

Jak matematicky zachytit pohyb

Petra Šarmanová

Katedra aplikované matematiky
VŠB-Technická univerzita, Ostrava

ŠKOMAM 2010

- Jak popsat pohyb?

- Jak popsat pohyb?
- Jak popsat rychlost změny nějaké měnící se veličiny?

- Jak popsat pohyb?
- Jak popsat rychlost změny nějaké měnící se veličiny?
- Trvalo téměř 2000 let než byl nalezen způsob, jak matematicky zachytit pohyb.

- Jak popsat pohyb?
- Jak popsat rychlost změny nějaké měnící se veličiny?
- Trvalo téměř 2000 let než byl nalezen způsob, jak matematicky zachytit pohyb.
- 17. století – Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz – zakladatelé diferenciálního a integrálního počtu.

- 1643 – 1727
- narozen v Lincolnshire, Anglie
- studoval v Cambridge
- 1669 – 1696 profesor v Cambridge
- fyzik a astronom – mechanika, gravitační zákony, optika, teorie světla atd.
- matematik – diferenciální a integrální počet



Gottfried Wilhelm Leibniz

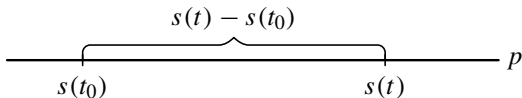
- 1646 – 1716
- narozen v Lipsku, Německo
- vystudoval logiku, filozofii a právo
- profesionální diplomat a právník
- v matematice byl samouk
- nezávisle na Newtonovi položil základy diferenciálního a integrálního počtu



- Uvažujme hmotný bod, který se pohybuje po přímce p . Označme t čas a $s(t)$ polohu, v níž se bod v čase t nachází.

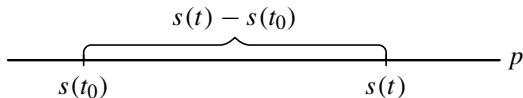
Mechanický model

- Uvažujme hmotný bod, který se pohybuje po přímce p . Označme t čas a $s(t)$ polohu, v níž se bod v čase t nachází.



Mechanický model

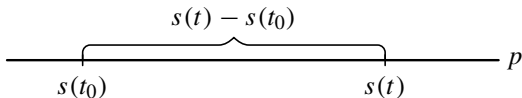
- Uvažujme hmotný bod, který se pohybuje po přímce p . Označme t čas a $s(t)$ polohu, v níž se bod v čase t nachází.



- Zvolíme časový okamžik t (např. $t > t_0$) a budeme pro názornost předpokládat, že v intervalu $\langle t_0, t \rangle$ se bod pohybuje doprava.

Mechanický model

- Uvažujme hmotný bod, který se pohybuje po přímce p . Označme t čas a $s(t)$ polohu, v níž se bod v čase t nachází.



- Zvolíme časový okamžik t (např. $t > t_0$) a budeme pro názornost předpokládat, že v intervalu $\langle t_0, t \rangle$ se bod pohybuje doprava.
- Průměrná rychlost za dobu $t - t_0$ (což je délka uvažovaného časového intervalu) je dráha, kterou bod v této době urazil, tj. $s(t) - s(t_0)$, dělená přírůstkem času $t - t_0$.

- Průměrná rychlost v_t v časovém intervalu $\langle t_0, t \rangle$ je tedy

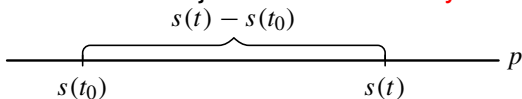
$$v_t = \frac{\text{dráha}}{\text{čas}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Mechanický model

- Průměrná rychlost v_t v časovém intervale $\langle t_0, t \rangle$ je tedy

$$v_t = \frac{\text{dráha}}{\text{čas}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

- Naším úkolem je určit **okamžitou rychlost** bodu v čase t_0 .

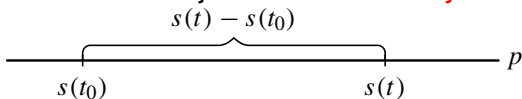


Mechanický model

- Průměrná rychlost v_t v časovém intervalu $\langle t_0, t \rangle$ je tedy

$$v_t = \frac{\text{dráha}}{\text{čas}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

- Naším úkolem je určit **okamžitou rychlost** bodu v čase t_0 .



