Počítačová cvičení

Petr Beremlijski, Marie Sadowská

Katedra aplikované matematiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky
VŠB - Technická univerzita Ostrava

Abychom se mohli věnovat numerickému řešení matematických úloh, potřebujeme vhodné prostředí, které nám to umožní. A tak jako fyzik či chemik mají svou laboratoř nebo patolog pitevnu, mají i numeričtí matematici svojí Maticovou laboratoř[1] - Matlab. Podrobně se tomuto pracovnímu prostředí a jeho příkazům věnuje přiložený Matlabovský slabikář[2]. My si v tomto textu uvedeme pouze stručný přehled matlabovských proměnných a příkazů, kterým se budeme věnovat.

Prostředí

help, demos, intro, who, whos, clear, size, length

Proměnné

- Skaláry
- Vektory
- Matice

Příkazy

- Skalární funkce - *sin, cos, tan, exp, log, abs, sqrt, round*
- Vektorové funkce a generování vektorů - *max, min, sort*
- Maticové funkce a generování matic - *det, rand, ones, zeros, eye*
- Skalární operace - $+, -, *, /, \hat{}$
- Maticové a vektorové operace - $+, -, *, '$(transponování), \ ($A\backslash v = x \Leftrightarrow Ax = v$) Operace "po prvcích" - $.*$, $.\hat{}$, ./
- 2D grafika (vykreslení grafů funkcí jedné proměnné) - *plot, hold on, hold off, figure*
- 3D grafika (vykreslení grafů funkcí dvou proměnných) - *meshgrid, mesh, contour, hold on, hold off, figure*
- Řídící příkazy - *if* (podmíněný příkaz), *for* (příkaz cyklu se známým počtem opakování), *while* (příkaz cyklu s podmínkou na začátku)

[1] MATrix LABoratory
[2] K. Sigmon - MATLAB Primer

- Relace a logické operace - <, >, <=, >=, ==, ~=, &, |, ~
- Skripty a funkce - *function*

Vše si vyzkoušíme při řešení následujících úloh.

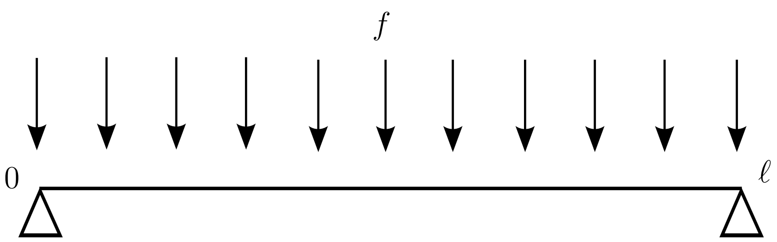
Příklad 1 Sestrojte v Matlabu grafy následujících funkcí:

- $f(x) = x^2$,
- $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$,
- $f(x) = x^2 \cdot \sin \frac{1}{x^2}$,
- $f(x) = |x|$.

Příklad 2 Sestrojte v Matlabu grafy následujících funkcí:

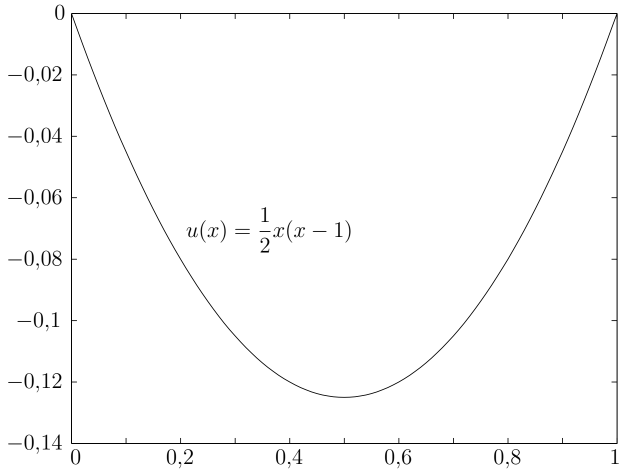
- $f(x, y) = x^2 + y^2$,
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$,
- $f(x, y) = (x^2 + y^2) \cdot \sin \frac{1}{x^2+y^2}$,
- $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$.

