VYSOKÁ ŠKOLA BÁŇSKÁ – TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

Newtonova–Leibnizova formule aneb vztah mezi určitým a neurčitým integrálem

Petra Šarmanová

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Tento text byl zpracován pro účely Školy matematického modelování ŠKOMAM 2007 konané v Ostravě ve dnech 20. 2. – 22. 2. 2007.

Cílem je připomenout pojmy derivace, neurčitý integrál a konstrukci Riemannova určitého integrálu a ukázat vztah mezi určitým a neurčitým integrálem, tzv. Newtonovu–Leibnizovu formuli. Jedná se o nejdůležitější pojmy diferenciálního a integrálního počtu funkcí jedné proměnné, který vznikl v 17. století a lze ho považovat za jeden z největším mezníků ve vývoji lidstva. Teprve díky prostředkům tohoto nového počtu bylo možno matematicky zachytit pohyb. Od té doby bylo možno zkoumat létání, proudění kapalin, elektřinu, magnetismus a a vše, co s pohybem souvisí.

Prezentované materiály jsou součástí multimediálního výukového CD určeného pro výuku matematické analýzy I v prvním ročníku VŠB-TU Ostrava. Toto CD, které dostáváte zdarma k dispozici, obsahuje výukový text obohacený o animace, interaktivní programy a testy. Vysvětlení dané problematiky je vždy následováno množstvím řešených příkladů, kontrolních otázek, neřešených příkladů a autotestů. Některé definice, věty, případně příklady jsou dynamicky ilustrovány pomocí animací. Samozřejmostí jsou hypertextové odkazy a rejstřík.

Prezentované materiály byly vytvořeny v rámci projektu Operačního programu Rozvoje lidských zdrojů CZ.04.1.03/3.2.15.1/0016 „Studijní opory s převažujícími distančními prvky pro předměty teoretického základu studia“. Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Kapitola 2

Připomenutí pojmu derivace

Derivací získáváme „rychlost změny“ nějaké měnící se veličiny. Hodnota, poloha nebo směr pohybu musí být popsány nějakou funkcí (analytickým výrazem, vzorcem). Derivováním této funkce vzniká nová funkce, která již udává hledanou „rychlost změny“. Stručně řečeno, derivování transformuje jednu funkci na druhou.

Odvození definice derivace na základě mechanického a geometrického modelu byla věnována předchozí přednáška. Nyní tedy jen stručně připomeneme definice derivace funkce v bodě a derivace funkce na množině.

Definice 2.1. Nechť $x_0 \in D(f)$. Existuje-li limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

značíme ji $f'(x_0)$ a nazýváme *derivací funkce* f *v bodě* x_0.
Je-li $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, pak říkáme, že f *má v bodě* x_0 *vlastní derivaci*.
Je-li $f'(x_0) = \pm\infty$, říkáme, že *funkce* f *má v bodě* x_0 *nevlastní derivaci*.

Animace

$\mathscr{A}$

Celý tento dynamický proces, kdy sečna přechází v tečnu a směrnice sečny ve směrnici tečny, si ještě jednou ilustrujeme pomocí následující animace.

Kliknutím kamkoliv na následující stránku animaci aktivujete, dále ovládáte zelenými tlačítky.

Definice derivace - mechanický model

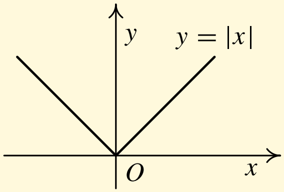
Ještě připomeňme vztah mezi derivací funkce v bodě a spojitostí v tomto bodě.

Věta 2.2. *Má-li funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ vlastní derivaci, je v tomto bodě spojitá.*

Opačná implikace však neplatí. Ze spojitosti funkce v bodě neplyne existence derivace v tomto bodě. Triviálním příkladem spojité funkce, která nemá v bodě $x_0 = 0$ derivaci, je funkce absolutní hodnota $f\colon\ y = |x|$. Připomeňme definici této funkce.

$$f : y = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x, & x \geqq 0. \end{cases}$$

Graf:



Obecně, v bodech, kde má graf funkce „hroty“, nemá funkce derivaci.

