Jak matematicky zachytit pohyb

Petra Šarmanová

Katedra aplikované matematiky
VŠB-Technická univerzita, Ostrava

ŠKOMAM 2009

Pohyb kolem nás

- Jak popsat pohyb?

Pohyb kolem nás

- Jak popsat pohyb?
- Jak popsat rychlost změny nějaké měnící se veličiny?

Pohyb kolem nás

- Jak popsat pohyb?
- Jak popsat rychlost změny nějaké měnící se veličiny?
- Trvalo téměř 2000 let než byl nalezen způsob, jak matematicky zachytit pohyb.

Pohyb kolem nás

- Jak popsat pohyb?
- Jak popsat rychlost změny nějaké měnící se veličiny?
- Trvalo téměř 2000 let než byl nalezen způsob, jak matematicky zachytit pohyb.
- 17. století – Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz – zakladatelé diferenciálního a integrálního počtu.

Isaac Newton

- 1643 – 1727
- narozen v Lincolnshire, Anglie
- studoval v Cambridge
- 1669 – 1696 profesor v Cambridge
- fyzik a astronom – mechanika, gravitační zákony, optika, teorie světla atd.
- matematik – diferenciální a integrální počet

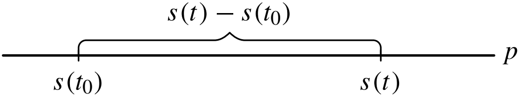
Gottfried Wilhelm Leibniz

- 1646 – 1716
- narozen v Lipsku, Německo
- vystudoval logiku, filozofii a právo
- profesionální diplomat a právník
- v matematice byl samouk
- nezávisle na Newtonovi položil základy diferenciálního a integrálního počtu

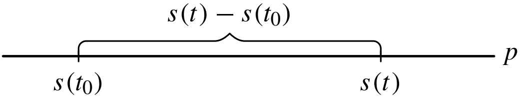
Mechanický model

- Uvažujme hmotný bod, který se pohybuje po přímce p. Označme t čas a $s(t)$ polohu, v níž se bod v čase t nachází.

Mechanický model

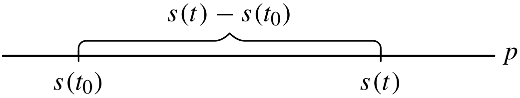
- Uvažujme hmotný bod, který se pohybuje po přímce p. Označme t čas a $s(t)$ polohu, v níž se bod v čase t nachází.
- 

Mechanický model

- Uvažujme hmotný bod, který se pohybuje po přímce p. Označme t čas a $s(t)$ polohu, v níž se bod v čase t nachází.
- 

- Zvolíme časový okamžik t (např. $t > t_0$) a budeme pro názornost předpokládat, že v intervalu $\langle t_0, t \rangle$ se bod pohybuje doprava.

Mechanický model

- Uvažujme hmotný bod, který se pohybuje po přímce p. Označme t čas a $s(t)$ polohu, v níž se bod v čase t nachází.
- 

- Zvolíme časový okamžik t (např. $t > t_0$) a budeme pro názornost předpokládat, že v intervalu $\langle t_0, t\rangle$ se bod pohybuje doprava.
- Průměrná rychlost za dobu $t - t_0$ (což je délka uvažovaného časového intervalu) je dráha, kterou bod v této době urazil, tj. $s(t) - s(t_0)$, dělená přírůstkem času $t - t_0$.

Mechanický model

- Průměrná rychlost v_t v časovém intervale $\langle t_0, t\rangle$ je tedy

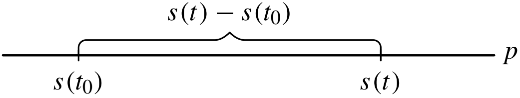
$$v_t = \frac{\text{dráha}}{\text{čas}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}\,.$$

Mechanický model

- Průměrná rychlost v_t v časovém intervale $\langle t_0, t\rangle$ je tedy

$$v_t = \frac{\text{dráha}}{\text{čas}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}\,.$$

- Naším úkolem je určit okamžitou rychlost bodu v čase t_0.