Příklad 3 Nyní si představme, že máme nataženou strunu mezi dvěma úchyty. Na



strunu působí po celé délce vertikální síla, jejíž hustota je konstantní a má hodnotu f ($\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1}$). Tuhost struny je dána konstantou k ($\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1}$) a její délka je rovna konstantě ℓ (m). Průhyb struny lze modelovat funkcí

$$u(x) = \frac{f}{2k} x(\ell - x) \quad \text{pro } x \in \langle 0,\, \ell \rangle.$$



Např. pokud je $f = -1$, $k = 1$ a $\ell = 1$, je průhyb struny znázorněn na výše uvedeném obrázku.

Mějme strunu, kde $\ell = 1$ a $k = 10^4$. Zjistěte, jaká může být maximální hodnota hustoty síly f, která působí na strunu tak, aby se prohnula nejvýše o 0,1 m. [3]

[3]Nápověda: K řešení příkladu použijte příkazy cyklu.

V tomto cvičení si nejprve povíme, co se skrývá pod pojmy reálná číselná řada a její konvergence.

<u>`Řadou reálných čísel`</u> rozumíme výraz

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \overset{\text{ozn.}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

kde $a_n \in \mathbb{R}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.[4]
Například:

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 + (-1) + 1 + \cdots$ (příklad tzv. <u>`alternující řady`</u>).

ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$ (příklad tzv. <u>`aritmetické řady`</u>).

iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots$, kde $q \in \mathbb{R}$ (příklad tzv. <u>`geometrické řady`</u>).

iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ je tzv. <u>`harmonická řada`</u>.

Číslo a_n nazýváme <u>n`-tým členem řady`</u> (1), posloupnost (s_n) definovanou předpisem

$$s_n \overset{\text{def.}}{=} a_1 + a_2 + \cdots + a_n \overset{\text{ozn.}}{=} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

nazýváme <u>`posloupností částečných součtů řady`</u> (1). Existuje-li

$$\lim s_n \overset{\text{ozn.}}{=} s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\},$$

nazýváme ji <u>`součtem řady`</u> (1) a píšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Například:

i) Součet $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ neexistuje, jelikož $s_n = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \text{ sudé}, \\ 1 & \text{pro } n \text{ liché}. \end{cases}$

[4] Symboly $\mathbb{R}$ a $\mathbb{N}$ označují množiny všech reálných a přirozených čísel.

ii) Součet $\sum_{n=1}^{\infty} n = +\infty$, jelikož $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

iii) Součet $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \begin{cases} +\infty, & \text{je-li } q \geq 1, \\ \frac{1}{1-q}, & \text{je-li } |q| < 1, \\ \text{neexistuje}, & \text{je-li } q \leq -1, \end{cases}$ jelikož $s_n = \begin{cases} n & \text{pro } q = 1, \\ \frac{1-q^n}{1-q} & \text{pro } q \neq 1. \end{cases}$

iv) Lze ukázat, že součet $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

Říkáme dále, že řada `konverguje`, jestliže je její součet roven nějakému reálnému číslu. V opačném případě, tj. pokud má řada součet roven $+\infty$ nebo $-\infty$ nebo pokud řada součet nemá, říkáme, že řada `diverguje`.
Například:

i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ diverguje.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} n$ diverguje.

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ konverguje, pokud $|q| < 1$, a diverguje, pokud $|q| \geq 1$.

iv) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje.

Výše uvedené pojmy můžeme nyní využít k řešení následujících úloh.

Příklad 1 Zkuste odhadnout s využitím Matlabu součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Příklad 2 Dvě města A a B jsou od sebe po železnici vzdálena 90 km. Z města A do města B vyjede vlak rychlostí 10 km/h. V tu samou chvíli vyjede z města B vlak do města A po té samé koleji stejnou rychlostí. Ve chvíli, kdy se vlaky rozjedou vstříc jisté zkáze, z předního okna lokomotivy vlaku jedoucího z A do B se odrazí moucha rychlostí 100 km/h a letí vstříc druhému vlaku. Ve chvíli, kdy k němu doletí, dotkne se nožkou jeho předního skla a letí zpátky. Takto moucha lítá mezi vlaky než jí rozmáčknou na placku při jejich srážce. Kolik kilometrů moucha celkem nalétala? Jakou vzdálenost moucha urazila mezi 15. a 16. odražením se od oken lokomotiv (jinými slovy: jak dlouhý byl její 15. let mezi vlaky)?

