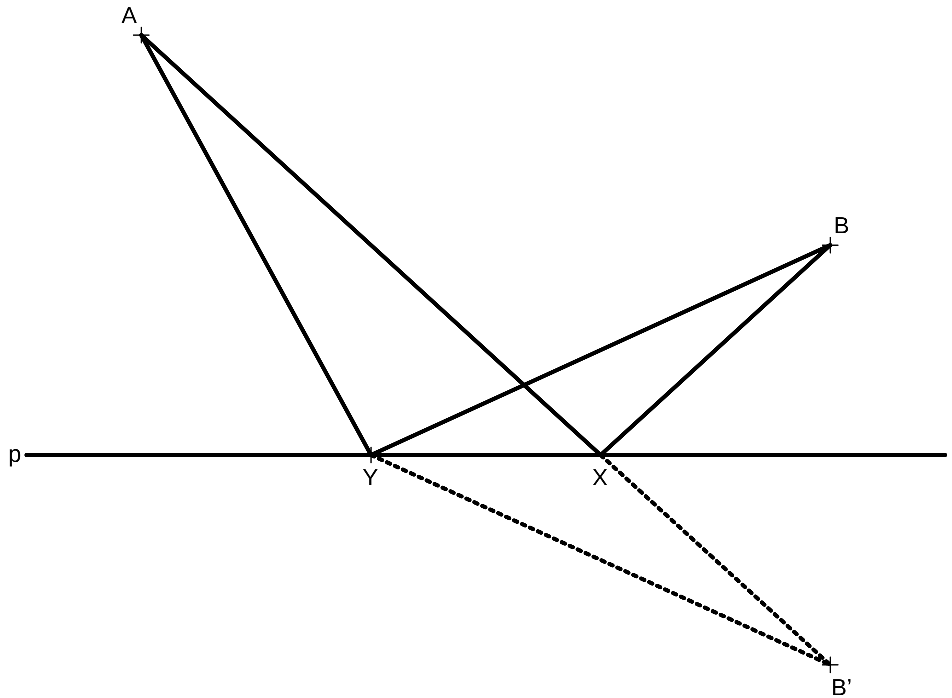
ŠKOMAM 2008

Extrémální úlohy v geometrii

Petr Vodstrčil

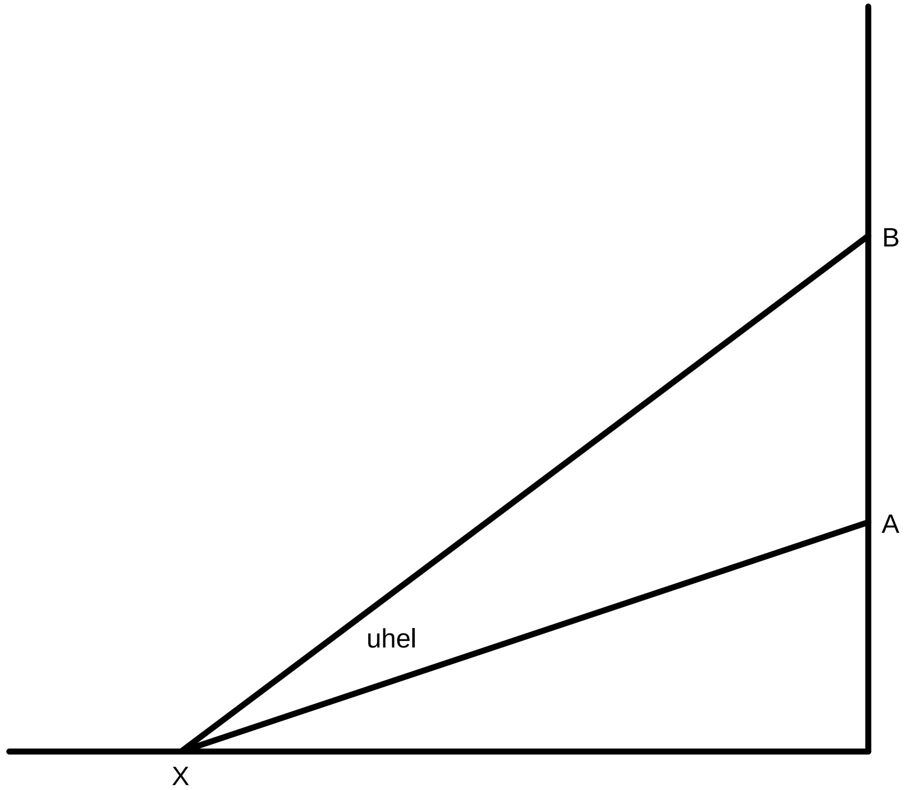
Příklad (Hérónova úloha). *Nechť A, B jsou různé body ležící ve stejné polorovině vyťaté přímkou p. Najděte bod $X \in p$ tak, aby součet $|AX| + |BX|$ byl minimální.*

Řešení. Nechť $Y \in p$ je libovolný bod. Nyní sestrojíme bod B' jako obraz bodu B v osové souměrnosti s osou p.