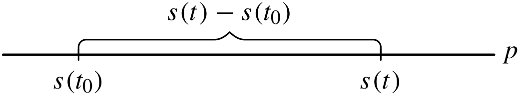


Mechanický model

- Průměrná rychlost v_t v časovém intervale $\langle t_0, t\rangle$ je tedy

$$v_t = \frac{\text{dráha}}{\text{čas}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}\,.$$

- Našim úkolem je určit okamžitou rychlost bodu v čase t_0.



- Přibližováním okamžiku t k t_0, tj. zkracováním časového intervalu, přejde průměrná rychlost na časovém intervalu $\langle t_0, t\rangle$ v okamžitou rychlost v_0 v čase t_0.

Mechanický model

- Průměrná rychlost v_t v časovém intervale $\langle t_0, t \rangle$ je tedy

$$v_t = \frac{\text{dráha}}{\text{čas}} = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \,.$$

Okamžitá rychlost

$$v_0 = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \,.$$

- Předchozí limita udává „rychlost změny“ polohy pohybujícího se bodu neboli okamžitou rychlost.

- Předchozí limita udává „rychlost změny" polohy pohybujícího se bodu neboli okamžitou rychlost.
- Budeme-li zkoumat „rychlost změny" rychlosti, dostaneme okamžité zrychlení. Tj.

$$a_0 = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} ,$$

Geometrický model

- Chceme stanovit „rychlost změny“ funkce.

Geometrický model

- Chceme stanovit „rychlost změny“ funkce.
- V grafickém znázornění to znamená najít v daném bodě x sklon křivky (to, jak je křivka strmá).

Geometrický model

- Chceme stanovit „rychlost změny“ funkce.
- V grafickém znázornění to znamená najít v daném bodě x sklon křivky (to, jak je křivka strmá).
- Zatím nevíme, jak určit sklon libovolné křivky. Víme ale, jak určit sklon přímky, procházející dvěma body. Sklon přímky je dán velikostí úhlu, jenž svírá tato přímka s osou x.

Geometrický model

- Chceme stanovit „rychlost změny“ funkce.
- V grafickém znázornění to znamená najít v daném bodě x sklon křivky (to, jak je křivka strmá).
- Zatím nevíme, jak určit sklon libovolné křivky. Víme ale, jak určit sklon přímky, procházející dvěma body. Sklon přímky je dán velikostí úhlu, jenž svírá tato přímka s osou x.
- Číselně se tato velikost úhlu vyjadřuje jako směrnice přímky neboli tangens úhlu.

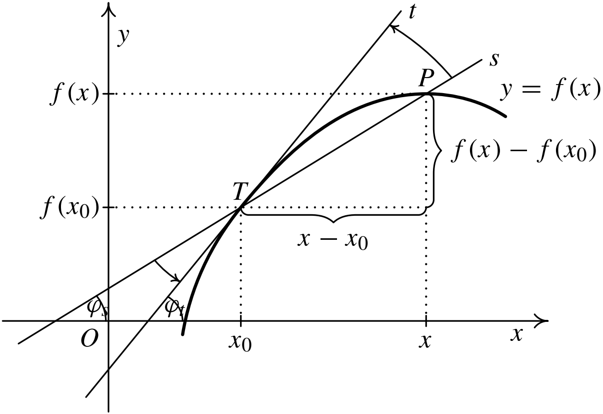
Geometrický model

- Chceme stanovit „rychlost změny“ funkce.
- V grafickém znázornění to znamená najít v daném bodě x sklon křivky (to, jak je křivka strmá).
- Zatím nevíme, jak určit sklon libovolné křivky. Víme ale, jak určit sklon přímky, procházející dvěma body. Sklon přímky je dán velikostí úhlu, jenž svírá tato přímka s osou x.
- Číselně se tato velikost úhlu vyjadřuje jako směrnice přímky neboli tangens úhlu.
- Pokud přímka prudce roste, pak je její směrnice velké kladné číslo. Naopak, pokud prudce klesá, pak je směrnice velké záporné číslo.