Příklad 3 Kolik členů harmonické řady musíte nejméně sečíst, aby tento částečný součet řady měl hodnotu alespoň 10 (15, 20)?

Příklad 4 Zkuste odhadnout s využitím Matlabu součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}.$$

Cvičení 3: Jak pracuje kalkulačka – k čemu je dobrý Taylorův polynom?

Při řešení různých matematických úloh se jistě setkáme s potřebou vyčíslit hodnotu nějaké funkce v daném bodě. V některých případech to ale může být obtížné. Uvažujeme-li například funkci $\sqrt{x}$, určit hodnotu této funkce v bodě 1 je jednoduché: $\sqrt{1} = 1$. Jak ale pomocí desetinné čárky (alespoň přibližně) zapsat hodnotu funkce $\sqrt{x}$ například v bodě 2? Odpověď je jasná: použijeme kalkulačku. Jak ovšem číslo 1,414213... spočetla kalkulačka? V tomto cvičení si ukážeme postup, jak lze přibližně vypočíst hodnotu "obtížně vyčíslitelných" funkcí v ruce a simulovat tím práci jednoduché kalkulačky.

Nejprve si zavedeme následující pojmy, s nimiž budeme dále pracovat.

Předpokládejme nejprve, že funkce f má derivaci[5] v bodě x_0. Jestliže derivace f' má derivaci v bodě x_0, definujeme druhou derivaci funkce f v bodě x_0 jako

$$f''(x_0) \stackrel{\text{def.}}{=} (f')'(x_0).$$

Podobně postupujeme při definicích třetí, čtvrté, ... derivace funkce f v bodě x_0. Indukcí tedy definujeme pro $n \in \mathbb{N}$ derivaci n-tého řádu funkce f v bodě x_0 jako

$$f^{(n)}(x_0) \stackrel{\text{def.}}{=} (f^{(n-1)})'(x_0),$$

přičemž $f^{(0)}(x_0) \stackrel{\text{def.}}{=} f(x_0)$.

Pokud má funkce f v bodě x_0 derivace až do řádu n včetně, definujeme Taylorův[6] polynom řádu n funkce f v bodě x_0 vztahem

$$\begin{aligned} T_n(x) &\stackrel{\text{def.}}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \end{aligned}$$

Definujme si navíc okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ (o poloměru $\delta > 0$) jako otevřený interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ a značme jej $U_\delta(x_0)$.

Nyní budeme chtít nahradit funkci f na okolí $U_\delta(x_0)$ Taylorovým polynomem,[7] čímž se dopustíme určité chyby. Výhodou lokální aproximace funkce pomocí polynomu je však například to, že funkční hodnotu každého polynomu lze spočíst pouze pomocí operací sčítání a násobení. Čím vyšší stupeň Taylorova polynomu pak budeme při aproximaci uvažovat, tím menší se dopustíme chyby (tj. tím přesnější nahrazení získáme).

[5] Nechť $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ a $x_0 \in \mathbb{R}$. Jestliže existuje $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, nazveme ji derivací funkce f v bodě x_0 a značíme ji $f'(x_0)$.

[6] Brook Taylor byl anglický matematik, který své výsledky publikoval počátkem 18. století.

[7] Toto nahrazení budeme zapisovat takto: $f(x) \approx T_n(x)$.

Taylorova věta

Věta 1 *Předpokládejme, že funkce f má v každém bodě okolí $U_\delta(x_0)$ všechny derivace až do řádu $n+1$ včetně, a uvažujme $x \in U_\delta(x_0)$, $x \neq x_0$. Pak existuje číslo ξ ležící mezi x_0 a x takové, že platí*

$$f(x) = T_n(x) + R_{n+1}(x),$$

kde R_{n+1} je tzv. zbytek po n-tém členu *daný vztahem*

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Uvedená podoba zbytku se nazývá Lagrangeův[8] tvar zbytku. Existuje více (někdy užitečnějších) tvarů zbytku. Přesnost aproximace hodnoty funkce f v $x \in U_\delta(x_0)$ hodnotou Taylorova polynomu $T_n(x)$ lze zjistit odhadem velikosti zbytku $R_{n+1}(x)$.