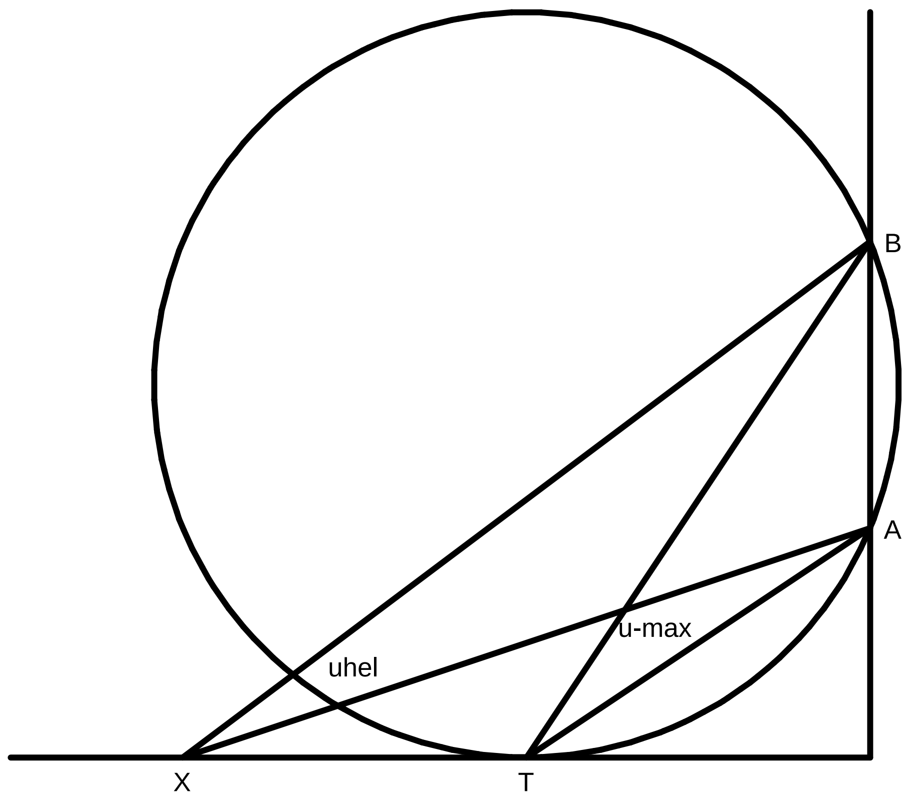


Jistě platí $|AY| + |BY| = |AY| + |YB'|$. Není tedy těžké si uvědomit, že hledaný bod X dostaneme jako průsečík přímek p a AB'. $\square$

Příklad. *Na zdi je zavěšen obraz. Jeho spodní okraj A se nachází a délkových jednotek nad úrovní očí a jeho horní okraj B se nachází b délkových jednotek nad úrovní očí. Určete, z jaké vzdálenosti je obraz vidět pod největším zorným úhlem.*



Řešení. Řešení je založeno na rozboru následujícího obrázku.



Vezmeme-li v úvahu znalosti o obvodových a středových úhlech, dostaneme, že optimální je postavit se do bodu T (bod dotyku). Z tohoto bodu bude obraz vidět pod největším zorným úhlem. Vzdálenost bodu T od zdi je možné dopočítat např. pomocí mocnosti bodu ke kružnici. □

Poznámka (Analytické řešení). Označme x naši vzdálenost od zdi a α úhel, pod kterým vidíme obraz. Z goniometrických vzorců je možné odvodit, že

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x(b-a)}{x^2+ab}.$$

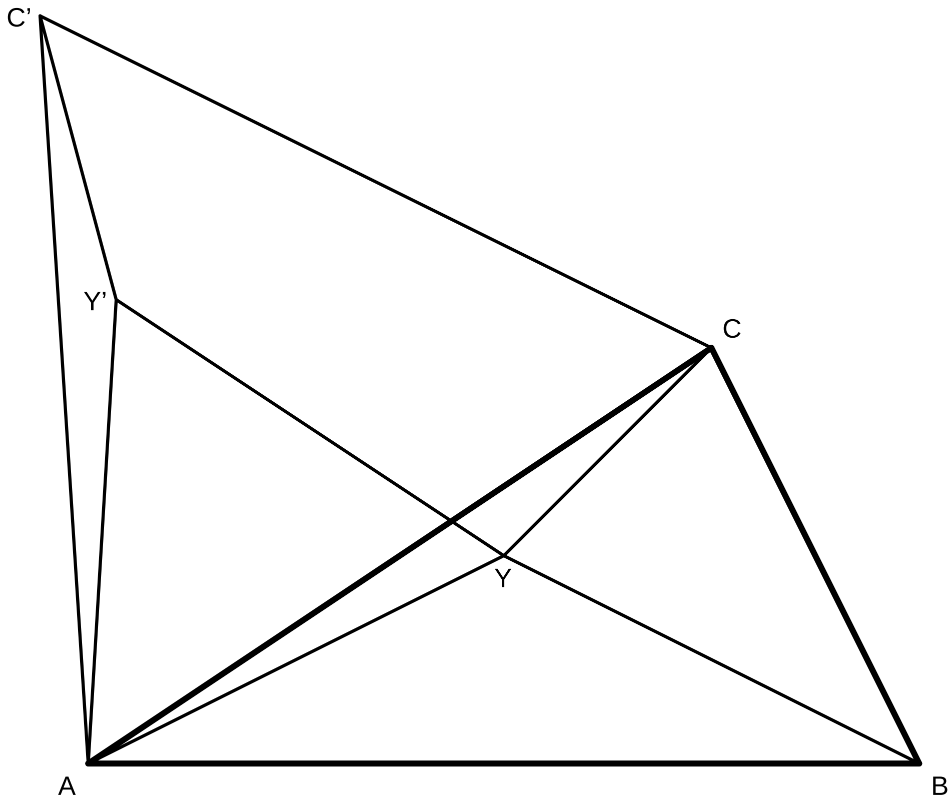
Nyní použijme na jmenovatele elementární nerovnost $p^2+q^2 \geq 2pq$. Poznamenejme, že v této nerovnosti nastává rovnost právě tehdy, když $p=q$. Celkem tedy dostáváme

