neuspořádané* pětice karet.
Partita C – všechny *uspořádané* čtveřice karet.

Každá partita má $124 \cdot 123 \cdot 122 \cdot 121 = 225\ 150\ 024$ vrcholů.

Každou čtveřice spojena se 120 pěticemi (ve kterých se čtveřice vyskytuje).

Podobně každá pětice spojena se 120 čtveřicemi
($\binom{5}{4} = 5$ čtveřic, každou v některém z $P(4) = 24$ pořadí).

Existence z (důsledku) Hallovy věty

Sestavíme bipartitní graf $G = (P \cup C, E)$:
Partita P – všechny *neuspořádané* pětice karet.
Partita C – všechny *uspořádané* čtveřice karet.

Každá partita má $124 \cdot 123 \cdot 122 \cdot 121 = 225\ 150\ 024$ vrcholů.

Každou čtveřice spojena se 120 pěticemi (ve kterých se čtveřice vyskytuje).

Podobně každá pětice spojena se 120 čtveřicemi
($\binom{5}{4} = 5$ čtveřic, každou v některém z $P(4) = 24$ pořadí).

G je 120-pravidelný graf a podle (důsledku) Hallovy věty v něm existuje úplné párování M.
Stačí si zapamatovat $|M| = 225\ 150\ 024$ hran párování.

Bipartitní graf G s partitami P a C.

Bipartitní graf G s partitami P a C.

Pohár ŠKOMAMu

Kdybychom graf nakreslili na papír tak, aby na každý vrchol připadal $1\mathrm{cm}^2$, jak velký bude papír?
Kolik čtverečních metrů bude mít?

Pohár ŠKOMAMu

Kdybychom graf nakreslili na papír tak, aby na každý vrchol připadal $1\mathrm{cm}^2$, jak velký bude papír?
Kolik čtverečních metrů bude mít?

Odpověď: "fakt hodně" nestačí.

Není problém najít graf na počítači.
(hodiny strojového času)

Není problém najít graf na počítači.
(hodiny strojového času)

Párování jsme našli, pak jsme se to nadrtili . . .

Není problém najít graf na počítači.
(hodiny strojového času)

Párování jsme našli, pak jsme se to nadrtili . . . a je to!

Děkuji za pozornost.

Konstruktivní řešení

Existuje elegantnější řešení, samozřejmě.

Poznámka ke kongruencím

Kongruentní čísla

Řekneme, že dvě celá čísla a, b jsou *kongruentní modulo* n, jestliže dávají stejný zbytek po (celočíselném) dělení přirozeným číslem n. Číslo n nazýváme *modul*.

Píšeme $a \equiv b \pmod{n}$.

Poznámka ke kongruencím

Kongruentní čísla

Řekneme, že dvě celá čísla a, b jsou *kongruentní modulo* n, jestliže dávají stejný zbytek po (celočíselném) dělení přirozeným číslem n. Číslo n nazýváme *modul*.

Píšeme $a \equiv b \pmod{n}$.

Alternativně můžeme říci

- rozdíl $a - b$ je násobkem čísla n
- číslo b dostaneme z čísla a přičtením násobku čísla n.

Poznámka ke kongruencím

Kongruentní čísla

Řekneme, že dvě celá čísla a, b jsou *kongruentní modulo* n, jestliže dávají stejný zbytek po (celočíselném) dělení přirozeným číslem n. Číslo n nazýváme *modul*.

Píšeme $a \equiv b \pmod{n}$.

Alternativně můžeme říci

- rozdíl $a - b$ je násobkem čísla n
- číslo b dostaneme z čísla a přičtením násobku čísla n.

Pochopitelně můžeme pracovat s kongruentními výrazy.

Konstruktivní řešení

Označme si vytažené karty $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4$.
Asistenta vypočítá $s = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.
Označme $i \equiv s \pmod 5$, $i \in [0, 4]$.

Konstruktivní řešení

Označme si vytažené karty $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4$.
Asistenta vypočítá $s = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.
Označme $i \equiv s \pmod 5$, $i \in [0, 4]$.

Asistentka zvolí kartu $x = x_i$.

Konstruktivní řešení

Označme si vytažené karty $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4$.
Asistenta vypočítá $s = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.
Označme $i \equiv s \pmod 5$, $i \in [0, 4]$.

Asistentka zvolí kartu $x = x_i$.

Označíme $y = x - i$, kde $y \in [1, 120]$ pořadí chybějící karty.

Platí kongruence

$$\begin{aligned} x - y &\equiv i \pmod 5 \\ x - y &\equiv s \pmod 5. \end{aligned} \tag{1}$$

Označíme $r = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_i = s - x$.

$$x = s - r. \tag{2}$$

Dosazením (2) do (1) dostaneme kongruenci

$$\begin{aligned} s - r - y &\equiv s \pmod 5 \\ -r - y &\equiv 0 \pmod 5 \\ -r &\equiv y \pmod 5. \end{aligned} \tag{3}$$

Klíčové je, že pořadí y chybějící karty je kongruentní s r.

Mezi 120 zbývajícími kartami je $120/5 = 24$ kongruentních s číslem $-r \pmod 5$.
Zakomponuje se do posloupnosti čtyř předaných karet.

Mezi 120 zbývajícími kartami je $120/5 = 24$ kongruentních s číslem $-r \pmod 5$.
Zakomponuje se do posloupnosti čtyř předaných karet.

Pozor! Divák má kartu s číslem x (nikoliv y) a kouzelník nezná x, jen určí y.