Předchozí definice vymezuje pojem derivaci funkce v bodě x_0. Tato derivace je nějaké číslo. Jestliže má f derivaci v každém bodě definičního oboru (popř. nějaké jeho části), dostáváme novou funkci f' definovanou takto:

Definice 2.3. Nechť existuje vlastní derivace $f'(x)$ funkce f pro všechna $x \in M$, kde $M \subset D(f)$. Pak funkci $f'\colon\ y = f'(x)$, $x \in M$, nazýváme *derivací funkce f na M*.

Obsah
8. strana ze 26
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka / Okno
V okně:
Zobrazit / Skrýt ikony
Zobrazit / Skrýt menu

Ještě jednou připomeňme, že derivace přiřazuje funkci f novou funkci f'. Pro konkrétní hodnotu x může mít číslo $f'(x)$ různou interpretaci podle toho, co vyjadřuje funkce f. Například:

- geometricky má hodnota $f'(x)$ význam směrnice tečny ke grafu funkce f v bodě $[x, f(x)]$,
- jestliže f vyjadřuje polohu (dráhu) bodu pohybujícího se po přímce v závislosti na čase, pak $f'(x)$ udává okamžitou rychlost tohoto bodu v čase x,
- jestliže f vyjadřuje okamžitou rychlost bodu pohybujícího se po přímce v závislosti na čase, pak $f'(x)$ udává okamžité zrychlení tohoto bodu v čase x.

Obecně, hodnota $f'(x)$ vyjadřuje míru velikosti změny funkce f v závislosti na změně nezávislé proměnné x.

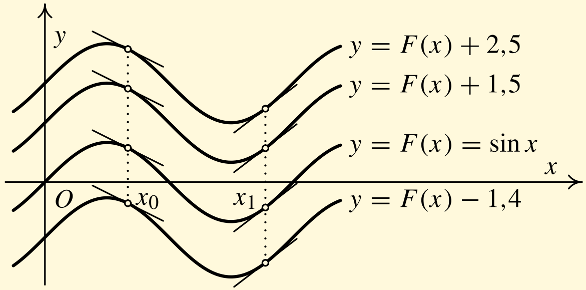
Kapitola 3

Neurčitý integrál

Zabývejme se nyní úlohou, která je v jistém smyslu inverzní k derivování. K zadané funkci f hledáme funkci F takovou, aby platilo $F' = f$. Ptáme se tedy, jakou funkci je nutné derivovat, abychom dostali zadanou funkci f. Tj.

- Ze znalosti směrnic tečen ke grafu funkce f chceme najít tuto funkci f.
- Ze znalosti okamžité rychlosti bodu chceme zjistit polohu tohoto bodu.
- Ze znalosti okamžitého zrychlení bodu chceme určit jeho okamžitou rychlost.

Definice 3.1. Nechť funkce f je definována na otevřeném intervalu (a, b) $(a, b \in \mathbb{R}^{\star}, a < b)$. Pak funkci F, pro kterou platí $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$, nazýváme *primitivní funkcí k funkci f na intervalu* (a, b).



Obr. 3.1 : Primitivní funkce k funkci $\cos x$

Chceme např. najít nějakou primitivní funkci k funkci $f\colon\ y = \cos x,\ x \in \mathbb{R}$. Není těžké uhodnout, že taková funkce je např. $F(x) = \sin x$, protože $(\sin x)' = \cos x$. Ale také např. $F(x) = \sin x + 5$ je primitivní funkcí, protože $(\sin x + 5)' = \cos x$. Obecně $F(x) = \sin x + c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je primitivní funkce k funkci f.

Grafy jednotlivých primitivních funkcí jsou posunuty ve směru osy y. Pro pevně zvolené x jsou tečny ke grafům funkcí $F(x) + c$ v bodech $[x, F(x) + c]$ pro lib. $c \in \mathbb{R}$ navzájem rovnoběžné, tj. mají stejné směrnice.

Věta 3.2. *Je-li funkce F primitivní funkcí k funkci f na otevřeném intervalu (a, b), tvoří funkce definované předpisy $F(x) + c$, kde $c \in \mathbb{R}$, právě všechny primitivní funkce k funkci f na intervalu (a, b).*

K dané funkci f tedy existuje nekonečně mnoho primitivních funkcí, které se navzájem „liší o konstantu“, tj. je-li F primitivní funkce k f, pak množina všech primitivních funkcí k f je množina $\{F + c, c \in \mathbb{R}\}$. Jinými slovy, jsou-li funkce F_1, F_2 primitivními funkcemi k funkci f na intervalu

(a, b), potom je jejich rozdíl $F_1 - F_2$ konstantní funkce.