Vraťme se na chvíli zpět k našemu problému jak vyjádřit (přibližně) hodnotu čísla $\sqrt{2}$. Použijeme výše uvedených úvah a funkci $f(x) = \sqrt{x}$ nahradíme na okolí bodu $x_0 = 1$ Taylorovým polynomem například stupně 4. Dostaneme tak

$$\sqrt{2} \approx T_4(2) = f(1) + f'(1) + \frac{f''(1)}{2} + \frac{f'''(1)}{6} + \frac{f^{(4)}(1)}{24}.$$

Počítejme:

- $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(1) = \dfrac{1}{2}$,
- $f''(x) = -\dfrac{1}{4\sqrt{x^3}}$, $f''(1) = -\dfrac{1}{4}$,
- $f'''(x) = \dfrac{3}{8\sqrt{x^5}}$, $f'''(1) = \dfrac{3}{8}$,
- $f^{(4)}(x) = -\dfrac{15}{16\sqrt{x^7}}$, $f^{(4)}(1) = -\dfrac{15}{16}$.

Tedy

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &\approx 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{3}{48} - \frac{15}{384} \\ &\approx 1{,}3984375.\end{aligned}$$

Není těžké v tomto případě odhadnout velikost zbytku $R_5(2)$. Protože $f^{(5)}(x) = \frac{105}{32\sqrt{x^9}}$, pak platí $R_5(2) \leq \frac{f^{(5)}(1)}{5!}(2-1)^5 = \frac{7}{256} \approx 0{,}0273438$. Lepší přesnosti vyčíslení hodnoty $\sqrt{2}$

[8] Joseph Louis Lagrange byl významný francouzský matematik a mechanik. Tvořil zejména v druhé polovině 18. století.

bychom dosáhli, pokud bychom zvolili vyšší řád Taylorova polynomu funkce $\sqrt{x}$ v bodě 1. [9]

Nyní se zabývejme řešením následujících úloh.

Příklad 1 Určete (přibližně) hodnotu čísla e. [10]

Příklad 2 Určete (přibližně) hodnotu čísla π. [11]

Zkusme se zamyslet, zda by nešlo naši jednoduchou kalkulačku trochu zrychlit, tedy zda můžeme dosáhnout stejného přiblížení k požadované hodnotě s využitím menšího počtu aritmetických operací. Odpověď zní ano – můžeme použít metodu prostých iterací, kterou si nyní popíšeme.

`Metoda prostých iterací`

Věta 2 *Nechť existuje η takové, že $f(\eta) = \eta$ a $|f'(x)| \leq \lambda < 1$ pro $x \in \langle \eta - \alpha, \eta + \alpha \rangle$. Zvolme bod x_0 v tomto intervalu. Potom posloupnost (x_n) definovaná předpisem*

$$x_{n+1} \stackrel{\text{def.}}{=} f(x_n)$$

konverguje k η. [12]

Například: posloupnost (x_n) daná předpisem

$$x_{n+1} \stackrel{\text{def.}}{=} x_n - k(x_n^2 - 2), \; k \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{1}{4} \tag{2}$$

konverguje k $\sqrt{2}$ pro libovolné $x_0 \in (0, 4)$.

Uveďme si nyní iterační algoritmus, kterým lze najít přibližné řešení rovnice $f(x) = x$, a to v případě, že počáteční aproximace x_0 a funkce f splňují předpoklady Věty 2.

---

[9] Zkuste si rozmyslet, že $T_n(2) = 1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{4!} \cdot \left(-\frac{15}{16}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(-\frac{2n-3}{2}\right)\right) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{-1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-3)}{2^k}$.

[10] Nápověda: Použijte Taylorův polynom stupně n funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$ ve vhodném bodě x_0.

[11] Nápověda: Použijte Taylorův polynom stupně n funkce $f(x) = \operatorname{arctg} x$ ve vhodném bodě x_0.

[12] Takovému η, kdy $f(\eta) = \eta$, říkáme pevný bod funkce f.