- Přibližováním okamžiku t k t_0 , tj. zkracováním časového intervalu, přejde průměrná rychlost na časovém intervalu $\langle t_0, t \rangle$ v okamžitou rychlost v_0 v čase t_0 .

- Průměrná rychlost v_t v časovém intervalu $\langle t_0, t \rangle$ je tedy

$$v_t = \frac{\text{dráha}}{\text{čas}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Okamžitá rychlost

$$v_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

- Předchozí limita udává „rychlost změny“ polohy pohybujícího se bodu neboli okamžitou rychlost.

- Předchozí limita udává „rychlost změny“ polohy pohybujícího se bodu neboli okamžitou rychlost.
- Budeme-li zkoumat „rychlost změny“ rychlosti, dostaneme **okamžité zrychlení**. Tj.

$$a_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0},$$

- Chceme stanovit „rychlost změny“ funkce.

- Chceme stanovit „rychlost změny“ funkce.
- V grafickém znázornění to znamená najít v daném bodě x sklon křivky (to, jak je křivka strmá).

- Chceme stanovit „rychlost změny“ funkce.
- V grafickém znázornění to znamená najít v daném bodě x sklon křivky (to, jak je křivka strmá).
- Zatím nevíme, jak určit sklon libovolné křivky. Víme ale, jak určit sklon přímky, procházející dvěma body. Sklon přímky je dán velikostí úhlu, jenž svírá tato přímka s osou x .

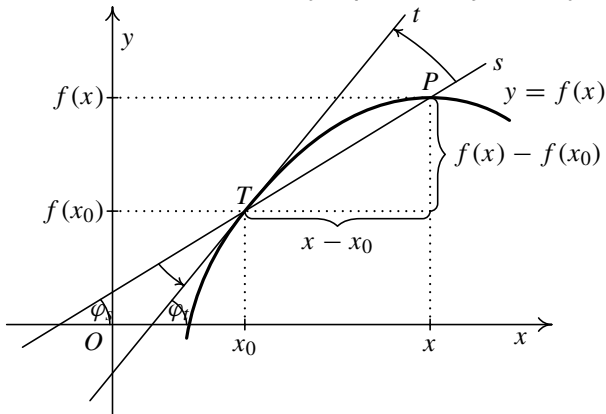
- Chceme stanovit „rychlost změny“ funkce.
- V grafickém znázornění to znamená najít v daném bodě x sklon křivky (to, jak je křivka strmá).
- Zatím nevíme, jak určit sklon libovolné křivky. Víme ale, jak určit sklon přímky, procházející dvěma body. Sklon přímky je dán velikostí úhlu, jenž svírá tato přímka s osou x .
- Číselně se tato velikost úhlu vyjadřuje jako **směrnice** přímky neboli tangens úhlu.

- Chceme stanovit „rychlost změny“ funkce.
- V grafickém znázornění to znamená najít v daném bodě x sklon křivky (to, jak je křivka strmá).
- Zatím nevíme, jak určit sklon libovolné křivky. Víme ale, jak určit sklon přímky, procházející dvěma body. Sklon přímky je dán velikostí úhlu, jenž svírá tato přímka s osou x .
- Číselně se tato velikost úhlu vyjadřuje jako **směrnice** přímky neboli tangens úhlu.
- Pokud přímka prudce roste, pak je její směrnice velké kladné číslo. Naopak, pokud prudce klesá, pak je směrnice velké záporné číslo.

- Jak určit sklon křivky v bodě T ?

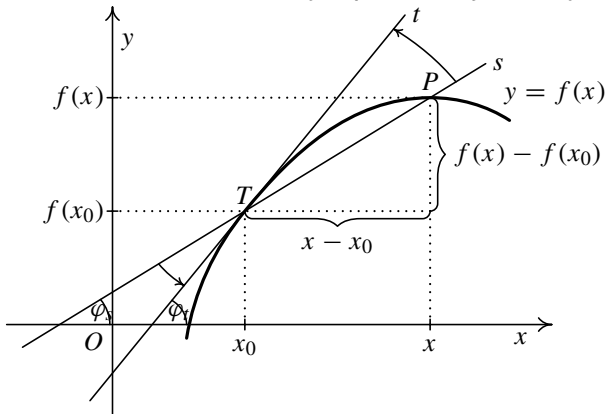
Geometrický model

- Jak určit sklon křivky v bodě T ?
- Umíme určit sklon sečny s procházející body T a P .