Označení: Je-li F primitivní funkcí k funkci f, píšeme

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

a mluvíme o *neurčitém integrálu* funkce f.

Toto označení vychází z historických důvodů – znamení $\int$ vzniklo modifikací velkého „S“.

Při výpočtech však vzniká problém, kterou z primitivních funkcí takto označíme. Není dost dobře možné vybrat z množiny primitivních funkcí nějakého „vhodného reprezentanta“. Domluvme se tedy, že symbol $\int f(x)dx$ značí některou z primitivních funkcí k funkci f (každou další bychom dostali přičtením vhodné konstanty). Stává se tedy, že použijeme-li při výpočtu konkrétního neurčitého integrálu různé metody, dostáváme různé výsledky (různé primitivní fukce). Tyto výsledky se však musí lišit o konstantu.

Ještě poznamenejme, že mluvíme-li o primitivní funkci, máme vždy na mysli i nějaký otevřený interval, na němž je tato funkce definována.

Věta 3.3. *Je-li f spojitá na intervalu (a, b), pak na tomto intervalu existuje alespoň jedna primitivní funkce k funkci f.*

Dále si uvědomme, že každá primitivní funkce je spojitá. To plyne přímo z definice primitivní funkce: F je primitivní funkcí k f na intervalu (a, b), jestliže pro všechna $x \in (a, b)$ platí $F'(x) = f(x)$. Tedy F má vlastní derivaci všude na (a, b) a je proto podle věty 2.2 na tomto intervalu spojitá.

Seznámili jsme se s pojmem primitivní funkce a neurčitý integrál. Nyní bychom se měli naučit integrovat elementární funkce, tj. seznámit se s integračními metodami (metoda per partes, substituční metoda, integrace racionálních lomených funkcí, integrace některých speciálních typů funkcí obsahujících siny, kosiny, odmocniny...).

Kapitola 4

Určitý integrál

V předchozí kapitole jsme se seznámili s pojmem neurčitého integrálu, který funkci přiřazoval opět funkci. Určitý integrál, kterým se budeme zabývat v této kapitole, bude naproti tomu funkci přiřazovat číslo. Podle toho, co bude vyjadřovat daná funkce, bude mít výsledné číslo různý význam. Může udávat např.

- obsah rovinného obrazce,
- délku křivky,
- obsah pláště rotačního tělesa,
- objem rotačního nebo obecněji libovolného tělesa,
- hmotnost rovinného obrazce,
- statické momenty rovinného obrazce, sloužící k výpočtu jeho těžiště,

- moment setrvačnosti rovinného obrazce,
- celkový elektrický náboj rozložený na rovinném obrazci.

4.1. Konstrukce určitého integrálu

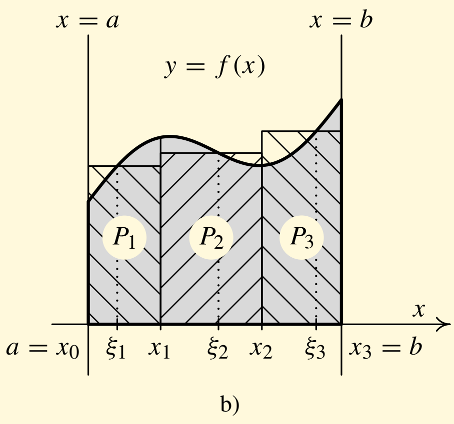
Než popíšeme formálně obecnou konstrukci určitého integrálu, vysvětlíme si na geometrickém příkladě myšlenku, která k této na první pohled poněkud komplikované konstrukci vede. Podobných motivačních úloh, pocházejících z geometrie, fyziky a dalších technických oborů, bychom mohli uvést mnoho.

Geometrická motivace

Představme si, že máme nezápornou ohraničenou funkci $f(x)$, definovanou na intervalu $\langle a, b\rangle$, která je pro jednoduchost spojitá. Graf této funkce společně se dvěma svislými přímkami $x = a$ a $x = b$ a osou x ohraničuje jistý rovinný obrazec P — viz obr. 4.1 a). Naším úkolem je určit jeho obsah.