Geometrický model

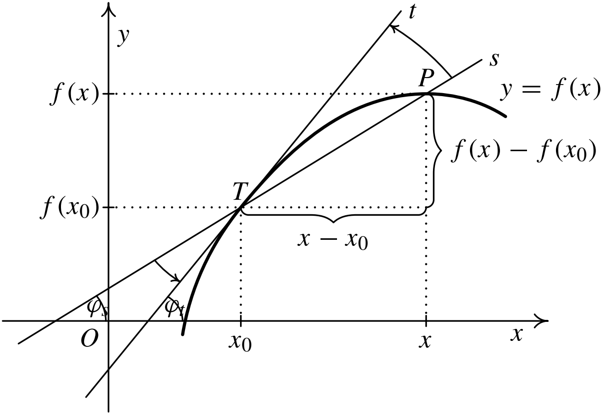
- Jak určit sklon křivky v bodě T ?

- Jak určit sklon křivky v bodě T ?
- Umíme určit sklon sečny s procházející body T a P.



Geometrický model

- Jak určit sklon křivky v bodě T ?
- Umíme určit sklon sečny s procházející body T a P.



- Co se stane, budeme-li bod x přibližovat k bodu x_0?

Definice derivace - geometrický model

Geometrický model – shrnutí

- Pro směrnici sečny s, která je určena dvěma body $T = \big(x_0, f(x_0)\big)$ a $P = \big(x, f(x)\big)$, platí

$$k_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$

Geometrický model – shrnutí

- Pro směrnici sečny s, která je určena dvěma body $T = \big(x_0, f(x_0)\big)$ a $P = \big(x, f(x)\big)$, platí
$$k_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$
- Přibližujeme-li bod x k bodu x_0, přejde úhel φ_s v úhel φ_t, a směrnice sečny $k_s = \operatorname{tg} \varphi_s$ přejde ve směrnici tečny $k_t = \operatorname{tg} \varphi_t$.

Geometrický model – shrnutí

- Pro směrnici sečny s, která je určena dvěma body $T = \big(x_0, f(x_0)\big)$ a $P = \big(x, f(x)\big)$, platí

$$k_s = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$

Směrnice tečny

$$k_t = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$

Co již víme?

- Ukázali jsme si, že platí:

Okamžitá rychlost

$$v_0 = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Co již víme?

- Ukázali jsme si, že platí:

Okamžitá rychlost

$$v_0 = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}\,.$$

Okamžité zrychlení

$$a_0 = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}\,,$$

Co již víme?

- Ukázali jsme si, že platí:

Okamžitá rychlost

$$v_0 = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} .$$

Okamžité zrychlení

$$a_0 = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} ,$$

Směrnice tečny

$$k_t = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} .$$

Definice derivace funkce v bodě

- Vzhledem k důležitosti zmíněné limity, zavádíme následující definici.

Definice

Nechť $x_0 \in D(f)$. Existuje-li limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

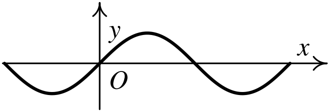
značíme ji $f'(x_0)$ a nazýváme derivací funkce f v bodě x_0.
Je-li $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že f má v bodě x_0 vlastní derivaci.
Je-li $f'(x_0) = \pm\infty$, říkáme, že funkce f má v bodě x_0 nevlastní derivaci.

Příklad 1

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = \sin x$ v bodě $x_0 = 0$.

Příklad 1

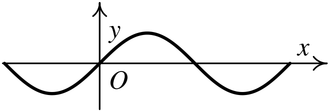
Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = \sin x$ v bodě $x_0 = 0$.