Algoritmus (`Metoda prostých iterací`)

1. $\varepsilon > 0$ (přesnost) x_0 $k := 0$ $x_1 := f(x_0)$ 2. while $\lvert x_{k+1} - x_k \rvert \geq \varepsilon$ $k := k + 1$ $x_{k+1} := f(x_k)$ end 3. x_{k+1} aproximuje s danou přesností řešení rovnice $f(x) = x$

Příklad 3 Změňte koeficient k v (2) tak, aby daná posloupnost konvergovala k $\sqrt{2}$ rychleji než stávající posloupnost, pokud počáteční aproximace je $x_0 = 1$. Změňte koeficient k v (2) tak, aby posloupnost konvergovala k $\sqrt{2}$, pokud $x_0 = 5$.

Příklad 4 Určete (přibližně) hodnotu čísla π pomocí metody prostých iterací.

Úkolem matematika je často modelovat některé reálné děje. My se v tomto cvičení pokusíme o odhad vývoje počtu obyvatel a na závěr o model jednoho fyzikálního děje. K tomu si nejprve musíme říci, co jsou diferenciální rovnice a jak je můžeme numericky řešit.

`Obyčejnou diferenciální rovnicí 1. řádu` rozumíme rovnici tvaru

$$y'(t) = f(t, y(t)),$$

kde $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$. `Řešením této rovnice` rozumíme každou funkci $\bar{y} : (a,b) \mapsto \mathbb{R}$ $(a < b)$ takovou, že pro všechna $t \in (a,b)$ platí

$$\bar{y}'(t) = f(t, \bar{y}(t)).$$

Například funkce $\bar{y}(t) = t$ je řešením diferenciální rovnice $y'(t) = \frac{y(t)}{t}$ na intervalu $(0, +\infty)$. Jiným řešením této rovnice na intervalu $(0, +\infty)$ je například funkce $\bar{y}(t) = 2t$ či $\bar{y}(t) = 3t$. Není těžké ukázat, že každá funkce $\bar{y}(t) = kt$ $(k \in \mathbb{R})$ je řešením diferenciální rovnice $y'(t) = \frac{y(t)}{t}$ na intervalu $(0, +\infty)$, tj. naše úloha má nekonečně mnoho řešení. Zkusme navíc přidat k naší rovnici například podmínku $y(1) = 2$, tj. chceme nalézt funkci, která řeší naši rovnici a navíc její funkční hodnota v $t = 1$ je rovna 2. Je snadné si uvědomit, že taková úloha má pouze jediné řešení $\bar{y}(t) = 2t$.

Úlohu, která obsahuje řešení obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu a navíc tzv. počáteční podmínku $y(t_0) = y_0$, nazýváme `Cauchyovou úlohou` a zapisujeme ji obecně takto:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{3}$$

Pokud má funkce $f(t, y(t))$ speciální tvar[13], pak existují metody, jak analyticky řešit výše popsanou Cauchyovou úlohu. Často však analytické řešení nalézt nelze nebo by jeho nalezení bylo příliš náročné. V takovém případě se nabízí použití některé z numerických metod pro přibližné řešení diferenciálních rovnic 1. řádu s počáteční podmínkou. Podívejme se nyní na jednu z těchto metod – Eulerovu metodu.[14]

`Eulerova metoda`

Eulerova metoda je nejjednodušší způsob numerického řešení Cauchyových úloh. Metoda využívá aproximace derivace funkce f v bodě x_0

$$f'(x_0) \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

tzv. diferencí f v bodě x_0

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

[13] Například f závisí lineárně na funkci $y(t)$, tj. $f(t, y(t)) = a(t)y(t) + b(t)$, kde a a b jsou reálné funkce.
[14] Publikoval ji významný švýcarský matematik a fyzik Leonhard Euler v roce 1768.

kde h je “malé”, proto

$$y'(t) \approx \frac{y(t+h)-y(t)}{h}.$$

Po jednoduché úpravě dostaneme

$$y(t+h) \approx y(t) + hy'(t).$$[15]

Použijeme-li (3), pak získáme vztah

$$y(t+h) \approx y(t) + hf(t, y(t)). \tag{4}$$

Dále zvolme pevnou velikost kroku h (“malou”) a sestrojme posloupnost

$$t_0,\ t_1 \stackrel{\text{def.}}{=} t_0 + h,\ t_2 \stackrel{\text{def.}}{=} t_0 + 2h,\ \ldots$$

Označme pomocí y_n aproximaci hodnoty přesného řešení $y(t_n)$. Z (4) dostaneme rekurzivní vztah

$$\boxed{\begin{array}{l} y_0 = y(t_0), \\ y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n),\ n = 0, 1, \ldots \end{array}}$$

který použijeme pro numerické řešení Cauchyovy úlohy (3). Dá se ukázat, že chyba aproximace řešení pomocí Eulerovy metody je přímo úměrná velikosti kroku h.