Označíme-li obsah nějaké množiny $A \subset \mathbb{R}^2$ symbolem $m_2(A)$ (m od slova míra, dvojka v indexu, protože jednotkami jsou délkové jednotky na druhou, např. cm^2), rozhodně by obsah měl mít následující vlastnosti:

- Je to nezáporné číslo, tj. $m_2(A) \geqq 0$.
- Rozdělíme-li množinu A na dvě disjunktní části B a C, tj. $A = B \cup C$, $B \cap C = \emptyset$, je obsah A roven součtu obsahů B a C, tj. $m_2(A) = m_2(B) + m_2(C)$.
- Obsah obdélníku O o velikostech stran a a b je roven číslu ab, tj. $m_2(O) = ab$.



Obr. 4.1: Výpočet obsahu rovinné množiny

Navrhneme způsob, jak by se dalo při určení obsahu množiny P postupovat — viz obr. 4.1 b).

1. Rozdělíme množinu P rovnoběžkami s osou y na „pásky" (na obrázku 4.1 b) jsou tři, označené P_1, P_2 a P_3). Bude platit

$$m_2(P) = m_2(P_1) + m_2(P_2) + m_2(P_3).$$

2. Spočítáme obsahy jednotlivých „pásků". To však bohužel obecně neumíme, neboť ze tří stran jsou ohraničené sice úsečkami, ale ze čtvrté grafem funkce $f(x)$. Uděláme to tedy přibližně. Uvnitř základny každého „pásku" zvolíme bod (na našem obrázku jsou označené postupně ξ_1, ξ_2 a ξ_3), vypočteme v něm funkční hodnotu a v této výšce ho zarovnáme rovnoběžkou s osou x na obdélník. Tím se samozřejmě dopustíme určité chyby — někde obdélník „pásek" přesahuje, někde ho zase

nepokrývá. Při označení z obr. 4.1 b) dostaneme přibližnou hodnotu obsahu množiny P:

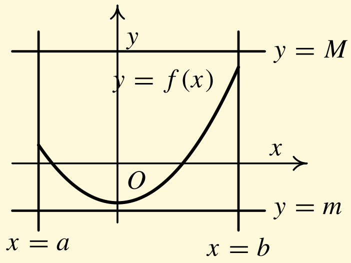
$$m_2(P) \doteq (x_1 - x_0)f(\xi_1) + (x_2 - x_1)f(\xi_2) + (x_3 - x_2)f(\xi_3). \tag{4.1}$$

(Uvědomte si, že $x_1 - x_0$ je délka základny prvního obdélníku, $f(\xi_1)$ je jeho výška atd.)

3. U „rozumných“ funkcí lze předpokládat, že čím více „pásků“ uděláme a čím budou užší, tím menší bude chyba, které se dopustíme nahrazením obdélníků za „pásky“. Provedeme-li tedy jakýsi limitní přechod, tj. budeme-li neomezeně zvětšovat počet „pásků“ a současně je zužovat, měla by se přibližná hodnota (daná součtem ploch obdélníků) čím dál víc přibližovat k přesné hodnotě obsahu $m_2(P)$. Zdá se tedy, že při řešení této úlohy bude užitečné vyšetřovat součty mající tvar pravé strany (4.1), kde ovšem počet sčítanců bude neomezeně narůstat.

Nejprve zavedeme několik potřebných pojmů a označení, abychom mohli definovat určitý integrál.

Uvažujme funkci $f(x)$, která je definovaná na *ohraničeném uzavřeném intervalu* $\langle a, b\rangle$ a která je na tomto intervalu *ohraničená*. Musejí tedy existovat konstanty m a M takové, že pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ platí $m \leqq f(x) \leqq M$. Graf funkce je tedy uzavřen v obdélníku, jehož strany jsou určeny přímkami $x = a$, $x = b$, $y = m$ a $y = M$ — viz obr. 4.2. (Studenti často zapomínají na předpoklad ohraničenosti, který je pro naši konstrukci určitého integrálu podstatný.)