$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Příklad 1

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = \sin x$ v bodě $x_0 = 0$.



$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

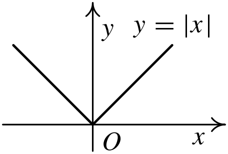
Geometrickým význam: Derivace $f'(0)$ představuje směrnici tečny ke grafu funkce v bodě $(0, f(0))$. Směrnice je tangenta úhlu, který svírá tečna s kladnou částí osy x. Tangens je roven 1 pro úhel $\pi/4$. Tečna tedy svírá s osou x úhel $\pi/4$.

Příklad 2

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě $x_0 = 0$.

Příklad 2

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě $x_0 = 0$.



$$f\colon y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Vypočtěme jednostranné derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě 0.

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

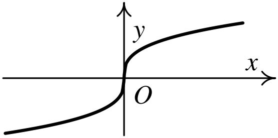
Tedy $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, a proto $f'(0)$ neexistuje. Graf funkce f má v tomto bodě jakýsi „hrot“, „špičku“. V takovém bodě nelze sestrojit tečnu.

Příklad 3

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v bodě $x_0 = 0$.

Příklad 3

Užitím definice derivace zjistěte, zda existuje derivace funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ v bodě $x_0 = 0$.

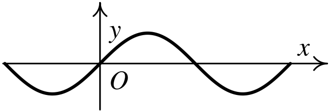


Vypočtěme jednostranné derivace funkce f dané předpisem $f(x) = \sqrt[3]{x}$:

$$f'_{\pm}(0) = \lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty.$$

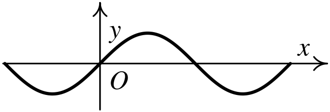
Platí $f'_{+}(0) = f'_{-}(0) = +\infty$, a proto existuje $f'(0)$ a platí: $f'(0) = +\infty$.

Co již víme?

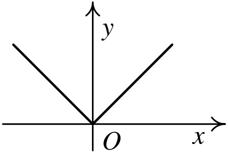


$$f'(0) = 1$$

Co již víme?

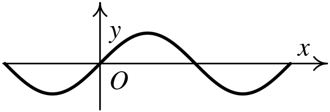


$$f'(0) = 1$$

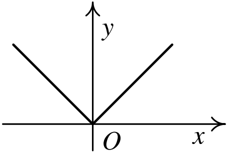


$f'(0)$ *neexistuje*

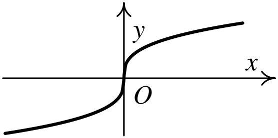
Co již víme?



$$f'(0) = 1$$



$f'(0)$ *neexistuje*



$$f'(0) = +\infty$$

Definice derivace - geometrický model

Definice derivace funkce na množině

- Doposud jsme mluvili o derivaci funkce v jednom bodě x_0. Tato derivace je nějaké číslo.

Definice derivace funkce na množině

- Doposud jsme mluvili o derivaci funkce v jednom bodě x_0. Tato derivace je nějaké číslo.
- Jestliže má f derivaci v každém bodě definičního oboru (popř. nějaké jeho části), dostáváme novou funkci f' definovanou takto:

Definice

Nechť existuje vlastní derivace $f'(x)$ funkce f pro všechna $x \in M$, kde $M \subset D(f)$. Pak funkci $f' \colon\ y = f'(x)$, $x \in M$, nazýváme derivací funkce f na M.