Mezi 120 zbývajícími kartami je $120/5 = 24$ kongruentních s číslem $-r \pmod 5$.
Zakomponuje se do posloupnosti čtyř předaných karet.

Pozor! Divák má kartu s číslem x (nikoliv y) a kouzelník nezná x, jen určí y.

Podle domluvy divák dostane kartu x_i.
Jen díky úmluvě lze určit i (počet karet menších než y).
A kouzelník tak může vypočítat $x = y + i$.

Příklad

Divák vybere $12, 37, 38, 90, 105$.

Příklad

Divák vybere $12, 37, 38, 90, 105$.

Asistentka vypočítá $s = 12 + 37 + 38 + 90 + 105 \equiv$
$\equiv 2 + 2 + 3 + 0 + 0 \equiv 2 \pmod 5$.

Divákovi vrátí kartu $x_2 = 38$ a určí $y = 38 - s = 36$.

Příklad

Divák vybere $12, 37, 38, 90, 105$.

Asistentka vypočítá $s = 12 + 37 + 38 + 90 + 105 \equiv$
$\equiv 2 + 2 + 3 + 0 + 0 \equiv 2 \pmod 5$.

Divákovi vrátí kartu $x_2 = 38$ a určí $y = 38 - s = 36$.

Nyní $y = 36 = 7 \cdot 5 + 1 = 8 \cdot 5 - 4$ a proto $k = 8$.
Předávaná posloupnost karet je $37, 12, 105, 90$.

k	permutace	k	permutace
1	1 2 3 4	13	3 1 2 4
2	1 2 4 3	14	3 1 4 2
3	1 3 2 4	15	3 2 1 4
4	1 3 4 2	16	3 2 4 1
5	1 4 2 3	17	3 4 1 2
6	1 4 3 2	18	3 4 2 1
7	2 1 3 4	19	4 1 2 3
8	2 1 4 3	20	4 1 3 2
9	2 3 1 4	21	4 2 1 3
10	2 3 4 1	22	4 2 3 1
11	2 4 1 3	23	4 3 1 2
12	2 4 3 1	24	4 3 2 1

Tabulka: Tabulka pořadí permutací čtyř prvků.

Příklad (pokračování)

Karty nyní dostane do ruky kouzelník.
Protože $r = 12 + 37 + 90 + 105 \equiv 2 + 2 + 0 + 0 = 4$, tak ví, že $y \equiv -4 \pmod 5$.

Příklad (pokračování)

Karty nyní dostane do ruky kouzelník.
Protože $r = 12 + 37 + 90 + 105 \equiv 2 + 2 + 0 + 0 = 4$, tak ví, že $y \equiv -4 \pmod{5}$.

Podle pořadí $37, 12, 105, 90$ je $k = 8$ a snadno určí

$$y = 5k - r = 5 \cdot 8 - 4 = 36.$$

Příklad (pokračování)

Karty nyní dostane do ruky kouzelník.
Protože $r = 12 + 37 + 90 + 105 \equiv 2 + 2 + 0 + 0 = 4$, tak ví, že $y \equiv -4 \pmod 5$.

Podle pořadí $37, 12, 105, 90$ je $k = 8$ a snadno určí

$$y = 5k - r = 5 \cdot 8 - 4 = 36.$$

Protože $12 \leq 36$ a $37 \leq 36 + 1$, tak třicátá šestá chybějící karta je $x = y + 2 = 38$.

Kouzelník "uhodne" divákovu kartu 38.

Zobecnění

Co kdyby divák vybíral n karet (ne nutně 5)?

Zobecnění

Co kdyby divák vybíral n karet (ne nutně 5)?

n	karet nejvýše $n! + (n-1)$
2	3
3	8
4	27
5	124
6	725
7	5 046
8	40 327
9	362 888
10	3 628 809

Pozor!

Výpočty je nutno provádět v číselné soustavě $\pmod{n}$.

Zobecnění

Náměty na přemýšlení
Jak se úloha změní, když

- kdyby karty nebyly dvouhlavé?
  (mohli bychom rozlišit otočení karet)

Zobecnění

Náměty na přemýšlení
Jak se úloha změní, když

- kdyby karty nebyly dvouhlavé?
  (mohli bychom rozlišit otočení karet)
- Kdyby asistentka zbývající karty vyložila mohla vyložit postupně?
  (mohli bychom rozlišit pořadí, v jakém karty položí)

Zobecnění

Náměty na přemýšlení

Jak se úloha změní, když

- kdyby karty nebyly dvouhlavé?
  (mohli bychom rozlišit otočení karet)
- Kdyby asistentka zbývající karty vyložila mohla vyložit postupně?
  (mohli bychom rozlišit pořadí, v jakém karty položí)
- Kdyby asistentka měla dát
  - nejprve pět karet jednomu divákovi
  - a z vybraných karet vybere jednu jiný divák?

Zobecnění

Náměty na přemýšlení
Jak se úloha změní, když

- kdyby karty nebyly dvouhlavé?
  (mohli bychom rozlišit otočení karet)
- Kdyby asistentka zbývající karty vyložila mohla vyložit postupně?
  (mohli bychom rozlišit pořadí, v jakém karty položí)
- Kdyby asistentka měla dát
  - nejprve pět karet jednomu divákovi
  - a z vybraných karet vybere jednu jiný divák?
- kdyby asistentka divákovi vracela dvě karty?

Děkuji za pozornost.

(teď už doopravdy končím)