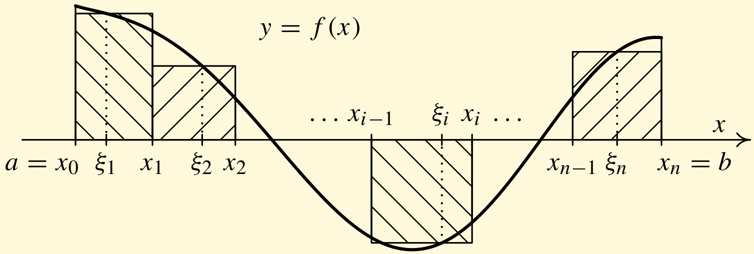
Obr. 4.2

Integrální součet

1. Posloupnost $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n$, $n \in \mathbb{N}$, kde $x_0 = a$ a $x_n = b$, nazveme *dělením intervalu* $\langle a, b\rangle$. Dělení budeme značit písmenem D. Interval $\langle a, b\rangle$ tedy bude rozdělen na n intervalů $\langle x_0, x_1\rangle$, $\langle x_1, x_2\rangle$,..., $\langle x_{n-1}, x_n\rangle$, kterým říkáme intervaly dělení D.
2. *Normou dělení D* nazveme číslo

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\},$$

které budeme značit $\nu(D)$. Toto číslo nám říká, jaká je délka největšího intervalu dělení. (Samozřejmě intervalů s touto maximální délkou může být víc; zejména všechny intervaly mohou být např. stejně dlouhé — tzv. *ekvidistantní dělení*.) Norma tudíž charakterizuje, jak jemné je dělení D.



Obr. 4.3: Znázornění integrálního součtu

3. V každém intervalu dělení D vybereme jeden bod. Označíme-li bod vybraný v i-tém intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, písmenem ξ_i, bude platit

$$x_0 \leqq \xi_1 \leqq x_1 \leqq \xi_2 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_{n-1} \leqq \xi_n \leqq x_n.$$

Obsah
18. strana ze 26
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka / Okno
V okně:
Zobrazit / Skrýt ikony
Zobrazit / Skrýt menu

Množinu $\varXi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ těchto bodů nazveme *výběrem reprezentantů dělení D*.

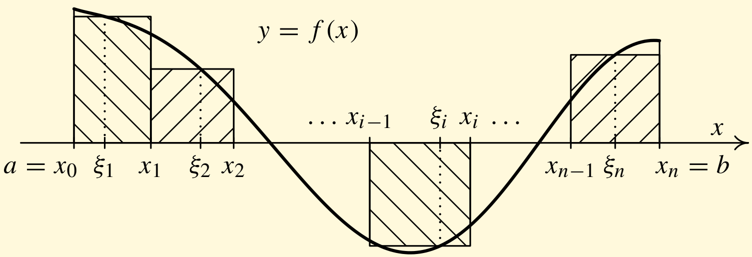
4. Je-li D dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ a $\varXi$ výběr reprezentantů tohoto dělení, definujeme *integrální součet* $\mathscr{S}(f, D, \varXi)$ odpovídající funkci f, dělení D a výběru reprezentantů $\varXi$ vztahem

$$\mathscr{S}(f, D, \varXi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

resp. rozepíšeme-li sumu,

$$\mathscr{S}(f, D, \varXi) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}).$$

Geometrický význam integrálního součtu je znázorněn na obr. 4.4. Vlastně jde o součet ploch obdélníků s délkami základen $x_i - x_{i-1}$ a výškami $f(\xi_i)$, kde $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$. Pochopitelně pokud je $f(\xi_i) < 0$, je příspěvek daného obdélníku záporný. Integrální součet kromě funkce f závisí rovněž na konkrétním dělení a jeho výběru reprezentantů.



Obr. 4.4: Znázornění integrálního součtu

Obsah
19. strana ze 26
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka / Okno
V okně:
Zobrazit / Skrýt ikony
Zobrazit / Skrýt menu

Animace

Pro lepší představu a pochopení pojmu integrální součet slouží následující animace. Ta zobrazuje vytváření integrálních součtů funkce $\sin x$ na intervalu $\langle a, b\rangle$, $-10 \leqq a < b \leqq 10$. Tyto meze je možné v uvedeném rozsahu zvolit. Použije se ekvidistantní dělení o normě $(b-a)/n$, kde číslo n je rovněž možné zvolit. Hodnota integrálního součtu pak ještě závisí na volbě výběru reprezentantů. Animace znázorňuje čtyři takové volby — levé konce dělících intervalů, pravé konce dělících intervalů, středy dělících intervalů a náhodně vybrané zástupce dělících intervalů. Animaci spustíte stisknutím následujícího tlačítka: **animace**.

Nyní již můžeme vyslovit definici určitého integrálu.