Derivace elementárních funkcí

1. $(c)' = 0,\ c \in \mathbb{R}$ (konst.), $x \in \mathbb{R}$,
2. $(x^r)' = r \cdot x^{r-1},\ r \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^+$,
3. $(\sin x)' = \cos x,\ x \in \mathbb{R}$,
4. $(\cos x)' = -\sin x,\ x \in \mathbb{R}$,
5. $(e^x)' = e^x,\ x \in \mathbb{R}$,
6. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$,
7. $(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$,
8. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}^+$,
9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$,

Derivace elementárních funkcí

$\boxed{10}$ $$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1),$$

$\boxed{11}$ $$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$\boxed{12}$ $$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

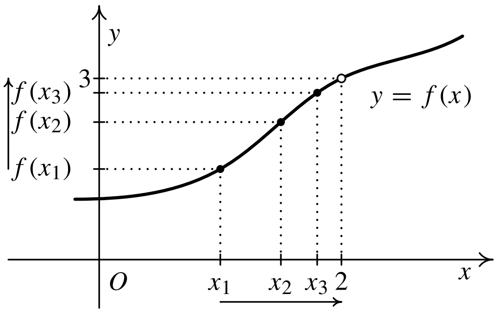
$\boxed{13}$ $$(a^x)' = a^x \ln a, \ a > 0, \ a \neq 1, \ x \in \mathbb{R},$$

$\boxed{14}$ $$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \ a > 0, \ a \neq 1, \ x \in \mathbb{R}^+.$$

Co již víme:

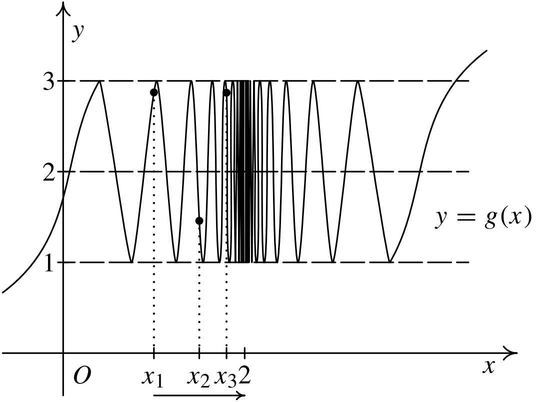
- Derivace funkce v bodě je číslo, které udává rychlost změny nějaké měnící se veličiny, např. okamžitou rychlost, okamžité zrychlení nebo směrnici tečny.
- Dále víme, že derivace je definována pomocí limity jistého podílu. Právě limita v sobě skrývá dynamický proces, tedy pohyb.
- Chceme-li matematicky zachytit pohyb, musíme pochopit pojem limita. V podstatě celý diferenciální a integrální počet lze popsat jako tu část matematiky, která se zabývá limitami.

Limita funkce v bodě



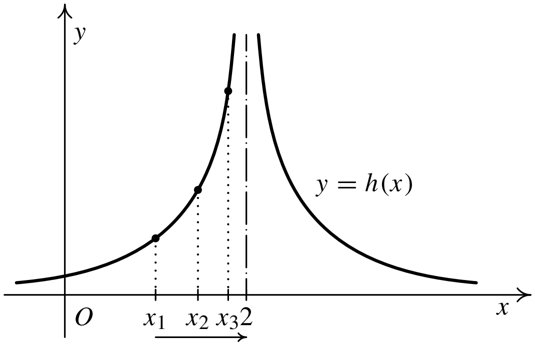
Vezměme hodnoty $x_1 = 1$, $x_2 = 1{,}5$, $x_3 = 1{,}8$, ... nezávisle proměnné, které se budou čím dál více přibližovat k hodnotě 2 (z levé strany). Pak funkční hodnoty v těchto bodech, tj. $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, ..., se čím dál víc přibližují k číslu $y = 3$.

Limita funkce v bodě



Jestliže se přibližujeme k bodu $x = 2$ zleva, např. po hodnotách $x_1 = 1$, $x_2 = 1{,}5$, $x_3 = 1{,}8$, …, funkční hodnoty $g(x_1)$, $g(x_2)$, $g(x_3)$, … se tentokrát k ničemu nepřibližují, ale „kmitají“ mezi hodnotami $y = 1$ a $y = 3$.