Geometrický model

- Jak určit sklon křivky v bodě T ?
- Umíme určit sklon sečny s procházející body T a P .



- Co se stane, budeme-li bod x přibližovat k bodu x_0 ?

Definice derivace - geometrický model

- Pro **směrnici sečny** s , která je určena dvěma body $T = (x_0, f(x_0))$ a $P = (x, f(x))$, platí

$$k_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- Pro **směrnici sečny** s , která je určena dvěma body $T = (x_0, f(x_0))$ a $P = (x, f(x))$, platí

$$k_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- Přibližujeme-li bod x k bodu x_0 , přejde úhel φ_s v úhel φ_t , a **směrnice sečny** $k_s = \operatorname{tg} \varphi_s$ **přejde ve směrnici tečny** $k_t = \operatorname{tg} \varphi_t$.

- Pro **směrnici sečny** s , která je určena dvěma body $T = (x_0, f(x_0))$ a $P = (x, f(x))$, platí

$$k_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Směrnice tečny

$$k_t = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Co již víme?

- Ukázali jsme si, že platí:

Okamžitá rychlost

$$v_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

- Ukázali jsme si, že platí:

Okamžitá rychlost

$$v_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Okamžité zrychlení

$$a_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0},$$

Co již víme?

- Ukázali jsme si, že platí:

Okamžitá rychlost

$$v_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Okamžité zrychlení

$$a_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0},$$

Směrnice tečny

$$k_t = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Definice derivace funkce v bodě

- Vzhledem k důležitosti zmíněné limity, zavádíme následující definici.

Definice

Nechť $x_0 \in D(f)$. Existuje-li limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

značíme ji $f'(x_0)$ a nazýváme **derivací funkce f v bodě x_0** .

Je-li $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že f má v bodě x_0 **vlastní derivaci**.

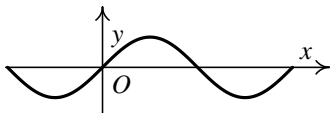
Je-li $f'(x_0) = \pm\infty$, říkáme, že funkce f má v bodě x_0 **nevlastní derivaci**.

Příklad 1

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = \sin x$ v bodě $x_0 = 0$.

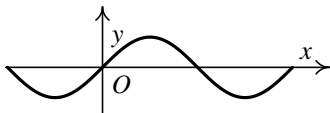
Příklad 1

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = \sin x$ v bodě $x_0 = 0$.



Příklad 1

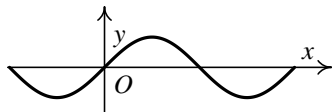
Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = \sin x$ v bodě $x_0 = 0$.



$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Příklad 1

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = \sin x$ v bodě $x_0 = 0$.



$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

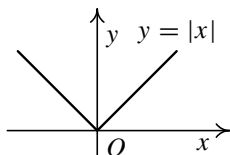
Geometrickým význam: Derivace $f'(0)$ představuje směrnici tečny ke grafu funkce v bodě $(0, f(0))$. Směrnice je tangenta úhlu, který svírá tečna s kladnou částí osy x . Tangens je roven 1 pro úhel $\pi/4$. Tečna tedy svírá s osou x úhel $\pi/4$.

Příklad 2

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě $x_0 = 0$.

Příklad 2

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě $x_0 = 0$.

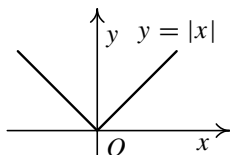


$$f: y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Vypočtěte jednostranné derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě 0.

Příklad 2

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě $x_0 = 0$.



$$f: y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Vypočtěme jednostranné derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě 0.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

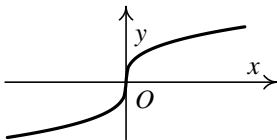
Tedy $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, a proto $f'(0)$ neexistuje. Graf funkce f má v tomto bodě jakýsi „hrot“, „špičku“. V takovém bodě nelze sestrojít tečnu.

Příklad 3

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v bodě $x_0 = 0$.

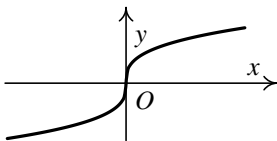
Příklad 3

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v bodě $x_0 = 0$.



