Jak vznikají diferenciální rovnice

Mgr. Bohumil KRAJC, Ph.D., KAM FEI, VŠB-TUO
bohumil.krajc@vsb.cz

Derivace funkce

Obyčejné diferenciální rovnice
- Rozpad radioaktivních látek
- Určení doby úmrtí

Derivace funkce

Derivace jako směrnice tečny:

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Derivace jako okamžitá rychlost:

$$f'(t_0) = \frac{df(t_0)}{dt} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

Derivací identity je 1

$$f(x) = x \Rightarrow$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1$$

Derivací konstanty je 0

$$f(x) = C \Rightarrow$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{C - C}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0$$

Aditivita derivace

Derivace součtu je rovna součtu derivací.

Derivace rozdílu je rovna rozdílu derivací.

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$$

$$(f(x)-g(x))' = f'(x)-g'(x)$$

Konstantu při derivování lze vytknout

$$\forall C \in \Re :$$

$$(Cf(x))' = Cf'(x)$$

Exponenciále derivování nevadí

$$\frac{d\,(e^{x})}{dx} = e^{x}$$

Důsledek

$$\forall C \in \Re :$$

$$\frac{d(C\,\mathrm{e}^{x})}{dx} = C\,\mathrm{e}^{x}$$

Derivace složené funkce

Problém odlišného měření času: f, g

$$g(t) = f(3t)$$

$$x = 3t \quad \Rightarrow$$

$$g'(t) = 3f'(x)\Big|_{x=3t} = 3f'(3t)$$

Derivace složené funkce

$$g(t) = f\left(Ct\right) \Rightarrow g'(t) = Cf'(Ct)$$

$$g(t) = f\left(h(t)\right) \Rightarrow g'(t) = f'(h(t)) \cdot h'(t)$$

Důsledek

$$\forall C \in \Re :$$

$$\frac{d\left(\mathrm{e}^{Cx}\right)}{dx} = C\,\mathrm{e}^{Cx}$$

Obyčejné diferenciální rovnice

Neznámou je funkce jedné proměnné.

V rovnici se vyskytuje derivace této funkce.

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

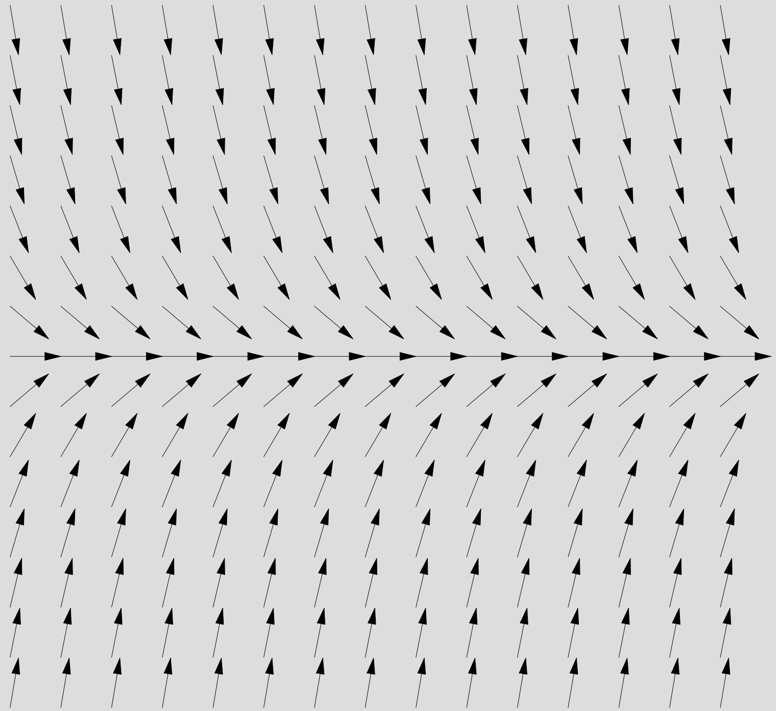
$$y' = f(x, y)$$

$$y' = 3x^2 y$$

Směrová pole 1:

$$y'(x) = -2y(x),$$

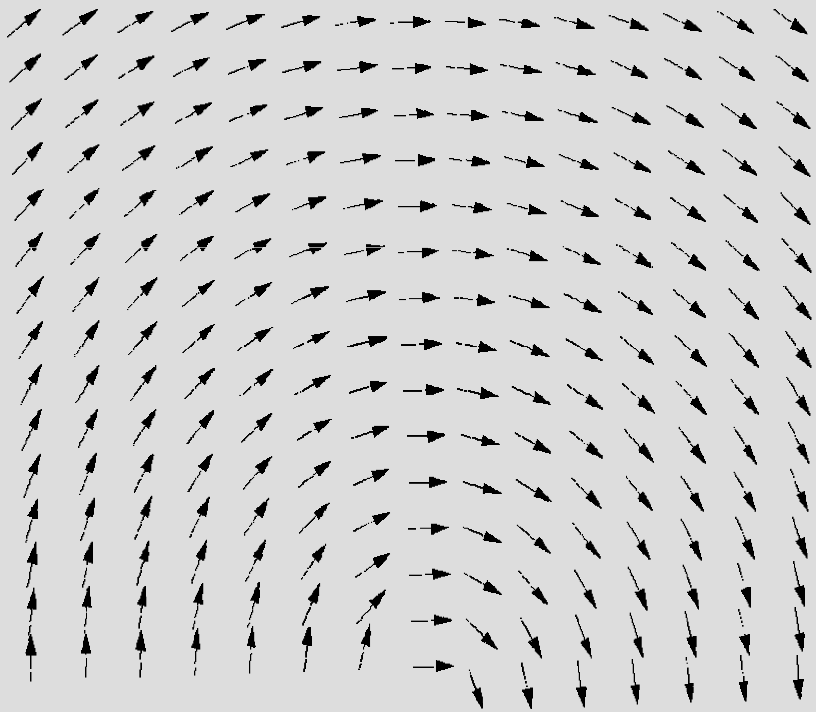
$$y' = -2y$$



Směrová pole 2:

