Jensenova nerovnost

Definice. *Funkce f se nazývá ryze konvexní na intervalu I, jestliže pro libovolná $x_1, x_2 \in I$ a libovolná $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ taková, že $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, platí*

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2),$$

přičemž rovnost nastane, právě když $x_1 = x_2$.

Podobně definujeme i tzv. ryze konkávní funkci.

Definice. *Funkce f se nazývá ryze konkávní na intervalu I, jestliže pro libovolná $x_1, x_2 \in I$ a libovolná $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ taková, že $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, platí*

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2),$$

přičemž rovnost nastane, právě když $x_1 = x_2$.

Věta (Jensenova nerovnost). *Jestliže je funkce f ryze konvexní, resp. ryze konkávní, na intervalu I, pak pro libovolná $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ a libovolná $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$ taková, že $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$, platí*

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n),$$

resp.

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \ge \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

Rovnost přitom nastane, právě když platí $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Důkaz. Lze provést indukcí vzhledem k n. $\square$

Důsledek. *Jestliže je funkce f ryze konvexní, resp. ryze konkávní, na intervalu I, pak pro libovolná $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ platí*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n},$$

resp.

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

Rovnost přitom nastane, právě když platí $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Důkaz. Tvrzení plyne přímo z Jensenovy nerovnosti. Stačí zvolit

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}.$$

□

Příklad. *Ze všech trojúhelníků s vnitřními úhly* α, β, γ *najděte ten, pro který je hodnota výrazu* $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$ *maximální.*

Řešení. Použijeme důsledek Jensenovy nerovnosti pro funkci $\sin x$, která je ryze konkávní na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$. Máme tedy

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{3} \leq \sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Odtud

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Rovnost přitom nastane, právě když $\alpha = \beta = \gamma$, tj. právě když se jedná o rovnostranný trojúhelník. $\square$

Věta (AG–nerovnost). *Pro libovolná nezáporná reálná čísla* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *platí*

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}. \tag{AG}$$

Rovnost v poslední nerovnosti nastane, právě když $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Důkaz. Použijeme důsledek Jensenovy nerovnosti a ryzí konkávnosti funkce $f(x) = \log x$ na intervalu $(0, +\infty)$. Pro libovolná kladná $x_1, x_2, \dots, x_n$ tedy platí

$$\log\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \geq \frac{\log x_1 + \log x_2 + \dots + \log x_n}{n},$$

což po úpravě dává AG–nerovnost (pro kladná $x_1, x_2, \dots, x_n$). $\square$

Věta (nerovnost mezi mocninnými průměry). *Pro libovolná nezáporná reálná čísla* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *a libovolná kladná čísla* r *a* s *splňující* $r < s$ *platí*

$$\left(\frac{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\frac{a_1^s + a_2^s + \cdots + a_n^s}{n}\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Rovnost v poslední nerovnosti nastane, právě když $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Poznámka. Podobná nerovnost platí i v případě, že předpokládáme pouze nenulovost čísel r a s. Pak je ovšem nutné předpokládat, že čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou kladná.

Důkaz. Použijeme důsledek Jensenovy nerovnosti a využijeme ryzí konvexnosti funkce $f(x) = x^{\frac{s}{r}}$ na intervalu $\langle 0, +\infty)$. Pro libovolná nezáporná $x_1, x_2, \dots, x_n$ tedy platí

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^{\frac{s}{r}} \leq \frac{x_1^{\frac{s}{r}} + x_2^{\frac{s}{r}} + \cdots + x_n^{\frac{s}{r}}}{n}.$$

Položme nyní $x_1 = a_1^r, x_2 = a_2^r, \dots, x_n = a_n^r$. Po dosazení do poslední nerovnosti dostáváme

$$\left(\frac{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r}{n}\right)^{\frac{s}{r}} \leq \frac{a_1^s + a_2^s + \cdots + a_n^s}{n},$$

což po úpravě dává požadovanou nerovnost. $\square$

Důsledek (AK–nerovnost). *Pro libovolná nezáporná reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ platí*

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}. \tag{AK}$$

Rovnost v poslední nerovnosti nastane, právě když $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Důsledek (Youngova nerovnost). *Pro libovolná nezáporná reálná čísla x, y a libovolná kladná reálná čísla p, q splňující $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ platí*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Příklad. *Najděte obdélník daného obvodu o, jehož úhlopříčka má minimální velikost.*

Nápověda.

$$u = \sqrt{a^2 + b^2} \overset{\text{AK}}{\geq} \sqrt{2}\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{o\sqrt{2}}{4}.$$

Rovnost nastane, právě když $a = b$, tj. když se jedná o čtverec. $\square$

Příklad. *Najděte trojúhelník daného obvodu $o = 2s$, který má největší obsah.*

Nápověda.

$$S^2 = s \cdot (s-a)(s-b)(s-c) \overset{\text{AG}}{\leq} s \cdot \left(\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}\right)^3 = \frac{s^4}{27}.$$

Rovnost nastane, právě když $a = b = c$, tj. když se jedná o rovnostranný trojúhelník. $\square$

Příklad. *Z plechu tvaru čtverce vyřízněte v rozích čtyři stejné čtverce tak, aby ohnutím a spájením vznikla krabička maximálního objemu.*

Nápověda. Stranu čtvercového plechu označme a a stranu vyříznutých čtverců označme x. Pak pro objem krabičky platí

$$V = (a-2x)^2 \cdot x.$$

Nyní použijeme AG–nerovnost následujícím způsobem:

$$4V = (a-2x)\cdot(a-2x)\cdot(4x) \overset{\text{AG}}{\le} \left(\frac{(a-2x)+(a-2x)+4x}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}a^3.$$

Rovnost v poslední nerovnosti nastane, právě když $a-2x = 4x$, tj. $x = \frac{a}{6}$. □

Poznámka. Můžete se zkusit zamyslet nad tím, jak by se řešil případ, kdyby původní plech nebyl čtvercový, ale obdélníkový (např. 7×15).