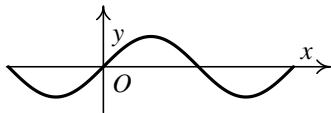
Příklad 3

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v bodě $x_0 = 0$.



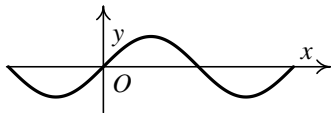
$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} = +\infty.$$

Co již víme?

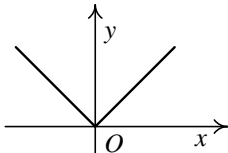


$$f'(0) = 1$$

Co již víme?

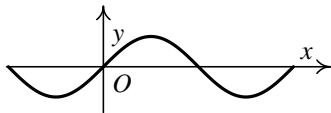


$$f'(0) = 1$$

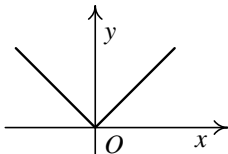


$f'(0)$ *neexistuje*

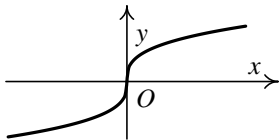
Co již víme?



$$f'(0) = 1$$



$f'(0)$ *neexistuje*



$$f'(0) = +\infty$$

Definice derivace - geometrický model

Definice derivace funkce na množině

- Doposud jsme mluvili o derivaci funkce v jednom bodě x_0 . Tato derivace je nějaké číslo.

Definice derivace funkce na množině

- Doposud jsme mluvili o derivaci funkce v jednom bodě x_0 . Tato derivace je nějaké číslo.
- Jestliže má f derivaci v každém bodě definičního oboru (popř. nějaké jeho části), dostáváme novou funkci f' definovanou takto:

Definice

Nechť existuje vlastní derivace $f'(x)$ funkce f pro všechna $x \in M$, kde $M \subset D(f)$. Pak funkci $f': y = f'(x), x \in M$, nazýváme **derivací funkce f na M** .

Derivace elementárních funkcí

$$1 \quad (c)' = 0, \quad c \in \mathbb{R} \text{ (konst.)}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$2 \quad (x^r)' = r \cdot x^{r-1}, \quad r \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

$$3 \quad (\sin x)' = \cos x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$4 \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$5 \quad (e^x)' = e^x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$6 \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$7 \quad (\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\},$$

$$8 \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

$$9 \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1),$$

$$10 \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1),$$

$$11 \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$12 \quad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

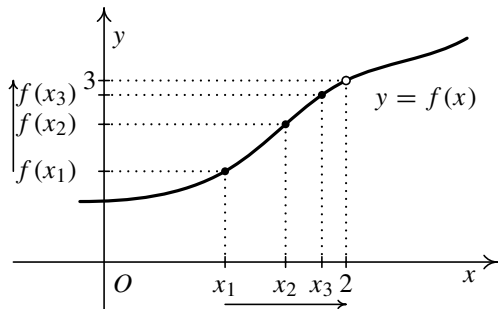
$$13 \quad (a^x)' = a^x \ln a, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$14 \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Co již víme:

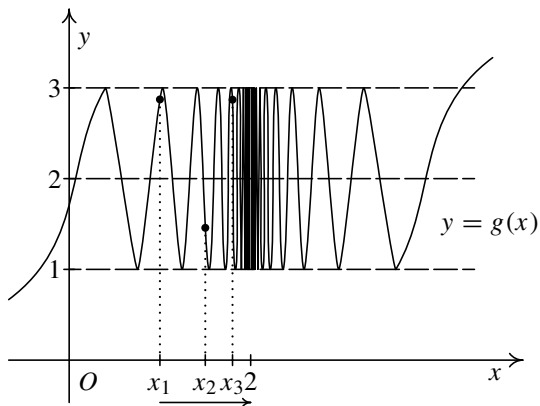
- Derivace funkce v bodě je číslo, které udává rychlost změny nějaké měnící se veličiny, např. okamžitou rychlost, okamžité zrychlení nebo směrnici tečny.
- Dále víme, že derivace je definována pomocí limity jistého podílu. Právě limita v sobě skrývá dynamický proces, tedy pohyb.
- Chceme-li matematicky zachytit pohyb, musíme pochopit **pojem limita**. V podstatě celý diferenciální a integrální počet lze popsat jako tu část matematiky, která se zabývá limitami.