Definice 4.1. Nechť $f(x)$ je funkce, která je definovaná a ohraničená na ohraničeném a uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, $a < b$.
Řekneme, že funkce $f(x)$ je *integrovatelná* neboli že má *určitý integrál* na intervalu $\langle a, b\rangle$, jestliže existuje číslo $I \in \mathbb{R}$ s následující vlastností:

> K libovolnému číslu $\varepsilon > 0$ lze nalézt číslo $\delta > 0$ tak, že pro libovolné dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ takové, že $\nu(D) < \delta$, a pro libovolný výběr reprezentantů Ξ tohoto dělení platí $\left|\mathscr{S}(f, D, \Xi) - I\right| < \varepsilon$.

Číslo I pak nazýváme hodnotou určitého integrálu a píšeme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I. \tag{4.2}$$

Číslo a nazýváme *dolní mez*, číslo b *horní mez*, interval $\langle a, b\rangle$ *integrační obor* a funkci f *integrand*. Horní a dolní mez nazýváme společně *integrační meze*.

Názorný význam předchozí definice je následující: Vytváříme-li integrální součty pro čím dál jemnější dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, pak se (při libovolných výběrech reprezentantů) hodnoty $\mathscr{S}(f, D, \Xi)$ „ustalují“ kolem čísla I. Pokud tomu tak není (integrální součty „oscilují“ i pro velmi jemná dělení), funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$ určitý integrál nemá.

Poznámka 4.2.

1. Snadno se ukáže, že pokud číslo I s vlastností uvedenou v předchozí definici existuje, je jediné. Určitý integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ je tudíž definován jednoznačně.
2. Integrál z definice 4.1 se nazývá *Riemannův*[1]. Ukazuje se, že tento integrál nemá zcela ideální vlastnosti a pro některé teoretičtější úvahy jsou vhodné jiné, obecnější, ale složitější konstrukce. Takových konstrukcí existuje celá řada. Největší význam a rozšíření má asi *Lebesgueův*[2] integrál. Nejobecnější v tomto směru je asi *Henstockův-Kurzweilův* integrál. Pro běžné potřeby inženýrů je však Riemannův integrál zcela dostačující.
3. Často se Riemannův integrál zavádí jiným způsobem. Místo integrálních součtů se používají horní a dolní součty. Lze ukázat, že obě definice jsou ekvivalentní).

[1]**Georg Friedrich Bernhard Riemann** (1826–1866) (čti ríman) — vynikající německý matematik. Zabýval se teorií funkcí, geometrií, matematickou a teoretickou fyzikou a diferenciálními rovnicemi. Jeden z největších matematiků všech dob. Jeho tzv. Riemannova hypotéza o rozložení nul ζ-funkce je dodnes nevyřešena a je považována za jeden z nejtěžších matematických problémů.

[2]**Henri Leon Lebesgue** (1875–1941) (čti lebeg) — významný francouzský matematik. Zabýval se teorií funkcí a integrálu. Jím zavedená míra a integrál významně ovlivnily moderní matematiku.

Obsah
22. strana ze 26
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka / Okno
V okně:
Zobrazit / Skrýt ikony
Zobrazit / Skrýt menu

4.2. Newtonova–Leibnizova formule

Klíčovým prostředkem ke konkrétnímu výpočtu určitého integrálu je následující věta. Ta obsahuje formuli pojmenovanou podle dvou matematiků, kteří se velkou měrou zasloužili o vybudování základů diferenciálního a integrálního počtu funkcí jedné proměnné — Newtona[1] a Leibnize[2]. Tato formule je slíbeným vztahem mezi neurčitým a určitým integrálem.

Věta 4.3 (Newtonova-Leibnizova formule). *Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $F(x)$ je její primitivní funkce spojitá na $\langle a, b\rangle$. Pak platí, že*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \tag{4.3}$$

Poznámka 4.4.