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)},$$

$$y' = -\frac{x}{y}$$

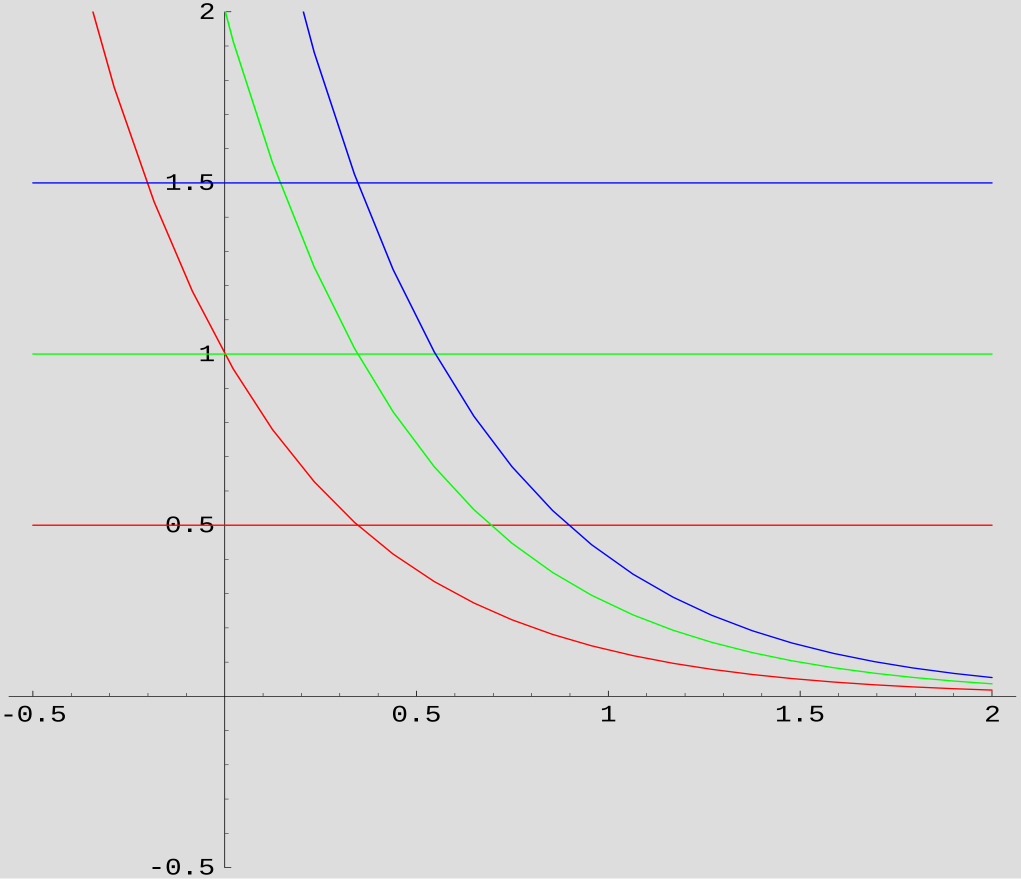


Thorium 234

$$y' = -ky, \quad k = 0{,}02828...$$

$$y(t) = C\,\mathrm{e}^{-kt}, \quad C \in \Re$$

$$C = y(0)$$



Poločas rozpadu

Neměl by záviset na množství látky.