Limita funkce v bodě



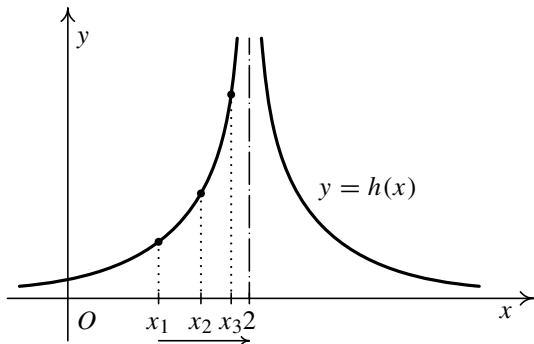
Vezměme hodnoty $x_1 = 1$, $x_2 = 1,5$, $x_3 = 1,8$, ... nezávisle proměnné, které se budou čím dál více přibližovat k hodnotě 2 (z levé strany). Pak funkční hodnoty v těchto bodech, tj. $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, ..., se čím dál víc přibližují k číslu $y = 3$.

Limita funkce v bodě



Jestliže se přibližujeme k bodu $x = 2$ zleva, např. po hodnotách $x_1 = 1$, $x_2 = 1,5$, $x_3 = 1,8$, \dots , funkční hodnoty $g(x_1)$, $g(x_2)$, $g(x_3)$, \dots se tentokrát k ničemu nepřibližují, ale „kmitají“ mezi hodnotami $y = 1$ a $y = 3$.

Limita funkce v bodě



Přibližujeme-li se k bodu $x = 2$ zleva po bodech $x_1 = 1$, $x_2 = 1,5$, $x_3 = 1,8, \dots$, se funkční hodnoty $h(x_1)$, $h(x_2)$, $h(x_3), \dots$ se neomezeně zvětšují.

- V době, kdy vznikal diferenciální počet, neexistoval pojem limity.

- V době, kdy vznikal diferenciální počet, neexistoval pojem limity.
- Jak Newton a Leibniz dokázali popsat fakt, že se směrnice sečen přibližují ke směrnici tečny?

- V době, kdy vznikal diferenciální počet, neexistoval pojem limity.
- Jak Newton a Leibniz dokázali popsat fakt, že se směrnice sečen přibližují ke směrnici tečny?
- Jak se s tímto dynamickým procesem dokázali vyrovnat?

- V době, kdy vznikal diferenciální počet, neexistoval pojem limity.
- Jak Newton a Leibniz dokázali popsat fakt, že se směrnice sečen přibližují ke směrnici tečny?
- Jak se s tímto dynamickým procesem dokázali vyrovnat?
- Jak lze popsat dynamický proces statickými nástroji (pomocí čísel, rovnic ...)?

Jak Newton a Leibniz postupovali při výpočtu směrnice tečny ke křivce $f(x) = x^3$ v bodě x_0 ?

- Směrnice sečny spojující body T a P je dána vztahem

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Jak Newton a Leibniz postupovali při výpočtu směrnice tečny ke křivce $f(x) = x^3$ v bodě x_0 ?

- Směrnice sečny spojující body T a P je dána vztahem

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- Označíme-li $x - x_0 = h$, pak pro směrnici sečny dostáváme

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Jak Newton a Leibniz postupovali při výpočtu směrnice tečny ke křivce $f(x) = x^3$ v bodě x_0 ?

- Směrnice sečny spojující body T a P je dána vztahem

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- Označíme-li $x - x_0 = h$, pak pro směrnici sečny dostáváme

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- Pro funkci $f(x) = x^3$ je směrnice sečny v bodě x_0

$$\begin{aligned} \frac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{h} &= \frac{x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 - x_0^3}{h} = \\ &= \frac{3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3}{h} = 3x_0^2 + 3x_0h + h^2. \end{aligned}$$

Jak Newton a Leibniz postupovali při výpočtu směrnice tečny ke křivce $f(x) = x^3$ v bodě x_0 ?

- Směrnice sečny spojující body T a P je dána vztahem

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- Označíme-li $x - x_0 = h$, pak pro směrnici sečny dostáváme

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- Pro funkci $f(x) = x^3$ je směrnice sečny v bodě x_0

$$\begin{aligned} \frac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{h} &= \frac{x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 - x_0^3}{h} = \\ &= \frac{3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3}{h} = 3x_0^2 + 3x_0h + h^2. \end{aligned}$$

- Tento výraz udává směrnici sečny PT . Jaká je ale směrnice tečny v bodě T , kterou jsme chtěli vypočítat?