Nyní pomocí Eulerovy metody vyřešíme následující úlohy.

`1. Populační rovnice`

Nechť $y(t)$ označuje velikost populace v čase t a y_0 popisuje velikost populace v čase t_0. Nechť a je konstanta, která udává přírůstek populace. Pak jednoduchý model vývoje populace nám poskytne následující populační rovnice s počáteční podmínkou

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{5}$$

Rovnice (5) poměrně dobře aproximuje vývoj populace, která má dostatečně velké zásoby potravy a dalších zdrojů a může neomezeně růst. Lepší model dává následující populační rovnice s počáteční podmínkou, ve které se navíc objevuje člen $b(y(t))^2$ (b je konstanta)

$$\begin{cases} y'(t) = ay(t) - b(y(t))^2, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{6}$$

Rovnice (6) dobře aproximuje vývoj populace, která už je dostatečně velká, má omezené zásoby potravy i dalších zdrojů a mezi členy populace dochází k soupeření o tyto zdroje (to popisuje konstanta b).

[15] Jde o Taylorův polynom 1. řádu funkce y v bodě t.

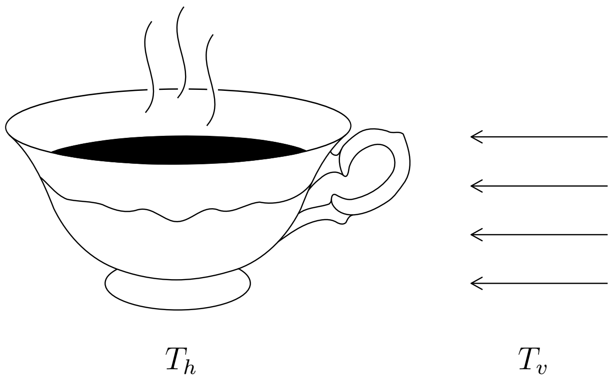
Příklad 1 Použijte populační rovnici s počáteční podmínkou (6) k modelování vývoje počtu obyvatel USA v letech 1790 - 1950. Konstanty a, b byly odhadnuty takto: $a = 0{,}03134$, $b = 1{,}5887 \cdot 10^{-10}$. Čas t je v rocích. Navíc víte, že počet obyvatel v USA v roce 1790 byl 3 929 000. Úlohu řešte numericky Eulerovou metodou. Spočítané hodnoty můžete porovnat se skutečnými hodnotami v následující tabulce.

Rok	Odhad	Absolutní chyba	Relativní chyba	Skutečnost
1790	3 929 000			3 929 000
1800				5 308 000
1810				7 240 000
1820				9 638 000
1830				12 866 000
1840				17 069 000
1850				23 192 000
1860				31 443 000
1870				38 558 000
1880				50 156 000
1890				62 948 000
1900				75 995 000
1910				91 972 000
1920				105 711 000
1930				122 775 000
1940				131 669 000
1950				150 697 000

Populace USA v letech 1790 - 1950

2. Změna teploty tělesa

Mějme následující fyzikální úlohu. Hrnek s čerstvě uvařenou kávou má teplotu T_h a je ochlazován vzduchem v místnosti o konstantní teplotě T_v (viz obrázek níže). Je rozumné



modelovat teplotu hrnku jako funkci $T_h(t)$, která se mění rychlostí[16] přímo úměrnou rozdílu teploty vzduchu a hrnku s koeficientem k. Nechť teplota hrnku v čase t_0 je dána hodnotou T_{h0}. Dostáváme tedy následující model:

$$\begin{cases} T_h'(t) = k(T_v - T_h(t)), \\ T_h(t_0) = T_{h0}. \end{cases} \tag{7}$$

Příklad 2 Použijte řešení úlohy (7) k modelování ochlazování hrnku s kávou, která měla v čase $t_0 = 0$ teplotu 100°C. Teplota vzduchu má hodnotu $T_v = 20$°C a konstanta $k = 0{,}04$. Čas t je v minutách. Zjistěte, za jak dlouho se hrnek ochladí alespoň na 50°C. Úlohu řešte numericky Eulerovou metodou.