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x(b-a)}{x^2+ab} = \frac{x(b-a)}{x^2+(\sqrt{ab})^2} \leq \frac{x(b-a)}{2x\sqrt{ab}} = \frac{b-a}{2\sqrt{ab}},$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $x=\sqrt{ab}$, což je vzdálenost, pro kterou je $\operatorname{tg}\alpha$ (a tedy i samotné α) maximální.

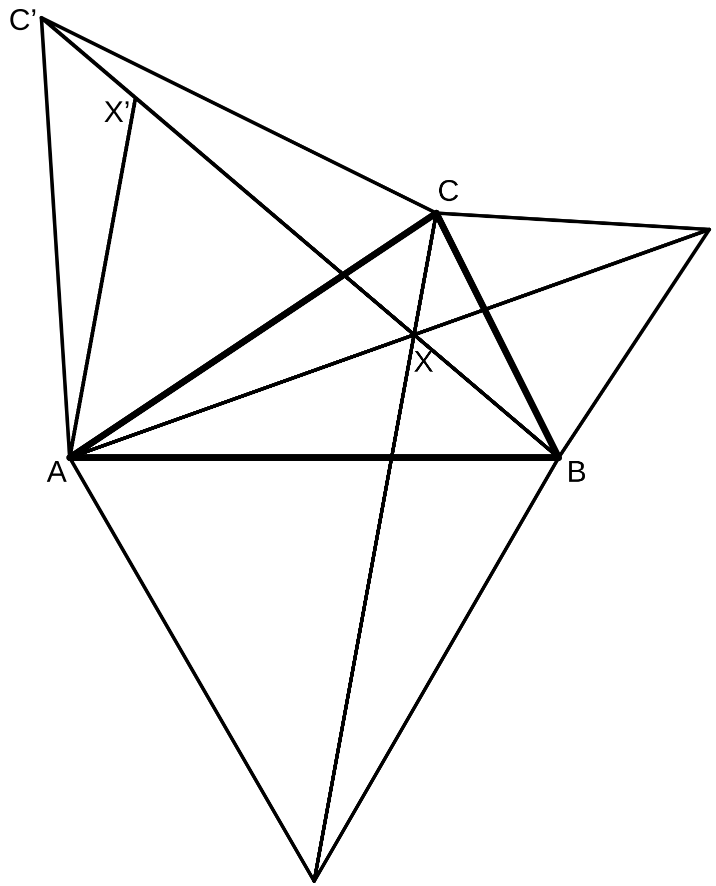
Příklad. *Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Uvnitř tohoto trojúhelníku najděte bod X, pro který je součet $|AX|+|BX|+|CX|$ minimální.*

Řešení. Nechť Y je libovolný vnitřní bod trojúhelníku ABC. Použijeme otočení kolem bodu A o 60 stupňů proti směru hodinových ručiček.



Jistě $|C'Y'|=|CY|$, $|Y'Y|=|AY|$, a tedy
$|AY|+|BY|+|CY|=|C'Y'|+|Y'Y|+|YB|$.

Není obtížné si uvědomit, že bod X, který hledáme, sestrojíme podle následujícího obrázku.



$\square$

Poznámka. Bod X se nazývá Torricelliho bod.

Poznámka. Pokud bychom chtěli úlohu řešit analyticky (např. pro trojúhelník ABC, kde $A = (0,0)$, $B = (4,0)$, $C = (3,2)$), museli bychom hledat minimum funkce

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2},$$

což by bylo komplikované. (Vychází $f_{min} = \sqrt{17 + 8\sqrt{3}}$.)

Pro ilustraci si ukažme vrstevnice funkce f v trojúhelníku ABC.