Limita funkce v bodě



Přibližujeme-li se k bodu $x = 2$ zleva po bodech $x_1 = 1$, $x_2 = 1{,}5$, $x_3 = 1{,}8$, $\ldots$, se funkční hodnoty $h(x_1)$, $h(x_2)$, $h(x_3)$, $\ldots$ se neomezeně zvětšují.

Zpět do 17. století

- V době, kdy vznikal diferenciální počet, neexistoval pojem limity.

Zpět do 17. století

- V době, kdy vznikal diferenciální počet, neexistoval pojem limity.
- Jak Newton a Leibniz dokázali popsat fakt, že se směrnice sečen přibližují ke směrnici tečny?

Zpět do 17. století

- V době, kdy vznikal diferenciální počet, neexistoval pojem limity.
- Jak Newton a Leibniz dokázali popsat fakt, že se směrnice sečen přibližují ke směrnici tečny?
- Jak se s tímto dynamických procesem dokázali vyrovnat?

Zpět do 17. století

- V době, kdy vznikal diferenciální počet, neexistoval pojem limity.
- Jak Newton a Leibniz dokázali popsat fakt, že se směrnice sečen přibližují ke směrnici tečny?
- Jak se s tímto dynamických procesem dokázali vyrovnat?
- Jak lze popsat dynamický proces statickými nástroji (pomocí čísel, rovnic ...)?

Zpět do 17. století

Jak Newton a Leibniz postupovali při výpočtu směrnice tečny ke křivce $f(x) = x^3$ v bodě x_0?

- Směrnice sečny spojující body T a P je dána vztahem

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Zpět do 17. století

Jak Newton a Leibniz postupovali při výpočtu směrnice tečny ke křivce $f(x) = x^3$ v bodě x_0?

- Směrnice sečny spojující body T a P je dána vztahem

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- Označíme-li $x - x_0 = h$, pak pro směrnici sečny dostáváme

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Zpět do 17. století

Jak Newton a Leibniz postupovali při výpočtu směrnice tečny ke křivce $f(x) = x^3$ v bodě x_0?

- Směrnice sečny spojující body T a P je dána vztahem
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$
- Označíme-li $x - x_0 = h$, pak pro směrnici sečny dostáváme
$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$
- Pro funkci $f(x) = x^3$ je směrnice sečny v bodě x_0
$$\frac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{h} = \frac{x_0^3 + 3{x_0}^2 h + 3x_0 h^2 + h^3 - {x_0}^3}{h} =$$
$$= \frac{3{x_0}^2 h + 3x_0 h^2 + h^3}{h} = 3{x_0}^2 + 3x_0 h + h^2.$$

Zpět do 17. století

Jak Newton a Leibniz postupovali při výpočtu směrnice tečny ke křivce $f(x) = x^3$ v bodě x_0?

- Směrnice sečny spojující body T a P je dána vztahem
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$
- Označíme-li $x - x_0 = h$, pak pro směrnici sečny dostáváme
$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$
- Pro funkci $f(x) = x^3$ je směrnice sečny v bodě x_0
$$\frac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{h} = \frac{x_0^3 + 3{x_0}^2 h + 3x_0 h^2 + h^3 - {x_0}^3}{h} =$$
$$= \frac{3{x_0}^2 h + 3x_0 h^2 + h^3}{h} = 3{x_0}^2 + 3x_0 h + h^2.$$
- Tento výraz udává směrnici sečny PT. Jaká je ale směrnice tečny v bodě T, kterou jsme chtěli vypočítat?

Zpět do 17. století

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 3{x_0}^2 + 3x_0h + h^2.$$

- A zde právě udělali Newton s Leibnizem geniální rozhodující krok. Podívali se na celou situaci dynamicky a zkoumali, co se bude dít, jestliže se vzdálenost h bude neustále zmenšovat.