[16] Tuto rychlost matematicky popisuje derivace funkce $T_h(t)$.

Apendix A: Funkce arkustangens

Uvažujme nejprve funkci $f:\ \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Funkci f^{-1}, pro niž platí:

i) její definiční obor Df^{-1} je roven oboru hodnot funkce f a

ii) pro každé $x \in Df^{-1}$ platí, že $f^{-1}(x) = y \;\Leftrightarrow\; f(y) = x$,

nazveme `funkcí inverzní` k funkci f.

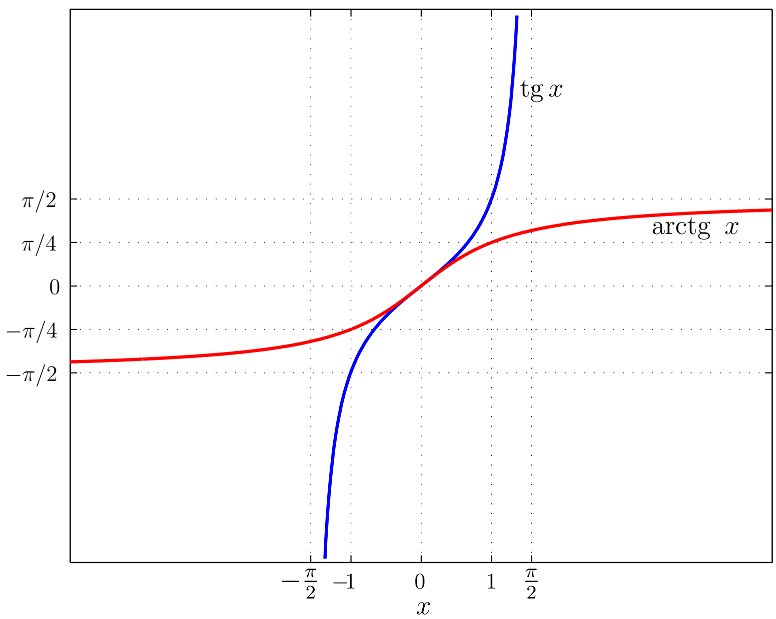
Lze ukázat, že f^{-1} existuje právě tehdy, je-li f prostá. Graf f^{-1} je přitom osově souměrný s grafem f dle přímky $y = x$.

Funkci inverzní k funkci tangens zúžené na interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ nazveme `arkustangens` a označujeme jako arctg , tj.

$$\operatorname{arctg} \stackrel{\text{def.}}{=} \left(\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1}.$$

Funkce arkustangens má tyto vlastnosti (viz také níže uvedený obrázek):

- definiční obor je roven $\mathbb{R}$,
- oborem hodnot je interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,
- funkce arctg je lichá, tj. arctg x = arctg $(-x)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.



- $(c)' = 0,\ c \in \mathbb{R}$ (konst.), $x \in \mathbb{R}$,
- $(x^r)' = rx^{r-1},\ r \in \mathbb{R},\ x \in (0, +\infty)$,
- $(\sin x)' = \cos x,\ x \in \mathbb{R}$,
- $(\cos x)' = -\sin x,\ x \in \mathbb{R}$,
- $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x,\ x \in \mathbb{R}$,
- $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x},\ x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\right\}$,
- $(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}$,
- $(\ln x)' = \dfrac{1}{x},\ x \in (0, +\infty)$,
- $(\operatorname{arctg}\ x)' = \dfrac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}$.

Je-li $x \in \mathbb{R}$, pak platí

- $(cf)'(x) = cf'(x)$, je-li $c \in \mathbb{R}$ konstanta a existuje-li derivace $f'(x)$,
- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$, má-li pravá strana rovnosti smysl,
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, existují-li derivace $f'(x)$ a $g'(x)$,
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, existují-li derivace $f'(x)$ a $g'(x)$ a je-li $g(x) \neq 0$.