$$y' = -ky\,, \qquad y(t) = y(0)\,\mathrm{e}^{-kt}\,,$$

$$\frac{y(0)}{2} = y(0)\,\mathrm{e}^{-kt^*}\,, \; -\ln(2) = -kt^*$$

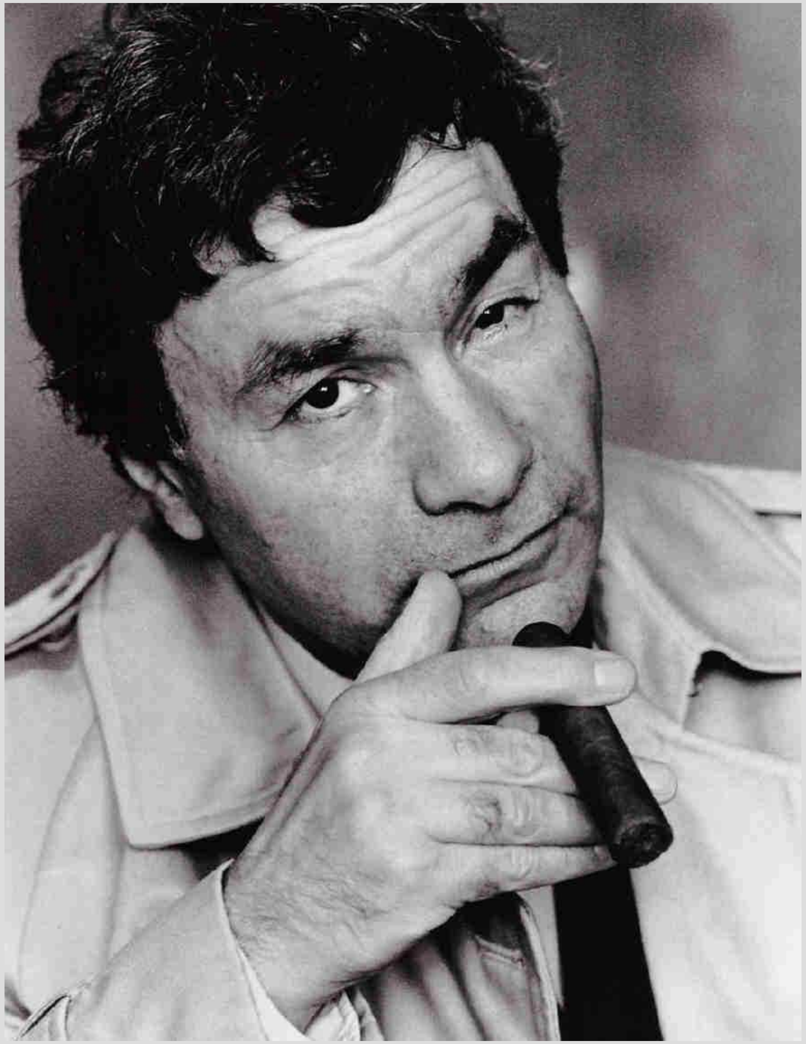
$$t^* = \frac{\ln(2)}{k}$$

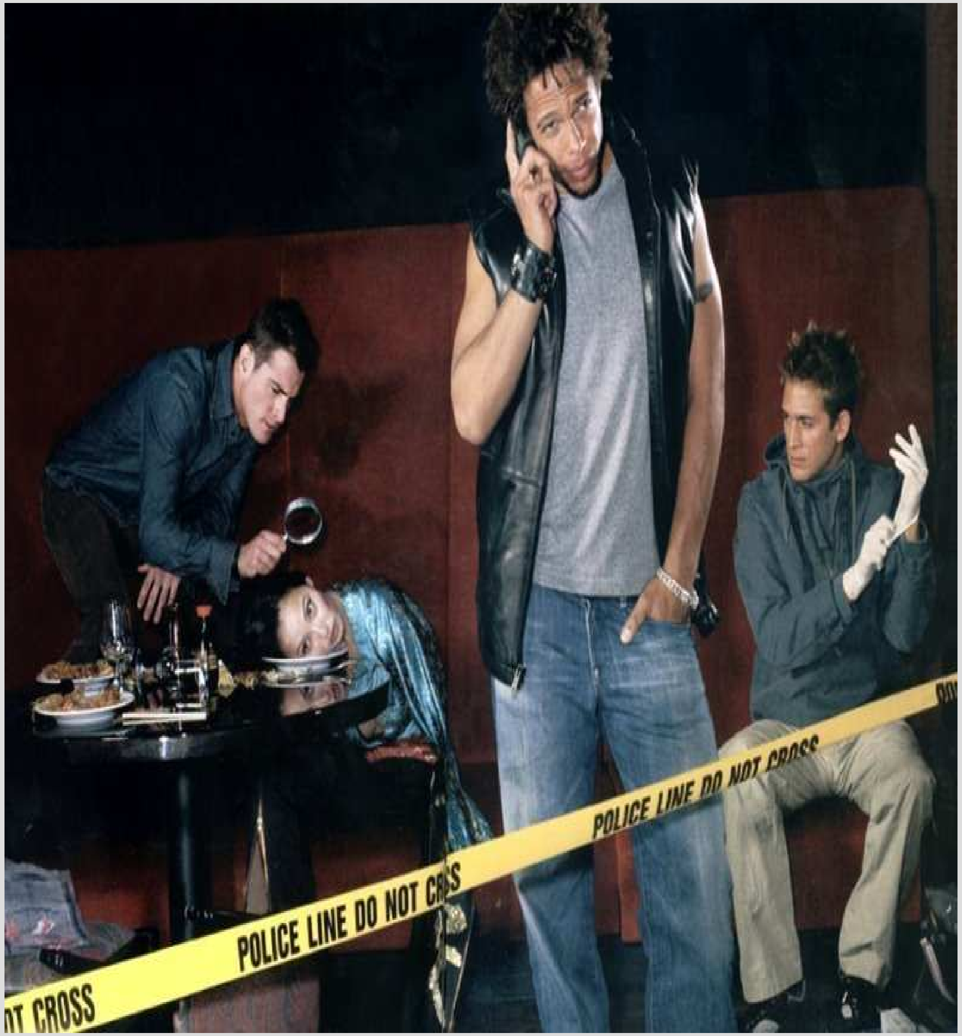
U Thoria 234:

Počet dní:

$$t^{*} = \frac{\ln(2)}{0{,}02828} = 24{,}5$$

Experti





Určení času úmrtí

Newtonův zákon ochlazování:

$$\frac{d\Theta}{dt} = -k(\Theta - T),$$

$$\Theta(t) = T + (\Theta_0 - T)\,\mathrm{e}^{-kt}, \quad t_1 \ldots \Theta_1,$$

$$k = -\frac{1}{t_1}\ln\frac{\Theta_1 - T}{\Theta_0 - T},$$

Pro teplotu 37 stupňů

$$\Theta(t) = T + (\Theta_0 - T)\,\mathrm{e}^{-kt}, \qquad t_u \ldots 37,$$

$$37 = T + (\Theta_0 - T)\,\mathrm{e}^{-kt_u},$$

$$t_u = -\frac{1}{k}\ln\frac{37 - T}{\Theta_0 - T}$$

Parciální derivace

$$u_x(x_0,t_0)=\frac{\partial u(x_0,t_0)}{\partial x}=\lim_{x\to x_0}\frac{u(x,t_0)-u(x_0,t_0)}{x-x_0}$$

$$u_t(x_0,t_0)=\frac{\partial u(x_0,t_0)}{\partial t}=\lim_{t\to t_0}\frac{u(x_0,t)-u(x_0,t_0)}{t-t_0}$$

$$\frac{\partial(2xt)}{\partial x}=2t,\qquad \frac{\partial(2t\,\mathrm{e}^{xt})}{\partial x}=2t\,\mathrm{e}^{xt}\,t=2t^2\,\mathrm{e}^{xt}$$