Cvičení 3

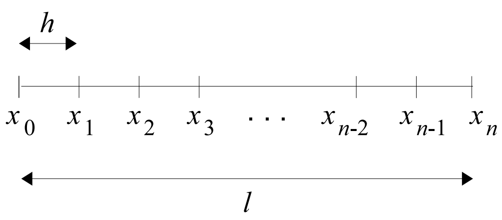
Uvažujme úlohu

$$\boxed{\begin{array}{l} -k\,u''(x) = f(x) \quad \text{pro } x \in (0,\,l),\ k,\,l > 0, \\ u(0) = u(l) = 0. \end{array}}$$

Řešení tohoto problému si lze představit jako `průhyb struny` délky l, která je uchycena na obou koncích a na níž působí vertikální síla s hustotou f. Konstanta k vyjadřuje tuhost struny.

1. Numerické řešení úlohy pomocí `metody sítí (konečných diferencí)`

Na struně zvolíme pravidelnou síť uzlů $x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_{n-1},\, x_n,\ n \in \mathbb{N}$.



Vzdálenost dvou sousedních uzlů vyjádříme číslem

$$h = \frac{l}{n}.$$

Označíme si dále $u_i = u(x_i)$ a $f_i = f(x_i)$ pro $i = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$. Nyní budeme hledat aproximaci řešení v uvedených uzlech.

a) počáteční uzel: $u_0 = 0$

b) vnitřní uzly: derivaci vyskytující se v diferenciální rovnici aproximujeme pomocí `diferenčních podílů`

$$u''(x_i) \approx \frac{u'(x_i + \frac{h}{2}) - u'(x_i - \frac{h}{2})}{h} \approx \frac{\frac{u(x_i+h)-u(x_i)}{h} - \frac{u(x_i)-u(x_i-h)}{h}}{h} =$$

$$= \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2};$$

rovnici $-k\,u''(x_i) = f(x_i)$ pak nahradíme rovnicí

$$\frac{k}{h^2}[-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}] = f_i, \quad i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n-1$$

c) koncový uzel: $u_n = 0$

Dostáváme tak soustavu $(n-1)$ lineárních algebraických rovnic o $(n-1)$ neznámých, kterou si můžeme (maticově) zapsat takto:

$$\underbrace{\frac{k}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{=:\,\mathsf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix}}_{=:\,\mathbf{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{bmatrix}}_{=:\,\mathbf{b}}$$

2. Analytické řešení úlohy pro konstantní f

Předpokládejme, že $f(x) = c \in \mathbb{R}$ pro všechna $x \in (0,\, l)$.
Pak pro všechna $x \in (0,\, l)$ platí:

$$-ku''(x) = c;$$
$$u''(x) = -\frac{c}{k};$$
$$u'(x) = \int -\frac{c}{k}\,\mathrm{d}x = -\frac{c}{k}x + a,\;\; a \in \mathbb{R};$$
$$u(x) = \int -\frac{c}{k}x + a\,\mathrm{d}x = -\frac{c}{2k}x^2 + ax + b,\;\; b \in \mathbb{R}.$$

Nyní vezmeme v úvahu okrajové podmínky a předepíšeme hodnoty konstant a a b.

$$u(0) = 0: \quad 0 = -\frac{c}{2k}\cdot 0 + a\cdot 0 + b \;\Rightarrow\; b = 0$$
$$u(l) = 0: \quad 0 = -\frac{c}{2k}\cdot l^2 + a\cdot l \Rightarrow\; a = \frac{c}{2k}l$$

Získali jsme analytické řešení naší úlohy ve tvaru

$$u(x) = \frac{c}{2k}x(l-x) \quad \text{pro } x \in \langle 0,\, l\rangle.$$

Toto řešení je pro $c := -1$, $k := 1$ a $l := 1$ znázorněno na následujícím obrázku.