Zpět do 17. století

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = 3{x_0}^2 + 3x_0h + h^2.$$

- A zde právě udělali Newton s Leibnizem geniální rozhodující krok. Podívali se na celou situaci dynamicky a zkoumali, co se bude dít, jestliže se vzdálenost h bude neustále zmenšovat.
- Numericky: Položíme-li např. $x_0 = 2$ a budeme-li uvažovat $h = 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ 0{,}000\,1;\ \dots$, pak odpovídající směrnice úseček PT budou 12,6; 12,06; 12,006; 12,000 6; … Vidíme, že se blíží k hodnotě 12.
- Z Newtonových výpočtů vyplývá, že členy násobené činitelem „h“ pokládá ve srovnání se členy, jež „h“ neobsahují, za nuly. Neplatí to však vždy. V případě, že s veličinou „h“ dělí, pokládá ji za nenulovou.

Duchové zemřelých veličin

- Newton i Leibniz pochopili tento limitní proces intuitivně zcela správně a předložili světu užitečná a správná pravidla pro derivování řady funkcí.

Duchové zemřelých veličin

- Newton i Leibniz pochopili tento limitní proces intuitivně zcela správně a předložili světu užitečná a správná pravidla pro derivování řady funkcí.
- Nebyla dostatečně podložena práce s nekonečně malou veličinou. To vedlo k nedorozuměním a zmatkům.

Duchové zemřelých veličin

- Newton i Leibniz pochopili tento limitní proces intuitivně zcela správně a předložili světu užitečná a správná pravidla pro derivování řady funkcí.
- Nebyla dostatečně podložena práce s nekonečně malou veličinou. To vedlo k nedorozuměním a zmatkům.
- **George Berkeley** se kriticky vyjádřil proti nekonečně malým veličinám, které přirovnal k „duchům zemřelých veličin“ — ty jednou jsou nulové a pak zase nejsou, podle potřeby operací, které se s nimi provádějí.

Duchové zemřelých veličin

- Newton i Leibniz pochopili tento limitní proces intuitivně zcela správně a předložili světu užitečná a správná pravidla pro derivování řady funkcí.
- Nebyla dostatečně podložena práce s nekonečně malou veličinou. To vedlo k nedorozuměním a zmatkům.
- **George Berkeley** se kriticky vyjádřil proti nekonečně malým veličinám, které přirovnal k „duchům zemřelých veličin“ — ty jednou jsou nulové a pak zase nejsou, podle potřeby operací, které se s nimi provádějí.
- Nastupuje období zpřesňování matematické analýzy, jejímiž představiteli byli B. Bolzano, A.-L. Cauchy, N. H. Abel, P. G. L. Dirichlet a později R. Dedekind a K. Weierstrass. Až v tomto období, kdy došlo k aritmetizaci analýzy — vzniku ε-δ jazyka — byl diferenciální počet postaven na pevné základy.

Dnešní pojetí

Jak K. Weierstrass zachytil statickým způsobem dynamický proces derivování?
Nechť je dána funkce

$$f(h) = \frac{3{x_0}^2 h + 3x_0 h^2 + h^3}{h},$$

kde x_0 je konstanta a h proměnná. Řekneme, že číslo L (v našem případě $3{x_0}^2$) je limitou funkce $f(h)$ pro h blížící se k číslu 0, jestliže platí
Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že když $0 < |h| < \delta$, pak $|f(h) - L| < \varepsilon$.
Není zde řeč o žádném dynamickém procesu, o žádné nekonečně malé veličině, mluví se zde pouze o existenci čísla δ, které má určitou vlastnost.
A tak 200 let po svém vzniku byl diferenciální počet postaven na pevné základy.

Závěr

K porozumění podstatě pohybu a změny je třeba umět pracovat s nekonečnem — s nekonečně malými veličinami. A to se zcela podařilo až v 19. století vytvořením teorie limit a celkovou aritmetizací analýzy.

„Ačkoliv není nekonečno součástí našeho světa, lidská mysl ho potřebuje ovládnout, aby dokázala popsat a pochopit náš svět.“