1. Pro rozdíl $F(b) - F(a)$ se vžilo označení $[F(x)]_a^b$, takže rovnost (4.3) obvykle zapisujeme jako

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b.$$

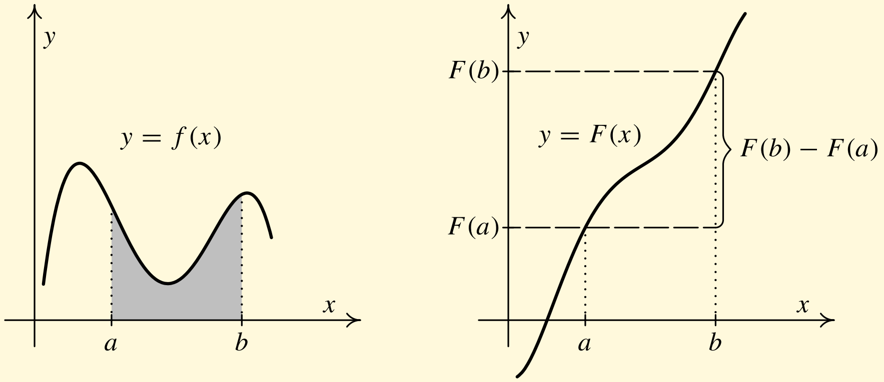
2. Z první kapitoly víme, že pokud k funkci $f(x)$ existuje primitivní funkce $F(x)$, není jediná. Na první pohled by se tedy mohlo zdát, že by vzorec (4.3) pro různé primitivní funkce mohl dát různé výsledky. Z věty 3.2 plyne, že tomu tak není, a tudíž vzorec dává stejný výsledek nezávisle

[1] **Isaac Newton** (1643–1727) (čti njútn) — anglický matematik, fyzik, mechanik a astronom. Položil základy diferenciálního a integrálního počtu, který potřeboval pro vybudování klasické mechaniky.

[2] **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646–1716) (čti lajbnyc) — německý matematik, fyzik, filosof, vynálezce, právník, historik a jazykovědec. Položil základy diferenciálního a integrálního počtu.

na výběru konkrétní primitivní funkce. Je-li totiž $G(x)$ nějaká další primitivní funkce k $f(x)$, existuje konstanta c taková, že $G(x) = F(x) + c$. Tedy $G(b) - G(a) = [F(b) + c] - [F(a) + + c] = F(b) - F(a)$.

3. Na obr. 4.5 je znázorněna Newtonova-Leibnizova formule geometricky. Integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ je roven přírůstku primitivní funkce $F(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ (obě funkce mohou být definovány na širším intervalu, než je $\langle a, b\rangle$, jako je tomu např. v tomto případě). Všimněte si, že důsledkem toho, že v tomto případě je $f(x)$ kladná, je, že primitivní funkce $F(x)$ je rostoucí. Platí totiž $F'(x) = f(x) > 0$ a z diferenciálního počtu víme, že kladná derivace na intervalu znamená, že funkce $F(x)$ roste. To je ve shodě s názorem, který nám říká, že při zafixované dolní mezi a a zvětšující se horní mezi b se plocha pod grafem musí zvětšovat, tj. $F(x)$ musí růst, aby se zvětšoval přírůstek $F(b) - F(a)$.



Obr. 4.5: Newtonova-Leibnizova formule

Animace

K lepšímu pochopení Newtonovy-Leibnizovy formule slouží následující **animace**.

Pár příkladů

$$\int_1^2 x^2 \, dx = \left[\frac{1}{3} x^3\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}\,.$$

$$\int_0^4 \sqrt{x} \, dx = \int_0^4 x^{1/2} \, dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^4 = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^4 = \frac{2}{3}\sqrt{4^3} - 0 = \frac{16}{3}\,.$$

$$\int_0^\pi \sin u \, du = [-\cos u]_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = 2.$$

Obsah
25. strana ze 26
Zavřít dokument
Konec
Celá obrazovka / Okno
V okně:
Zobrazit / Skrýt ikony
Zobrazit / Skrýt menu

Literatura

[1] Hošková, Š., Kuben, J., Račková, P. : *Integrální počet funkcí jedné proměnné*. VŠB–TU Ostrava 2006.

[2] Kuben, J., Šarmanová, P. : *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*. VŠB–TU Ostrava 2006.

[3] Schwabik Š., Šarmanová, P. : *Malý průvodce historií integrálu*. Prometheus, Praha, 1996.

[4] Šarmanová, P. : *Pár poznámek k derivaci a integrálu*. Škomam 2005. http://www.am.vsb.cz/SKOMAM05/Prednasky/Sarmanova/par_poznamek.pdf

[5] Šarmanová, P. : *Pár poznámek k neurčitému integrálu*. Škomam 2006. http://www.am.vsb.cz/SKOMAM06/Prednasky/sarmanova.pdf

Děkuji za pozornost a přeji pěkný den