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 3x_0^2 + 3x_0h + h^2.$$

- A zde právě udělali Newton s Leibnizem geniální rozhodující krok. Podívali se na celou situaci dynamicky a zkoumali, co se bude dít, jestliže se vzdálenost h bude neustále zmenšovat.

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 3x_0^2 + 3x_0h + h^2.$$

- A zde právě udělali Newton s Leibnizem geniální rozhodující krok. Podívali se na celou situaci dynamicky a zkoumali, co se bude dít, jestliže se vzdálenost h bude neustále zmenšovat.
- Numericky: Položíme-li např. $x_0 = 2$ a budeme-li uvažovat $h = 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; \dots$, pak odpovídající směrnice úseček PT budou 12,6; 12,06; 12,006; 12,0006; ... Vidíme, že se blíží k hodnotě 12.
- Z Newtonových výpočtů vyplývá, že členy násobené činitelem „ h “ pokládá ve srovnání se členy, jež „ h “ neobsahují, za nuly. Neplatí to však vždy. V případě, že s veličinou „ h “ dělí, pokládá ji za nenulovou.

Duchové zemřelých veličin

- Newton i Leibniz pochopili tento limitní proces intuitivně zcela správně a předložili světu užitečná a správná pravidla pro derivování řady funkcí.

Duchové zemřelých veličin

- Newton i Leibniz pochopili tento limitní proces intuitivně zcela správně a předložili světu užitečná a správná pravidla pro derivování řady funkcí.
- Nebyla dostatečně podložena práce s nekonečně malou veličinou. To vedlo k nedorozuměním a zmatkům.

Duchové zemřelých veličin

- Newton i Leibniz pochopili tento limitní proces intuitivně zcela správně a předložili světu užitečná a správná pravidla pro derivování řady funkcí.
- Nebyla dostatečně podložena práce s nekonečně malou veličinou. To vedlo k nedorozuměním a zmatkům.
- **George Berkeley** se kriticky vyjádřil proti nekonečně malým veličinám, které přirovnal k „**duchům zemřelých veličin**“ — ty jednou jsou nulové a pak zase nejsou, podle potřeby operací, které se s nimi provádějí.

Duchové zemřelých veličin

- Newton i Leibniz pochopili tento limitní proces intuitivně zcela správně a předložili světu užitečná a správná pravidla pro derivování řady funkcí.
- Nebyla dostatečně podložena práce s nekonečně malou veličinou. To vedlo k nedorozuměním a zmatkům.
- **George Berkeley** se kriticky vyjádřil proti nekonečně malým veličinám, které přirovnal k „**duchům zemřelých veličin**“ — ty jednou jsou nulové a pak zase nejsou, podle potřeby operací, které se s nimi provádějí.
- Nastupuje období zpřesňování matematické analýzy, jejímiž představiteli byli B. Bolzano, A.-L. Cauchy, N. H. Abel, P. G. L. Dirichlet a později R. Dedekind a K. Weierstrass. Až v tomto období, kdy došlo k aritmetizaci analýzy — vzniku ε - δ jazyka — byl diferenciální počet postaven na pevné základy.

Jak K. Weierstrass zachytil statickým způsobem dynamický proces derivování?

Nechť je dána funkce

$$f(h) = \frac{3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3}{h},$$

kde x_0 je konstanta a h proměnná. Řekneme, že číslo L (v našem případě $3x_0^2$) je limitou funkce $f(h)$ pro h blížící se k číslu 0, jestliže platí

Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že když $0 < |h| < \delta$, pak $|f(h) - L| < \varepsilon$.

Není zde řeč o žádném dynamickém procesu, o žádné nekonečně malé veličině, mluví se zde pouze o existenci čísla δ , které má určitou vlastnost.

A tak 200 let po svém vzniku byl diferenciální počet postaven na pevné základy.

K porozumění podstatě pohybu a změny je třeba umět pracovat s nekonečnem — s nekonečně malými veličinami. A to se zcela podařilo až v 19. století vytvořením teorie limit a celkovou aritmetizací analýzy.

„Ačkoliv není nekonečno součástí našeho světa, lidská mysl ho potřebuje ovládnout, aby dokázala popsat a pochopit náš svět.“